جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

حلول تمارين مذكرة 246 ريض
الجبر الخطي و تطبيقاته

1443-1442

د المنجي أحمد بلال
أستاذ بقسم الرياضيات
mblel@ksu.edu.sa
http://fac.ksu.edu.sa/mblel

المحتويات

1.0 إصلاح تمارين الباب الأول

حل التمرين 1:

$$\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1 & 2\\ 1 & -4 & 2 & -1\\ 0 & -1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_{1,2},3R_{1,2},(-1)R_{1,4}} \begin{pmatrix}1 & -4 & 2 & -1\\ 0 & -11 & 7 & -1\\ 0 & -1 & -2 & 1\\ 0 & 4 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-4)R_{2,4}]{R_{2,3},(-1)R_2,(11)R_{2,3}} \begin{pmatrix}1 & -4 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 29 & -12\\ 0 & 0 & -9 & 5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_{3,4},(-2)R_{3,4}]{3R_{4,3},5R_{3,4}} \begin{pmatrix}1 & -4 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 20\\ 0 & 0 & 0 & -37\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(\frac{1}{-37})R_4]{4R_{2,1},(-2)R_{3,2}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 10 & -5\\ 0 & 1 & 0 & -41\\ 0 & 0 & 1 & 20\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[5R_{4,1}]{(41)R_{4,2},(-20)R_{4,3}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 10 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-10)R_{3,1}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

كذلك الصيغة الدرجة الصفية المختزلة للمصفوفة B هي . $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

الصيغة الدرجة الصفية المختزلة للمصفوفة C هي . $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

حل التمرين 2:

$X = \begin{pmatrix} a & 2a-1 & a \\ b+2 & 2b+3 & b \\ c+2 & 2c+1 & c \end{pmatrix}$، $a, b, c \in \mathbb{R}$.

حل التمرين 3:

1. معكوس المصفوفة A هي $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. إذا كان $2(B+I)^{-1} = A$ فإن $(B+I)^{-1} = \frac{1}{2}A$ و بالتالي $B+I = 2A^{-1}$ و $B = 2A^{-1} - I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 6 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

حل التمرين 4:

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -17 & 5 & -7 \\ -31 & 2 & -13 \end{pmatrix}$.

حل التمرين 5:

معكوس المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ هي $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

و بالتالي $A-I=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -2\\ 2 & -4 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ و $A=I+\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -2\\ 2 & -4 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

حل التمرين 6:

$AB\begin{pmatrix}x-y & x\\ z-t & z\end{pmatrix}$, $BA\begin{pmatrix}x+z & y+t\\ -x & -y\end{pmatrix}$.

إذاً $AB=BA$ إذا و إذا فقط إذا $z=-y$ و $x=y+t$.

إذاً جميع المصفوفات هي $\begin{pmatrix}y+t & y\\ -y & t\end{pmatrix}$, $y,t\in\mathbb{R}$.

حل التمرين 7:

1. $(I-A)^3=0$ و $A^2=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
2. $(I-A)^3=I-3A+3A^2-A^3=$، إذاً $A(A^2-3A+3I)=I$ و بالتالي A لها معكوس و $A^{-1}=A^2-3A+3I=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

حل التمرين 8:

معكوس المصفوفة A هي $\begin{pmatrix}-1 & 3 & -2\\ 2 & -4 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

حل التمرين 9:

$\frac{9}{10}=|2A^{-5}B^{-3}C^{-1}(B^T)^5|=16|A|^{-5}|B|^2|C|^{-1}$.

حل التمرين 10:

1. $(I-PE)(I+PE)=I+PE-PE-PEPE=I+-P^2E^2=I$.
إذاً المصفوفة $(I-PE)$ هي معكوس المصفوفة $(I-PE)$.
2. $E=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ تحقق $E^2=0$.

حل التمرين 11:

1. $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$.
2. المصفوفة A^{-1} $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ $C=A$ تحقق $C^3=B$.

حل التمرين 12:

1. $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-17&1&-7\\-31&2&-13\end{pmatrix}$.
2. $8|B|=|A^{-1}+I|$، إذًا $|B|=\dfrac{1}{4}$.

حل التمرين 13:

$A^2-AB-2I_3=0$ ومعكوس المصفوفة A هي $\dfrac{1}{2}(A-B)$.

2.0 إصلاح تمارين الباب الثاني

حل التمرين 1:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$ ،

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$ ،

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix} = 12$$ ،

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -80$$ ،

$$\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \\ a & x & x & b \end{vmatrix} = (b-a)^2(a+b+2x)(a+b-2x)$$

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = 2abc(a-b)(b-c)(c-a)$$.

$$.\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc)$$

$$.\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = -(a^3-b^3)^2$$

حل التمرين 2:

$|A^{-1}| = -3 \Leftarrow |A| = -\frac{1}{3}$،

$|2B^T| = -4 \Leftarrow |B| = -\frac{1}{2}$.

$|A(\mathrm{Adj}A) + 2B(\mathrm{Adj}B)| = ||A|I_3 + 2|B|I_3| = -\left(\frac{4}{3}\right)^3$.

حل التمرين 3:

1. $|A| = -5(b+2)(a+2)$.
2. قيم a, b بحيث تكون للمصفوفة A معكوس هي $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

حل التمرين 4:

بما أن $|AB^T| = -14$ فإن المصفوفة A لها معكوس و بالتالي بما أن $\frac{1}{2}A^4 + A = 0$ فإن $\frac{1}{2}A^3 = -I_3$.

إذاً $|A| = -1$ و بالتالي $|B| = 14$.

حل التمرين 5:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} m & 0 & 1 & m \\ 1 & m & 0 & -1 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-m)\begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2m+2 & m & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-m)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & -1 \\ 2m+2 & m & 1-m^2 \end{vmatrix} \\
&= m(m+1)^2(2-m).
\end{aligned}$$

حل التمرين 6:

$2I - A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = A^2$، إذا $A(A+I) = 2I$. ونستنتج أن المصفوفة A لها معكوس و $A^{-1} = \frac{1}{2}(A+I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

حل التمرين 7:

1. $\text{adj}P = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\det P = 6$، إذا
$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
2. $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $D^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

حل التمرين 8:

1. $PQ = 4I_3$ و $P^{-1} = \frac{1}{4}Q$.
2. $B = P^{-1}AP = 4I_3 + N$ و $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $N^2 = 0$, إذا $(B - 4I_3)^2 = 0 = B^2 - 8B + 16I_3$.
و بالتالي $B^{-1} = \frac{-1}{16}(B - 8I_3)$ و
$A^{-1} = PB^{-1}P^{-1} = \frac{-1}{16}\begin{pmatrix} 10 & 14 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

حل التمرين 9:

1. $2AC - AB^2 + 9I = 0 \Rightarrow A(B^2 - 2C) = 9I \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{9}(B^2 - 2C).$

$$B^2 = 36\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

إذا

$$A^{-1} = 2\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. $|A^{-1}| = 2^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2^6.5 = -320$، $|A| = \dfrac{-1}{320}$.

3. $\text{adj}A = \dfrac{-1}{320}A^{-1}$.

حل التمرين 10:

1. $A^{-1} = \frac{1}{1-a^2}\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ -a & 1+a^2 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$.
2. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$,

$B^{-1} = \frac{100}{63}\begin{pmatrix} 35 & -175 & 161 \\ -175 & 911 & -850 \\ 161 & -850 & 800 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 55.6 & -277.8 & 255.6 \\ -277.8 & 1446.0 & -1349.2 \\ 255.6 & -1349.2 & 1269.8 \end{pmatrix}$.

حل التمرين 11:

1. $B = \text{adj}A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ و محدد المصفوفة A هو 2.
2. معكوس المصفوفة A هو $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.
3. $C = \text{adj}B = |A|A = 2A$.

3.0 إصلاح تمارين الباب االثالث

حل التمرين 1:

1. المصفوفة . $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & c-b-a \end{array}\right]$ هي صيغة درجية صفية للمصفوفة الموسعة للنظام.
   إذًا يكون النظام متسقا إذا و إذا فقط إذا $c-b-c=0$.
2. المصفوفة . $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2a-b \\ 0 & 0 & 0 & c+2a-2b \end{array}\right]$ هي صيغة درجية صفية للمصفوفة الموسعة للنظام.
   إذًا يكون النظام متسقا إذا و إذا فقط إذا $c+2a-2b$.

حل التمرين 2:

1. إذا كان $(1,-1,2)$ حلا للنظام الخطي إذا كان . $\begin{cases} a-b-6=-3 \\ -2+b+2=-1 \\ a-3-2c=-1 \end{cases}$
   إذًا $a=2$, $b=-1$ و $c=0$.
2. بما أن المحدد $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ فإن النظام له حل وحيد.

حل التمرين 3:

1.
2. المصفوفة الموسعة لهذا النظام هي

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right]$$

و المصفوفة $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & -4\\ 0 & 1 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right]$ هي صيغة درجية صفية لهذه المصفوفة. إذا
باستعمال طريقة جاوس، النظام له حل وحيد وهو $x = 1, y = -1, z = 3$.
و الصيغة الدرجية الصفية المختزلة لهذه المصفوفة هي . $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right]$ و باستعمال
طريقة جاوس جوردن، النظام له حل وحيد وهو $x = 1, y = -1, z = 3$.

.3

.4 المصفوفة $\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-4\end{array}\right]$ هي صيغة درجية صفية لهذه المصفوفة.
النظام غير متسق إذا كان $m \neq 4$.
إذا كانت $m = 4$ النظام له عدد غير منته من الحلول.

$$\{(\frac{5}{7} - \frac{9}{7}z + \frac{1}{7}t, \frac{1}{7} + \frac{8}{7}z - \frac{4}{7}t, z, t) \in \mathbb{R}^4\}.$$

.5 المصفوقة الموسعة للنظام هي: $\left[\begin{array}{ccc|c}0 & -2 & 3 & 0\\ 2 & -4 & 2 & 0\\ -1 & -2 & 5 & 0\\ 1 & -2 & -1 & 1\end{array}\right]$

و المصفوفة $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$ هي صيغة درجية صفية لهذه المصفوفة و الحل
الوحدي للنظام هو $(2, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$.

.6 المصفوقة الموسعة للنظام هي: $\left[\begin{array}{cccc|c}0 & 1 & 3 & -2 & 0\\ 2 & 1 & -4 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 2 & -1 & 1\end{array}\right]$

و المصفوفة $\left[\begin{array}{cccc|c}2 & 1 & -4 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 6 & -4 & 1\end{array}\right]$ متكافئة مع هذه المصفوفة و النظام غير متسق.

.7 المصفوقة الموسعة للنظام هي: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & a+3 & 3 & 1 \\ 1 & 3-a & a-2 & -1 \end{array}\right]$

و المصفوفة $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{array}\right]$ متكافئة مع هذه المصفوفة.

إذا كانت $a = 2$ النظام له عدد لا نهائي من الحلول $S = \{(z, 1-z, z),\ z \in \mathbb{R}\}$.

إذا كانت $a = 1$ النظام غير متسقز

إذا كانت $a \neq 1$ و $a \neq 2$، النظام له حل وحيد $S = \{(\frac{1+a}{a-1}, \frac{1}{1-a}, 0),\ z \in \mathbb{R}\}$.

.8 المصفوقة الموسعة للنظام هي: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 01 & -1 & & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & & & 0 \end{array}\right]$

و المصفوفة $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 01 & -1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 \end{array}\right]$ هي صيغة درجية صفية لهذه المصفوفة و

الحل الوحدي للنظام هو الحل التافه.

حل التمرين 4:

.1 الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة الموسعة للنظام هي: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ & & & & 0 \end{array}\right]$.

و النظام له حل وحيد $(2, 1, 3, -2)$.

2. الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة الموسعة للنظام هي: $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & \frac{3}{4}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{4}\end{array}\right]$.

و النظام له حل وحيد $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{13}{4})$.

3. الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة الموسعة للنظام هي: $\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$.

و النظام له عدد لا نهائي من الحلول $\{(-1+t, 0, 0, t), t \in \mathbb{R}\}$.

حل التمرين 5:

الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة الموسعة للنظام هي: $\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & -1 & 8\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & m^2-1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$.

و النظام غير متسق إذا كانت $m^2 - 1 \neq 0$.

و إذا كانت $m^2 - 1 = 0$ النظام له عدد لا نهائي من الحلول $\{(8+z+t, -3-t, z, t);\ z, t \in \mathbb{R}\}$.

حل التمرين 6:

المصفوفة $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -m & 2\\ 0 & 2-m & 2m-1 & -5\\ 0 & 0 & 4m & -2(m+2)\end{array}\right]$.

1. إذا كانت $m = 2$ النظام له عدد لا نهائي من الحلول.
2. حلول النظام إذا كانت $m = 2$ هي: ??
3. إذا كانت $m = 0$ النظام غير متسق. ??

حل التمرين 7:

1. المصفوفة الموسعة للنظام هي: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right]$

الصيغة الدرجية الصفية:

$-3R_{1,3}$,$1R_{1,2}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array}\right]$

:$10R_{2,3}$,$-R_2$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -32 & -104 \end{array}\right]$

:$-\frac{1}{32}r_3$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{4} \end{array}\right]$

:$(-1)R_{2,1}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 17 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{4} \end{array}\right]$

:$3R_{3,2}, (-5)R_{3,1}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{4} \end{array}\right]$.

الحل هو $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{3}{4}$, $z = \frac{13}{4}$.

2. المصفوفة الموسعة للنظام هي: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right]$.

الصيغة الدرجية الصفية:

:$(-3)R_{1,4}$,$1R_{1,3}$,$(-2)R_{1,2}$ $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$R_{2,3}$, $(-3)R_{2,3}$, $(-3)R_{2,4}$: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$1R_{2,1}$: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

الحل هو $x = u - 1$, $y = 2s$, $z = s$, $t = u$.

3. الحل هو $x = -3t$, $y = -4t$, $z = 7t$.
4. النظام غير متسق.
5. $x = -4$, $y = 2$, $z = 7$.
6. $x = 3 + 2t$, $y = t$.
7. المصفوفة الموسعة للنظام هي: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 2 & 1 & 3 & c \end{array}\right]$.

الصيغة الدرجية الصفية: $(-1)R_{1,2}$, $(-2)R_{1,3}$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & -1 & b-a \\ 0 & -1 & -1 & c-2a \end{array}\right]$.

$(-1)R_2$, $1R_{2,3}$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & c-a-b \end{array}\right]$.

إذا لا يكون النظام متسقا إلا إذا كان $-a - b + c = 0$.

حل التمرين 8:

1. $(1, -1, 2)$ هو حل للنظام الخطي إلا و إذا كان $a = 2$, $b = -1$ و $c = 0$.
2. بما أن مصفوفة النظام الخطي

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = -3 \\ -2x + y + z = -1 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$

لها معكوس إذا النظام الخطي له حل وحيد.

(محدد المصفوفة يساوي 16)

حل التمرين 9:

أ) $B = \text{adj}A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ و $|A| = 2$.

ب) $A^{-1} = \frac{1}{2}B$.

حل التمرين 10:

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$A(A-B) = 2I_3$.

$A^{-1} = \frac{1}{2}(A-B)$.

حل التمرين 11:

المصفوفة الموسعة

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 14 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

إذا $x = 6,\ y = 1,\ z = 3,\ t = -2$.

4.0 إصلاح تمارين الباب االرابع

حل التمرين 1:

المجموعة E_1 هي فضاء جزئي لأن $E_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 : AX = 0\}$، $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 \end{pmatrix}$.

المجموعة E_2 ليست فضاء جزئي لأن $(1,0,1) \in E_2$ و $(1,0,-1) \in E_2$ ولكن $(1,0,1)+(1,0,-1) = (2,0,0) \notin E_2$.

المجموعة E_1 هي فضاء جزئي لأن $E_3 = \{X \in \mathbb{R}^3 : AX = 0\}$، $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

المجموعة E_4 هي فضاء جزئي لأن $E_4 = \{(0,0,0)\}$.

المجموعة E_5 هي فضاء جزئي لأن $E_5 = \{X \in \mathbb{R}^3 : AX = 0\}$، $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

المجموعة E_6 ليست فضاء جزئيا لأن $(1,0,0) \in E_6$ و $(0,1,0) \in E_6$ ولكن $(1,0,0)+(0,1,0) = (1,1,0) \notin E_6$.

المجموعة E_7 هي فضاء جزئي لأن $E_7 = \{X \in \mathbb{R}^4 : AX = 0\}$، $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

المجموعة E_8 ليست فضاء جزئيا لأن $(0,0,0) \notin E_8$.

حل التمرين 2:

حتى يكون $(x,1,y,1) \in \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ لا بد أن يكون النظام الخطي $AX = B$ متسقا حيث

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$. ولكن النظام ليس متسقا لأن المعادلتين الثانية والرابعة

$2a - 2b = 1,\ 4a - 4b = 1$ لا يمكن أن تكونا صائبتين.

حتى يكون $(x,1,1,y) \in \langle e_1, e_2 3 \rangle$ لا بد أن يكون النظام الخطي $AX = B$ متسقا حيث

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$ و $$B = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \\ y \end{pmatrix}.$$

وهذا النظام له حل وحيد. و في هذه الحالة $x = \frac{1}{3}$ و $y = 2$.

حل التمرين 3:

حتى يكن المتجه (a, b, c) في الفضاء E لا بد أن يكون النظام الخطي التالي متسقا:

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ 3x - y = b \\ -x - 2y = c \end{cases}$$

و هذا النظام متكافئ مع النظام التالي

$$\begin{cases} x + 2y = -c \\ -3y = a + 2c \\ -7y = b + 3c \end{cases}.$$

هذا النظام يكون متسقا إلا و إذا كان $7a - 3b + 5c = 0$. و نلاحظ أن إحداثيات المتجهات $(2, 3, -1)$, $(1, -1, -2)$ تحقق هذه المعادلة. إذاً $F \subset E$. وبما أن المتجهين $(2, 3, -1)$, $(1, -1, -2)$ مستقلين خطيا و المتجهين $(3, 7, 0), (5, 0, -7)$ مستقلين خطيا، إذاً $\dim E = \dim F = 2$ و $E = F$.

حل التمرين 4:

حتى يكون المتجه $v = (-2, x, y, 5)$ في الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^4$ المولد بالمتجهات $u = (1, -1, 1, 2)$ و $v = (-1, 2, 3, 1)$. لا بد أن يكون النظان الخطي $AX = B$ متسقا، حيث

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$ و $$B = \begin{pmatrix} -2 \\ x \\ y \\ 5 \end{pmatrix}.$$ و هذا النظام متسق إلا و إذا كان $3 = x - 2 = \frac{y+2}{4}$. إذاً $x = 5$ و $y = 10$.

حل التمرين 5:

1. لتكن المصفوفة A والتي صفوفها أحداثيات المتجهات e_1, e_2, e_3.
الفضاء $\text{Vect}\{e_1, e_2, e_3\}$ يمثل الفضاء الصفي للمصفوفة A.
الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة A هي $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
إذًا $\dim\text{Vect}\{e_1, e_2, e_3\} = 2$.
يكون $\text{Vect}\{e_1, e_2, e_3\} = \text{Vect}\{(1,1,0,0), (-1,1,-4,2)\}$ إلا و إذا كانت رتبة المصفوفة التالية B هي 2, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة B هي $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
إذا
$\text{Vect}\{e_1, e_2, e_3\} = \text{Vect}\{(1,1,0,0), (-1,1,-4,2)\}$.
2. $(1,1,0,0) = e_1 + e_2$, $2(1,1,0,0) = e_3 - e_2$. إذا $(1,1,0,0) \in \text{Vect}\{e_1, e_2\} \cap \text{Vect}\{e_2, e_3, e_4\}$.
3. $(1,1,0,0) \in \text{Vect}\{e_1, e_2\} \cap \text{Vect}\{e_2, e_3, e_4\}$ و $e_2 \in \text{Vect}\{e_1, e_2\} \cap \text{Vect}\{e_2, e_3, e_4\}$. إذا $\dim\text{Vect}\{e_1, e_2\} \cap \text{Vect}\{e_2, e_3, e_4\} = 2$ و

$$\dim\text{Vect}\{e_1, e_2\} + \text{Vect}\{e_2, e_3, e_4\} \leq 3$$

إذا $\text{Vect}\{e_1, e_2\} + \text{Vect}\{e_2, e_3, e_4\} \neq \mathbb{R}^4$.

حل التمرين 6:

بما أن المتجهان u_1, u_2 مستقلان خطيا و كذلك المتجهان u_3, u_4 مستقلان خطيا فإن $\dim E = \dim F = 2$.

$F=G$ إلا و إذا كانت رتبة المصفوفة التالية 2، $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\\1&1&0\\3&8&5\end{pmatrix}$.

الصيغة الدرجية الصفية المختزلة لهذه المصفوفة هي $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

إذا $F=G$.

حل التمرين :7

المصفوفة التي أعمدتها المتجهات $(1,0,1)=u_1$، $(-1,-1,2)=u_2$ و $=u_3$ $(-2,1,-2)$ هي $A=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&-1&1\\1&2&-2\end{pmatrix}$.

بما أن $|A|=-3$ فإن $u=(1,0,1)$، $v=(-1,-1,2)$ و $w=(-2,1,-2)$ تكون أساسا.

إذا كان $X=au+bv+cw$ فإن $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=A^{-1}X=\begin{pmatrix}2y+z\\\frac{-x+z}{3}\\\frac{-x+3y+z}{3}\end{pmatrix}$.

حل التمرين :8

يمثل S أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$ إلا وإذا كان

$$\begin{vmatrix}1&0&t\\1&1&t\\t&0&1\end{vmatrix}=1-t^2\neq 0$$

إذا S أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$ إلا وإذا كان $t\neq\pm1$.

حل التمرين :9

بما أن محدد المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$ يساوي -3 فإن S تمثل أساسا للفضاء

.$\mathbb{R}^3$

المتجهات e_1, e_2, e_3 تمثل الأساس المعتاد C للفضاء $\mathbb{R}^3$.

معكوس المصفوفة A هي المصفوفة $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

إذًا $[e_1]_S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $[e_2]_S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $[e_3]_S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

حل التمرين 10:

الفضاء المولد بالمتجهات هو الفضاء الصفي للمصفوفة التالية $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة هي $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$. إذا بعد هذا الفضاء هو 3

حل التمرين 11:

1. ${}_CP_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ و ${}_BP_C$ هي معكوس المصفوفة ${}_CP_B$ إذا ${}_BP_C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $[v]_B = {}_BP_C[v]_C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

حل التمرين 12:

الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ هي $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

إذا $\{v_1, v_3, v_4\}$ هو أساس للفضاء V.

حل التمرين 13:

$v \in \text{Vect}(e_1, e_2)$ متكافئ مع وجود $a, b \in \mathbb{R}$ و $v = ae_1 + be_2 \iff$

$$\begin{cases} -2 & = a - b \\ x & = -a + 2b \\ y & = a + 3b \\ 3 & = 2a + b \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{7}{3} \\ x = \frac{13}{3} \\ y = \frac{22}{3} \end{cases}$$

إذا $(x, y) = (\frac{13}{3}, \frac{22}{3})$.

حل التمرين 14:

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ و المصفوفة $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

E هي الفضاء الصفي للمصفوفة A و F هي الفضاء الصفي للمصفوفة B.

الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفات A و B هي على التوالي $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

و المصفوفة $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

إذا $\dim E = 3$, $\dim F = 2$.

حل التمرين 15:

المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ هي صيغة درجية صفية للمصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

إذا رتبة المصفوفة هي 3.

2. مصفوفة الوحدة هي صيغة درجية صفية للمصفوفة $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & 7 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

إذا رتبة المصفوفة هي 4.

3. المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ متكافئة مع المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

إذا رتبة المصفوفة هي 2.

4. المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -8 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 11 \end{pmatrix}$ متكافئة مع المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

إذا رتبة المصفوفة هي 3.

5. المصفوفة $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -5 & -7 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 & b \end{pmatrix}$ متكافئة مع المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & a & -2 & b \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 8-3a & 11+b-3a \end{pmatrix}$.

إذا كان $a \neq \frac{8}{3}$ فرتبة المصفوفة هي 3.

إذا كان $a = \frac{8}{3}$ و $b \neq -3$ فرتبة المصفوفة هي 3.

إذا كان $a = \frac{8}{3}$ و $b = -3$ فرتبة المصفوفة هي 2.

5.0 إصلاح تمارين الباب الخامس

حل التمرين 1:

ليكن الفضاء الجزئي F من $\mathbb{R}^4$ المولد بالمتجهات
$$S = \{u = (1,1,0,0),\ v = (1,0,-1,0),\ w = (0,0,1,1)\}.$$

1. لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ والتي أعمدتها u, v, w.

الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة A هي $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ وهذا يبين أن S هو أساس للفضاء الجزئي F.

2. $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$، $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2,0)$، $u_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}(1,-1,1,3)$.
$\{u_1, u_2, u_3\}$ هو أساس عياري متعامد للفضاء الجزئي F

حل التمرين 2:

1.
- $\langle (a,b)+(c,d),(x,y)\rangle = (a+c)x + (a+c)y + (b+d)x + 2(b+d)y = \langle (a,b),(x,y)\rangle + \langle (c,d),(x,y)\rangle$
- $\langle (a,b),(x,y)\rangle = ax + ay + bx + 2by = \langle (x,y),(a,b)\rangle$
- $\langle \lambda(a,b),(x,y)\rangle = \lambda ax + \lambda ay + \lambda bx + 2\lambda by = \lambda\langle (a,b),(x,y)\rangle$
- $\langle (a,b),(a,b)\rangle = a^2 + 2ab + 2b^2 = (a+b)^2 + b^2 \geq 0$
- $\langle (a,b),(a,b)\rangle = 0 \iff a+b=0=b \iff a=b=0$

2. المتجه u_1 عياري والمتجه الثاني هو $v_2 = (1,0)$ إذا $\{v_1 = (1,-1), v_2 = (1,0)\}$ هو أساس عياري و متعامد.

6.0 إصلاح تمارين الباب االسادس

حل التمرين 1:

1. الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A هي $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. إذا $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ هو أساس للفضاء العمودي للمصفوقة A.
2. نستنتج من السؤال الأول أن رتبة المصفوفة A هي 2. إذا صفرية المصفوفة A هي 2.

حل التمرين 2:

حتى تكون المصفوفات A و B متشابهة لا بد أن يوجد أساس (X_1, X_2, X_3, X_4) للفضاء $\mathbb{R}^4$ بحيث $AX_1 = X_1, \quad AX_2 = 2X_1 + X_2, \quad AX_3 = 3X_1 + 2X_2 + X_3,$ $AX_4 = 4X_1 + 3X_2 + 2X_3 + X_4.$ يمكن أن نأخذ $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$، $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$، $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$، $X_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

إذاً المصفوفتين A و B متشابهتين. والمصفوفة $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7.0 إصلاح تمارين الباب االسابع

حل التمرين 1:

كثيرة الحدود الميزة للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2.$$

إذاً المصفوفة ليست قابلة للإستقطار.

كثيرة الحدود الميزة للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} -10 & -6 \\ 18 & 11 \end{pmatrix}$ هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -10-\lambda & -6 \\ 18 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(1+\lambda).$$

إذاً المصفوفة قابلة للإستقطار.
$E_{-1} = \langle(-2,3)\rangle$ و $E_2 = \langle(1,-2)\rangle$.
المصفوفة القطرية هي $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
و المصفوفة P هي $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 4 \\ 2 & 1-\lambda & 5 \\ -4 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

إذًا المصفوفة ليست قابلة للإستقطار.

كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

$E_1 = \langle (0,1,0), (1,0,-1) \rangle$ و $E_2 = \langle (0,1,-1) \rangle$. إذًا المصفوفة قابلة للإستقطار.
المصفوفة القطرية هي $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
و المصفوفة P هي $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

كثيرة الحدود الميزة للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 3-\lambda & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)^2.$$

تكون المصفوفة قابلة للاستقطار إذا وإذا فقط إذا بعد الفضاء المميز E_2 يساوي 2.
$E_2 = \langle (1,1,-1,0), (-1,2,0,1) \rangle$. إذًا المصفوفة A قابلة للاستقطار.
$E_5 = \langle (1,0,0,0) \rangle$ و $E_3 = \langle (3,2,0,0) \rangle$.
المصفوفة القطرية هي $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

و المصفوفة P هي $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

كثيرة الحدود الميزة للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-5).$$

$E_1 = \langle (1,0,1),(-2,1,0)\rangle$,$E_5 = \langle (1,1,-1)\rangle$, إذاً المصفوفة A قابلة للاستقطار.

المصفوفة القطرية هي $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ و المصفوفة P هي $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 16 \\ 2 & 5-\lambda & 8 \\ -2 & -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)^2(\lambda-1).$$

$E_3 = \langle (1,-1,0),(4,0,-1)\rangle$,$E_1 = \langle (2,1,-1)\rangle$, إذاً المصفوفة A قابلة للاستقطار.

المصفوفة القطرية هي $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ و المصفوفة P هي $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1-\lambda & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^3.$$

تكون المصفوفة قابلة للاستقطار إذا وإذا فقط إذا بعد الفضاء المميز E_2 يساوي 3.
$E_2 = \langle(-1,1,0,2),(-1,0,1,0)\rangle$. إذًا المصفوفة ليست قابلة للاستقطار.

كثيرة الحدود الميزة للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(3-\lambda))(4+\lambda).$$

إذًا المصفوفة A قابلة للاستقطار.
المصفوفة القطرية هي $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.
$E_1 = \langle(1,0,3)\rangle$, $E_3 = \langle(3,2,-1)\rangle$, $E_{-4} = \langle(3,-5,-1)\rangle$.
و المصفوفة P هي $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

كثيرة الحدود الميزة للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3-\lambda & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^4.$$

إذًا المصفوفة ليست قابلة للاستقطار.

كثيرة الحدود الميزة للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ هي $q_A(\lambda) = \lambda^4$ و بالتالي المصفوفة ليست قابلة للاستقطار.

كثيرة الحدود الميزة للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -\lambda & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3(1-\lambda)(1+\lambda).$$

تكون المصفوفة قابلة للاستقطار إذا وإذا فقط إذا بعد الفضاء المميز E_2 يساوي 3.

$E_2 = \langle (1,1,0,0), (1,0,0,1) \rangle$. إذًا المصفوفة ليست قابلة للاستقطار.

حل التمرين 2:

1.

$$|\lambda I - A| = (1-\lambda)^2(1+\lambda)$$

إذًا 1 و -1 هي قيم مميزة للمصفوفة A

2. التعدد الجبري للقيمة المميزة 1 هي 2 و التعدد الجبري للقيم المميزة -1 هي 1.

3. $\begin{cases} m(x+y) = 0 \\ y+z=0 \end{cases} \iff (x,y,z) \in E_1$.

إذا كانت $m = 0$، $E_1 = \{(x,y,-y);\ x,y \in \mathbb{R}\}$ وبعده يساوي 2. و في هذه الحالة تكون المصفوفة قابلة للإستقطار.

وإذا كانت $m \neq 0$، $E_1 = \{(x,-x,x);\ x \in \mathbb{R}\}$ وبعده يساوي 1. و في هذه الحالة تكون المصفوفة غير قابلة للإستقطار.

4. أ) إذا كانت $m = 0$، $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ و $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ب) إذا كانت $m = 0$

$$A^{1437} = PDP^{-1} = A.$$

حل التمرين 3:

كثيرة الحدود الميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(1+\lambda))(2+\lambda).$$

إذًا المصفوفة A قابلة للاستقطار.

المصفوفة القطرية هي $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

$E_0 = \langle(1,-1,0,0)\rangle$, $E_1 = \langle(1,0,0,0)\rangle$,

$E_{-1} = \langle(-1,2,-1,0)\rangle$, $E_{-2} = \langle(1,-3,3,-1)\rangle$.

و المصفوفة P هي $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

حل التمرين 4:

1. $q_A(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda-2)(1+\lambda)^2$،
إذاً (-1) و 2 هي قيم مميزة للمصفوفة A.
2. $\mathbf{3x - 5y + 3z = 0} \iff (\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) \in \mathbf{E_{-1}}$ و $v_1 = (1,0,-1), v_2 =$
$(5,3,0)$ يمثل أساسا للفضاء E_{-1}.
$\mathbf{x = y = z} \iff (\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) \in \mathbf{E_2}$
و $v_3 = (1,1,1)$ يمثل أساسا للفضاء $\mathbf{E_2}$
3. أ) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $\mathbf{D} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
ب) $\mathbf{A^9 = PD^9P^{-1}}$.