3- بعض الاختبارات المبنية على توزيع ذو الحدين

3.4 اختبار الإشارة: Sign Test

هو اختبار ذو الحدين وفيه $p^* = 0.5$ ويستخدم لاختبار ما إذا كان لمجتمعين نفس الوسيط وتكون المشاهدات عبارة عن أزواج مرتبة (X , Y) (عنصر من كل مجتمع).

البيانات : n' من المشاهدات المستقلة لعينة عشوائية ثنائية المتغير: $(X_1 , Y_1), (X_2 , Y_2), \dots , (X_{n'} , Y_{n'})$

تتم المقارنة لكل زوج مرتب (X_i , Y_i)، يتم تصنيف الزوج "+" أو "plus" إذا كان $X_i < Y_i$ ، ويصنف "−" أو "minus" إذا كان $X_i > Y_i$ ، ويصنف "0" أو "tie" إذا كان $X_i = Y_i$ ، ويكون القياس المستخدم ترتيبي.

1 ـ المشاهدات للمتغير العشوائي الثنائي (X_i , Y_i) ، $i = 1, 2, \dots , n'$ ، مستقلة بالتبادل

2 ـ المشاهدات متسقة داخليا أي أنه: إذا كان $P(+) > P(-)$ لزوج مرتب واحد فإن $P(+) > P(-)$ لكل الأزواج وبالمثل في حالة $P(+) < P(-)$ أو $P(+) = P(-)$

إحصاء الاختبار :

T عدد الأزواج الموجبة "+" $(X_i < Y_i)$ ، n عدد الأزواج الموجبة "+" + عدد الأزواج السالبة "−"

t ... القيمة من جدول توزيع ذو الحدين $(n , p^* = 1/2)$ ، باستخدام α مستوى المعنوية المطلوب

- اختبار ذو جانبين:

فرض العدم: $H_0 : P(X_i < Y_i) = P(X_i > Y_i)$ $\quad$ $H_0 : P(+) = P(-)$

الوسيط متساوي لـ X_i , Y_i $\quad$ $H_0 : E(X_i) = E(Y_i)$

الفرض البديل: $H_1 : P(X_i < Y_i) \neq P(X_i > Y_i)$ $\quad$ $H_1 : P(+) \neq P(-)$

الوسيط مختلف لـ X_i , Y_i $\quad$ $H_1 : E(X_i) \neq E(Y_i)$

$$P(Y \le t) = \frac{\alpha}{2} , \quad P(Y \ge n - t) = \frac{\alpha}{2}$$

وبالتالي يتم رفض H_0 اذا كانت $T \le t$ أو $T \ge n - t$

إذا كانت: $n > 20$ يمكن الحصول على t من العلاقة: $t = 0.5(n + w_{\alpha/2}\sqrt{n})$

- اختبار ذو جانب واحد:

ذو جانب أيمن:

فرض العدم: $H_0 : P(X_i < Y_i) \le P(X_i > Y_i)$ $\quad$ **الفرض البديل:** $H_1 : P(X_i < Y_i) > P(X_i > Y_i)$

$H_0 : P(+) \le P(-)$ $\quad$ $H_1 : P(+) > P(-)$

قيم X_i (أقل من) قيم Y_i $\quad$ $H_0 : E(X_i) \le E(Y_i)$ $\quad$ **قيم X_i (أكبر من) قيم Y_i** $\quad$ $H_1 : E(X_i) > E(Y_i)$

$$P(Y \le t) = \alpha$$

وبالتالي يتم رفض H_0 اذا كانت $T \ge n - t$

ذو جانب أيسر:

فرض العدم: $H_0: P(X_i < Y_i) \geq P(X_i > Y_i)$ **الفرض البديل:** $H_1: P(X_i < Y_i) < P(X_i > Y_i)$

$H_0: P(+) \geq P(-)$ $H_1: P(+) < P(-)$

قيم X_i (أكبر من) قيم Y_i $H_0: E(X_i) \geq E(Y_i)$ **قيم X_i (أقل من) قيم Y_i** $H_1: E(X_i) < E(Y_i)$

$$P(Y \leq t) = \alpha$$

وبالتالي يتم رفض H_0 اذا كانت $T \leq t$

مثال (1):

المنتج A يتم تصنيعه باستخدام عملية معينة ، والمنتج B هو بديل له يتم تصنيعه بطريقة مختلفة. يريد المصنع أن يحدد ما إذا كان المستهلك يفضل المنتج B عن المنتج A قام باختيار عينة عشوائية مكونة من 10 عملاء يقوم كل منهم باستخدام المنتجين لفترة ليحدد أيهما يفضل؟ بعد انتهاء الفترة تم تسجيل آراء المستهلكين فوجد أن 8 يفضلون B على A ، 1 بفضل A على B ، 1 لم يحدد.

اختبر عند مستوى معنوية 0.05 $H_0: P(+) \leq P(-)$

ثم اوجد أقل مستوى لرفض H_0. $H_1: P(+) > P(-)$

حيث " + " تمثل الحدث: المنتج B مفضل عن المنتج A بينما " − " تمثل الحدث: المنتج A مفضل عن المنتج B

الحل:

اختبار ذو جانب واحد (جانب أيمن)

إحصاء الاختبار: T عدد الإشارات " + "

$$n = no.of \text{ “}+\text{”}'s + no.of \text{ “}-\text{”}'s = 9 \quad , \quad T = no.of \text{ “}+\text{”}'s = 8$$

باستخدام Minitab **نوجد t من توزيع ذو الحدين** $n = 9, p = 0.5$ ، $\alpha = 0.05$

$$P(Y \leq t) = \alpha \quad \to \quad P(Y \leq 1) = 0.0195 \quad \to \quad t = 1,\ n - t = 9 - 1 = 8$$

نرفض H_0 حيث $T \geq n - t$

المستوى الحرج: $\hat{\alpha} = 0.0195$ حيث أن T تقع على حد المنطقة الحرجة

مثال(2):

قام "آرشو" 1710م بفحص سجلات المواليد في مدينة لندن لفترة 82 عام وقارن عدد المواليد الذكور مع عدد المواليد الإناث في كل عام. فإذا كان في أي سنة الحدث " المواليد الذكور أكثر من الإناث" يمثل بـ "+" أما الحدث " المواليد الذكور أقل من الإناث" يمثل بـ "−". فإذا وجد أن عدد الاشارات الموجبة تساوي 82 اختبر تساوي نسبة الجنسين لتلك الفترة عند مستوى معنوية 0.05 . ثم اوجد أقل مستوى لرفض H_0 .

الحل:

فروض الاختبار:

$$H_0 : P(+) = P(-)$$
$$H_1 : P(+) \neq P(-)$$

إحصاء الاختبار: T عدد الإشارات " + "

$$n = 82 \quad , \quad T = no.of \text{ “ + ” ‘}s = 82$$

باستخدام Minitab نوجد t من توزيع ذو الحدين $n = 82 \,, p = 0.5$ ، $\frac{\alpha}{2} = 0.025$

$$P(Y \le t) = \frac{\alpha}{2} \quad \rightarrow \quad P(Y \le 31) = 0.0176 \quad \rightarrow \quad t = 31, \;\; n - t = 82 - 31 = 51$$

نرفض H_0 **حيث** $T \ge n -$

المستوى الحرج: $\hat{\alpha} = P(Y = 0) + P(Y = 82) = (0.5)^{82} + (0.5)^{82}$

مثال(3): أخذت 10 من طيور الحمام لمسافة 25 كيلو متر غرب منطقة تربيتها وأطلقت في الخلاء وذلك لمعرفة فيما اذا كانت ستتجه جنوب شرق (لتعود الى بيوتها) أم انها سوف تتوه وتنتشر في كل مكان. استخدمت النظارات المقربة لمعرفة اتجاه كل واحدة من هذه الطيور وكذلك معرفة زاوية الاتجاه وكانت الزوايا كالتالي 80 ;320 ;280 ;85 ;20 ;35 ;350 ;120 ;85 ; 345. بفرض أن الطائر اذا اتجه شرقا (بزاوية 90 − 0 أو 360 − 270) يعطي اشارة "+" أما اذا اتجه غربا (بزاوية 270 − 90) يعطى اشارة "−"

أ) اختبر بمستوى معنوية $\alpha = 0.1$ صحة الاعتقاد بأن هذه الطيور تنزع الى موطنها.

ب) اوجد أقل مستوى للرفض (مستوى المعنوية الفعلي للرفض) $\hat{\alpha}$.

نظرية:

الحدث " + " يمثل "$X_i < Y_i$" أو "$Y_i - X_i > 0$" الفرق موجب وبالمثل الحدث " − " يمثل "$X_i > Y_i$" أو "$Y_i - X_i < 0$" الفرق سالب والحدث " 0 " يمثل الفرق صفر وبالتالي فإن اختبار الإشارة يقارن احتمال الفرق الموجب مع احتمال الفرق السالب. في اختبار ذو الحدين كان يتم تسميتهم بالفئة 1 ، الفئة 2 على الترتيب.

وبحذف التعادلات (الحدث " 0 ") فإن: $P(+) + P(-) = 1$

الفرض : $H_0 : P(+) = P(-)$ **يماثل** $H_0 : P(+) = 0.5$ **وهو نفس اختبار ذو الحدين باستخدام** $p^* = 0.5$

في حالة البيانات الترتيبية للأزواج (X_i, Y_i) فإن العينة ثنائية المتغير يمكن التعبير عنها باستخدام الفرق $Y_i - X_i$ كما في اختبار الإشارة. أما إذا كانت البيانات إسمية وثنائية التقسيم $(0,1)$ فيمكن استخدام طريقة مماثلة الاختبار السابق ويسمى الاختبار في هذه الحالة باسم مختلف.

اختبار ماك نيمار: McNemar Test

هو اختبار ذو الحدين فيه $p^* = 0.5$ ويستخدم لاختبار ما إذا كان لمجتمعين نفس الوسيط وتكون المشاهدات عبارة عن أزواج مرتبة (X, Y) (عنصر من كل مجتمع).

البيانات : n' **من المشاهدات المستقلة لعينة عشوائية ثنائية المتغير:** $(X_i, Y_i)\ ,\ i = 1, 2, \dots, n'$

مستوى القياس للمتغيرين X_i, Y_i إسمي – ثنائي التقسيم ، إذا استخدمنا "0" و "1" ، فإن القيم الممكنة لـ (X_i, Y_i) هي: $(0,0)\ ,\ (0,1)\ ,\ (1,0)\ ,\ (1,1)$

تقسيم Y_i

تقسيم X_i		$Y_i = 0$	$Y_i = 1$
	$X_i = 0$	a عدد الأزواج $(0,0)$	b عدد الأزواج $(0,1)$
	$X_i = 1$	c عدد الأزواج $(1,0)$	d عدد الأزواج $(1,1)$

1 - **المشاهدات للمتغير العشوائي الثنائي** $(X_i, Y_i)\ ,\ i = 1, 2, \dots, n$ **، مستقلة بالتبادل**

2 - **المشاهدات متسقة داخليا أي أن: الفرق** $P(X_i = 0, Y_i = 1) - P(X_i = 1, Y_i = 0)$ **موجب لكل قيم i أو سالب لكل قيم i أو صفر لكل قيم i**

إحصاء الاختبار :

$$T_1 = \frac{(b-c)^2}{b+c} \qquad \text{أو} \qquad T_2 = b \ \text{ إذا كانت } \ b + c \le 20$$

لاحظ أن إحصاء الاختبار لا يعتمد على a أو d حيث يمثل كل منهما التعادلات التي يتم تجاهلها.

فروض الاختبار: - اختبار ذو جانبين:

$$H_0: P(X_i = 0) = P(Y_i = 0) \quad \forall i$$
$$H_1: P(X_i = 0) \ne P(Y_i = 0) \quad \forall i$$

وهي أيضا تكافئ:

$$H_0: P(X_i = 1) = P(Y_i = 1) \quad \forall i$$
$$H_1: P(X_i = 1) \ne P(Y_i = 1) \quad \forall i$$

قاعدة الاختبار:

إذا كانت $n \le 20$ **:** t **... القيمة من توزيع ذو الحدين** $(n = b + c\ ,\ p = 1/2)$ **، باستخدام α مستوى المعنوية المطلوب**

$$P(Y \le t) = \frac{\alpha}{2}\ , \quad P(Y \ge n - t) = \frac{\alpha}{2}$$

وبالتالي يتم رفض H_0 اذا كانت $T_2 \le t$ أو $T_2 \ge n - t$

إذا كانت: $n > 20$ تم رفض H_0 اذا كانت T_1 أكبر من الجزء -$(1-\alpha)$ لتوزيع $\chi^2_{1-\alpha,1}$ باستخدام درجة حرية 1 .

- اختبار ماك نيمار ذو جانب واحد: يتم تطبيق نفس قاعدة اختبار الإشارة ذو جانب واحد

مثال (1):

اختيرت عينة عشوائية من 100 شخص وسئلوا عن تفضيلهم للسيارات اليابانية أم السيارات الأوربية اختار 84 منهم اليابانية بينما اختار الباقون الأوربية. أجريت على العينة حملة اعلانات مكثفة توضح مزايا النوعين من السيارات وأعيد سؤال العينة مرة أخرى فغير ربع الذين اختاروا السيارات اليابانية رأيهم الى الأوربية وكذلك غير ربع الذين اختاروا السيارات الأوربية رأيهم الى اليابانية. اختبر عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ هل التغير في الرأي من السيارات اليابانية الى الأوربية معنوي ام لا؟

الحل

نضع الاختبار كما في الجدول التالي:

قبل حملة الاعلانات	بعد حملة الاعلانات	
	يابانية	أوروبية
يابانية	$a = 63$	$b = 21$
أوربية	$c = 4$	$d = 12$

$X_i = 0$ الشخص i يفضل السيارات اليابانية قبل حملة الدعاية ، $X_i = 1$ الشخص i يفضل السيارات الأوروبية قبل حملة الدعاية

$Y_i = 0$ الشخص i يفضل السيارات اليابانية بعد حملة الدعاية ، $Y_i = 1$ الشخص i يفضل السيارات الأوروبية بعد حملة الدعاية

فروض الاختبار:

أراء الأشخاص لم تتغير بعد حملة الدعاية $\quad H_0: P(X_i = 0) = P(Y_i = 0) \quad \forall i$

أراء الأشخاص تغيرت بعد حملة الدعاية $\quad H_1: P(X_i = 0) \neq P(Y_i = 0) \quad \forall i$

حيث أن $n = b + c > 20$ فنحسب T_1 كما يلي

$$T_1 = \frac{(b-c)^2}{b+c} = \frac{(21-4)^2}{21+4} = \frac{(17)^2}{25} = 11.56$$

باستخدام توزيع χ^2 : $\quad \chi^2_{1-\alpha,\,1} = \chi^2_{0.95,\,1} = 3.841$

نرفض H_0 أي أن أراء الأشخاص تغيرت بعد حملة الدعاية .

اختبار كوكس آند ستيوارت: Cox and Stuart Test

البيانات : n' **من المشاهدات لمتغيرات عشوائية:** $X_1, X_2, \dots, X_{n'}$ **لها نفس ترتيب المشاهدات التي أخذت لها. يراد تحديد ما إذا كان هناك اتجاه عام في هذه المجموعة.**

يتم تجميع المتغيرات العشوائية في أزواج: $(X_1, X_{1+c}), (X_2, X_{2+c}), \dots, (X_{n'-c}, X_{n'})$

حيث: $c = \frac{n'}{2}$ **إذا كان** n' **زوجي ،** $c = \frac{n'+1}{2}$ **إذا كان** n' **فردي**

تتم مقارنة كل زوج مرتب (X_i, X_{i+c})**، يصنف الزوج "+" أو "plus" إذا كان** $X_i < X_{i+c}$ **، ويصنف "−" أو "minus" إذا كان** $X_i > X_{i+c}$ **، وبتجاهل التعادلات عدد الأزواج المتبقية** n **.**

1 - **المتغيرات العشوائية** $X_i\ ,\ i = 1, 2, \dots, n'$ **، مستقلة بالتبادل**

2 - **إما المتغيرات العشوائية لها نفس التوزيع أو هناك اتجاه عام بالزيادة أو النقصان**

إحصاء الاختبار :

T **عدد الأزواج الموجبة "+"** $(X_i < X_{i+c})$ **،** n **عدد الأزواج الموجبة "+"** $+$ **عدد الأزواج السالبة "−"**

قاعدة الاختبار هي نفس قاعدة اختبار الإشارة

- اختبار ذو جانبين:

فرض العدم: $H_0 : P(X_i < X_{i+c}) = P(X_i > X_{i+c}) \quad \forall i$ **لا يوجد اتجاه عام**

الفرض البديل: $H_1 : P(X_i < X_{i+c}) \neq P(X_i > X_{i+c}) \quad \forall i$ **يوجد اتجاه عام بالزيادة أو النقصان**

$P(Y \geq n - t) = \frac{\alpha}{2}\ ,\quad P(Y \leq t) = \frac{\alpha}{2}$ **، وبالتالي يتم رفض** H_0 **اذا كانت** $T \leq t$ **أو** $T \geq n-t$

إذا كانت: $n > 20$ **يمكن الحصول على** t **من العلاقة:** $t = 0.5(n + w_{\alpha/2}\sqrt{n})$

- اختبار ذو جانب واحد:

ذو جانب أيمن:

فرض العدم: $H_0 : P(X_i < X_{i+c}) \leq P(X_i > X_{i+c}) \quad \forall i$ **لا يوجد اتجاه عام بالزيادة**

الفرض البديل: $H_1 : P(X_i < X_{i+c}) > P(X_i > X_{i+c}) \quad \forall i$ **يوجد اتجاه عام بالزيادة**

$P(Y \leq t) = \alpha$ **، وبالتالي يتم رفض** H_0 **اذا كانت** $T \geq n-t$

ذو جانب أيسر:

فرض العدم: $H_0 : P(X_i < X_{i+c}) \geq P(X_i > X_{i+c}) \quad \forall i$ **لا يوجد اتجاه عام بالنقصان**

الفرض البديل: $H_1 : P(X_i < X_{i+c}) < P(X_i > X_{i+c}) \quad \forall i$ **يوجد اتجاه عام بالنقصان**

$P(Y \leq t) = \alpha$ **، وبالتالي يتم رفض** H_0 **اذا كانت** $T \leq t$

مثال (1):

في أنبوب لنقل الوقود تم قياس سرعة اندفاع الوقود في الأنبوب (بالقدم المكعب في الثانية) لفترة 24 شهرا . من خلال المقارنة لنفس الشهر في عامين متتاليين يتم التحقق من وجود اتجاه عام للتغير في تدفق الوقود في الأنبوب، تم جمع البيانات التالية:

الشهر	العام الأول	العام الثاني	الشهر	العام الأول	العام الثاني
يناير	14.6	14.2	يوليو	92.8	88.1
فبراير	12.2	10.5	أغسطس	74.4	80.0
مارس	104	123	سبتمبر	75.4	75.6
أبريل	220	190	أكتوبر	51.7	48.8
مايو	110	138	نوفمبر	29.3	27.1
يونيو	86.0	98.1	ديسمبر	16.0	15.7

المطلوب اختبار الفروض التالية: مستوى معنوية = 0.08

فرض العدم: معدل تدفق الوقود غير متناقص ، الفرض البديل: معدل التدفق متناقص

أوجد المستوى الحرج

الحل:

إحصاء الاختبار :

$T = 5$ عدد الأزواج الموجبة "+" $(X_i < X_{i+c})$ ،

$n = 12$ عدد الأزواج الموجبة "+" $+$ عدد الأزواج السالبة "−"

باستخدام Minitab توزيع ذو الحدين $(n = 12, p = 0.5)$

$$P(Y \leq t) = \alpha \ , \quad P(Y \leq 3) = 0.0730$$

وبالتالي يتم قبول $\boldsymbol{H_0}$

المستوى الحرج:

$\hat{\alpha} = P(Y \leq 5) = 0.387$ قيمة المستوى الحرج كبيرة – لا يمكن رفض فرض العدم عند مستوى معنية مقبول