جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضات

٣٤٣ ريض (نظرية الزمر)
الاختبار القصير الأول
10 درجات

السؤال الأول : (2.5 درجة)
لتكن G مجموعة غير خالية و * عملية ثنائية معرفة عليها. متى نقول أن الزوج $(G, *)$ يشكل زمرة ؟ و أعطي مثالاً على ثلاث زمر مختلفة عدد عناصر كل منها يساوي 8 .

السؤال الثاني: تحقق في ما يلي إذا كانت الأزواج التالية تشكل زمرة أم لا: (2 درجة)
أ - $(V, \cdot)$ حيث أن $V = \{1, -1, i, -i\}$ و العملية الثنائية هي عملية الضرب.
ب - $(\mathbb{Z}, *)$ حيث أن العملية الثنائية معرفة كالأتي : $x * y = x + y - xy$ لكل x, y في $\mathbb{Z}$.

السؤال الثالث: (1.5 درجة)
لكن $(G, \cdot)$ زمرة. أثبت أنه إذا كان $(a\,b)^2 = a^2\,b^2$ لكل $a, b \in G$ فإن G زمرة إبدالية.

السؤال الرابع: (1.5 درجة)
لتكن G زمرة و H مجموعة جزئية غير خالية منها. أثبت أنه إذا كان لأي عنصرين a, b في المجموعة H و أن $a\,b^{-1} \in H$ فإن H تشكل زمرة جزئية من G.

السؤال الخامس: (1.5 درجة)
أثبت أنه إذا كان x هو العنصر الوحيد الذي رتبته 2 في الزمرة G فإن $x \in Z(G)$. $(x^2 = e)$

السؤال السادس: (1 درجة)
أكتب جميع الزمر الجزئية من زمرة مجموعة حلول $z^{12} - 1 = 0$. حيث أن الزمرة معرفة كالتالي
$G = \{\omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{12} = e\}$ مع عملية الضرب.