3– بعض الاختبارات المبنية على توزيع ذو الحدين

3.1 اختبار ذو الحدين: Binomial Test

البيانات: n من المحاولات المستقلة في كل محاولة احتمال أن ينتمي الناتج لفئة 1 هو p ، احتمال ان ينتمي الناتج لفئة 2 هو $1-p$

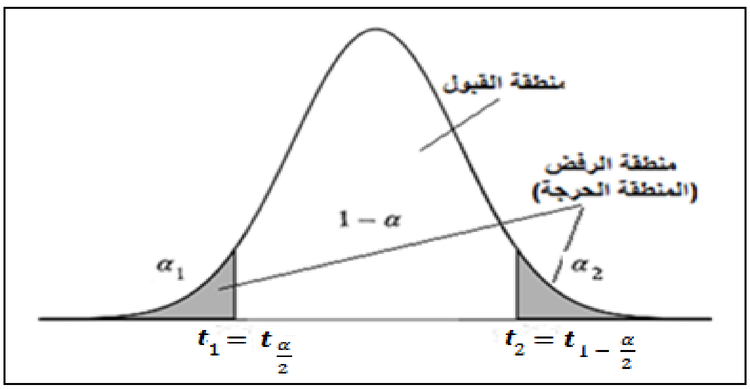
O_1 عدد الملاحظات من فئة 1 ، O_2 عدد الملاحظات من فئة 2 ، $O_1 + O_2 = n$

إحصاء الاختبار: $T = O_1$

t ... القيمة من جدول توزيع ذو الحدين $(\,,p^*)$ $1-\frac{\alpha}{2}$

– اختبار ذو جانبين:

فرض العدم: $\boldsymbol{H_0: p = p^*}$ الفرض البديل: $\boldsymbol{H_1: p \neq p^*}$

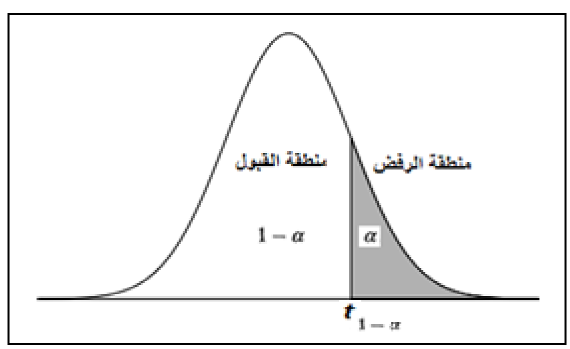


$P(Y \le t_1) = \frac{\alpha}{2}$, $P(Y > t_2) = \frac{\alpha}{2}$, $P(Y \le t_2) = 1-\frac{\alpha}{2}$

– اختبار ذو جانب واحد:

ذو جانب أيمن:

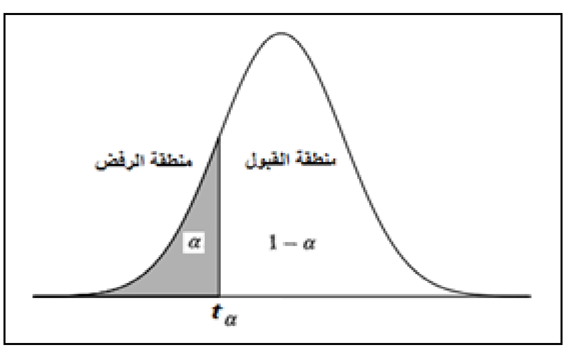
فرض العدم: $\boldsymbol{H_0: \mu \le \mu_0}$ ، الفرض البديل: $\boldsymbol{H_1: \mu > \mu_0}$



$P(Y > t) = \alpha,\ P(Y \le t) = 1-\alpha$

ذو جانب أيسر:

فرض العدم: $\boldsymbol{H_0: \mu \ge \mu_0}$ ، الفرض البديل: $\boldsymbol{H_1: \mu < \mu_0}$



$P(Y \le t) = \alpha$

إذا كانت $n > 20$ لا يمكن إيجاد القيمة من الجدول:

حيث: y_r **الجزء** $r-$ **لمتغير** y **يتبع توزيع ذو الحدين** $Y\sim Binomial(n\,,p)$

w_r **الجزء** $r-$ **لمتغير** w **يتبع توزيع طبيعي**

للتحويل إلى المتغير Z **الذي يتبع توزيع طبيعي قياسي** $Z\sim N(0,1)$ **:** $Z = \dfrac{y-n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}$

ملحوظة:

الجزء $r-$ (r-th quantile) **لمتغير عشوائي** X **، هو القيمة** Q_r **التي تحقق:**

$$P(X_i < Q_r) \le r \quad ، P(X_i > Q_r) \le 1-r$$

المستوى الحرج $\hat{\alpha}$ **: هو أقل قيمة لمستوى المعنوية** α **يتم عندها رفض فرض العدم باستخدام العينة المعطاة.**

$(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة للاحتمال p :

إذا كانت $(n \le 20)$ نستخدم القانون التالي لحساب حدود فترة الثقة:

$$L = \frac{Y}{Y+(n-Y+1)F_{\frac{\alpha}{2},2(n-Y+1),2Y}} \quad ,$$

$$U = 1-\frac{n-Y}{n-Y+(Y+1)F_{\frac{\alpha}{2},2(Y+1),2(n-Y)}}$$

ويمكن إيجاد القيمة F من جدول توزيع F أو باستخدام Minitab

في حالة $(n > 20)$ نستخدم التوزيع الطبيعي التقريبي: $X\sim N(np\,,\sqrt{n\,p\,(1-p)})$

$$L = \frac{Y}{n} - Z_{\alpha/2}\sqrt{Y(n-Y)/n^3} \quad , \quad U = \frac{Y}{n} + Z_{\alpha/2}\sqrt{Y(n-Y)/n^3}$$

حيث: Y عدد مرات وقوع الحدث (عدد النواتج من فئة 1)، ضمن n من المحاولات المستقلة.

مثال 1:

وجد أن 6 سيارات من بين 16 سيارة وضعت تحت الاختبار غير صالحة للاستعمال. اختبر عند مستوى معنوية 0.05 الفرض القائل أن عدد السيارات غير الصالحة للاستعمال لا يتجاوز 10٪ ثم أوجد أقل مستوى للرفض.

3.2 اختبار الجزء : Quantile Test

البيانات: $X_1 , X_2, \dots , X_n$ **تمثل عينة عشوائية ،** $X_i's$ **مشاهدات مستقلة تتبع نفس التوزيع،** $(0 < p^* < 1)$.

إحصاء الاختبار:

T_2 **عدد المشاهدات** $X_i's$ **أقل من أو تساوي** x^* ، T_1 **عدد المشاهدات** $X_i's$ **أقل من** x^*

إذا لم يكن أي من القيم $X_i's$ **يساوي** x^* **فإن** $T_1 = T_2$ **عدا ذلك فإن** $T_1 > T_2$

اختبار ذو جانبين:

A **-فرض العدم: الجزء -** p^* **للمتغير** X **يساوي** x^* $\quad H_0: P(X \le x^*) = p^*$

يكافئ : $\quad H_0: P(X \le x^*) \ge p^* \text{ and } P(X < x^*) \le p^*$

الفرض البديل: الجزء - p^* **للمتغير** X **لا يساوي** x^* $\quad H_1: P(X \le x^*) \ne p^*$

يكافئ : $\quad H_1: P(X \le x^*) < p^* \text{ and } P(X < x^*) > p^*$

قاعدة الاختبار: كما في اختبار ذو الحدين:

نوجد كلا من t_1 ، t_2 **من جدول توزيع ذو الحدين باستخدام** (n , p^*) **حيث:**

$$P(Y \le t_1) = \frac{\alpha}{2} , \qquad P(Y > t_2) = \frac{\alpha}{2} , \ P(Y \le t_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

نرفض فرض العدم H_0 **إذا كانت :** $T_1 \le t_1$ **أو** $T_2 > t_2$ **عدا ذلك نقبل** H_0

اختبار ذو جانب واحد:

B **-فرض العدم: الجزء -** p^* **للمتغير** X **أكبر من أو يساوي** x^* $\quad H_0: P(X \le x^*) \le p^*$

الفرض البديل: الجزء - p^* **للمتغير** X **أقل من** x^* $\quad H_1: P(X \le x^*) > p^*$

قاعدة الاختبار: كما في اختبار ذو الحدين:

نوجد t **من جدول توزيع ذو الحدين باستخدام** (n , p^*) **حيث:** $P(Y > t) = \alpha, \ P(Y \le t) = 1 - \alpha$

نرفض فرض العدم H_0 **إذا كانت :** $T_2 > t$ ، **نقبل** H_0 **إذا كانت :** $T_2 \le t$

C **-فرض العدم: الجزء -** p^* **للمتغير** X **أقل من أو يساوي** x^* $\quad H_0: P(X \le x^*) \ge p^*$

الفرض البديل: الجزء - p^* **للمتغير** X **أكبر من** x^* $\quad H_1: P(X \le x^*) < p^*$

قاعدة الاختبار: كما في اختبار ذو الحدين:

نوجد t **من جدول توزيع ذو الحدين باستخدام** (n , p^*) **حيث:** $\quad P(Y \le t) = \alpha$

نرفض فرض العدم H_0 **إذا كانت :** $T_1 \le t$ ، **نقبل** H_0 **إذا كانت :** $T_1 > t$

في حالة $(n > 20)$ **نستخدم التوزيع الطبيعي التقريبي:** $\quad X \sim N(np , \sqrt{n\, p\, (1-p)})$

مثال 2:

تضع إحدى الكليات بالجامعة امتحان قبول للطلاب المتقدمين لها. تحدد من السنوات السابقة أن الربع الأعلى لدرجات المقبولين بها عند درجة الامتحان 85. قامت إحدى المدارس الثانوية بأخذ عينة عشوائية من طلابها الذين نجحوا في الامتحان والتحقوا بهذه الكلية حجمها 15 طالب. فكانت درجاتهم من 100 في امتحان القبول على النحو التالي:

83, 89, 75, 81, 85, 90, 88, 92, 79, 86, 73, 86, 87, 77, 91

ولمقارنة الطلاب الملتحقين بهذه الكلية من طلاب المدرسة المذكورة مع بقية الطلاب الملتحقين بالكلية يتم اختبار الفرض القائل بان هذه الدرجات هي عينة عشوائية من مجتمع ربيعه الأعلى 85 وذلك عند مستوى معنوية 0.05.

$(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة للجزء – p^* للمتغير X :

إذا كانت: $X^{(1)} \le X^{(2)} \le \cdots \le X^{(r)} \le \cdots \le X^{(s)} \le \cdots \le X^{(n)}$ **تمثل عينة مرتبة،**

حيث: $1 \le r \le s \le n$

A –**عندما لا يزيد حجم العينة n عن 20 أي أن $n \le 20$ وبمعرفة p^*, n وباستخدام جدول نبحث تحت القيمة $p = p^*$ عن $\alpha/2$ ثم نأخذ قيمة y المقابلة لها ويضاف إليها واحد وتعطي ترتيب الحد الأدني r. ثم نستمر بالبحث تحت القيمة $p = p^*$ عن $1-\alpha/2$ ثم نأخذ قيمة y المقابلة لها ويضاف اليها واحد وتعطي ترتيب الحد الأعلى s.**

B –**عندما يزداد حجم العينة عن 20 أي $n > 20$ يستخدم جدول التوزيع الطبيعي لإيجاد الحد الأدنى r و الحد الأعلى s كما يلي**

$$r = n\,p^* + w_{\alpha/2}\sqrt{n\,p^*(1-p^*)}$$
$$s = n\,p^* + w_{1-\alpha/2}\sqrt{n\,p^*(1-p^*)}$$

C –**إذا كانت فترة الثقة ذات جانب واحد فإنه يمكن الحصول على:**

الحد الأدنى r من الاحتمال: $\boldsymbol{P}\left(X^{(r)} \le x_{p^*}\right) = 1 - \alpha_1$

والحد الأعلى s من الاحتمال: $\boldsymbol{P}\left(x_{p^*} \le X^{(s)}\right) = 1 - \alpha_2$

$$\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{X}^{(r)} \le \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}^*} \le \boldsymbol{X}^{(s)}\right) = \boldsymbol{1} - \alpha_1 - \alpha_2$$