جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الجبر الخطي و تطبيقاته

مذكرة المقرر 246 ريض

1442-1443

د المنجي أحمد بلال
أستاذ بقسم الرياضيات
mblel@ksu.edu.sa
http://fac.ksu.edu.sa/mblel

المحتويات

1 المصفوفات 5
1.1 المصفوفات والعمليات عليها 5
2.1 العمليات على المصفوفات 6
3.1 منقول المصفوفة 9
4.1 العمليات الأولية الصفية على المصفوفات 10
1.4.1 خوارزمية 14
5.1 معكوس المصفوفة 15
1.5.1 خوارزمية 18
6.1 التمارين 20

2 المحددات 25
1.2 تعريف المحدد 25
2.2 خواص المحددات 28
3.2 المصفوفة المصاحبة 32
4.2 التمارين 34

3 أنظمة المعادلات الخطية 39
1.3 مدخل للأنظمة الخطية 39
2.3 طريقة جاوس و جاوس جوردن 40
1.2.3 طريقة جاوس 41
2.2.3 طريقة جاوس جوردن 41
3.3 الأنظمة الخطية المتجانسة 41
4.3 قاعدة كرامر 42
5.3 التمارين 42

4 فضاءات المتجهات 47
1.4 تعريف فضاء المتجهات 47
2.4 الفضاءات الجزئية 48
3.4 التركيبات الخطية والمجموعات المولدة 49
4.4 الإرتباط الخطي والإستقلال الخطي 50
5.4 الأساس والبعد 52
6.4 الإحداثيات وتغيير الأساس 55
7.4 رتبة المصفوفة 56
8.4 التمارين 60

5 فضاءات الضرب الداخلي 67
1.5 تعريف الضرب الداخلي 67
2.5 التعامد 68
3.5 الأساسات العيارية 70
4.5 التمارين 72

6 التحويلات الخطية 75
1.6 تعريف التحويلات الخطية 75
2.6 نواة وصورة التحويل الخطي 77
3.6 التمارين 79

7 القيم والمتجهات المميزة والإستقطار 85
1.7 القيم والمتجهات المميزة 85
2.7 الإستقطار 86
3.7 التمارين 88

باب 1

المصفوفات

1.1 المصفوفات والعمليات عليها

تعريف 1.1.1

المصفوفة هي عبارة عن جدول من الأعداد الحقيقية، ويسمى كل سطر من عناصر المصفوفة صفا (row) ويسمى كل عمود من عناصر المصفوفة عمودا (column).
إذا كانت $(a_{j,k})$ هي عناصر المصفوفة A فإننا نكتب

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

ونقول أن المصفوفة A هي من الدرجة (m,n) حيث m هو عدد الصفوف و n هو عدد الأعمدة.
في بعض الأحيان نرمز الصيغة المختزلة $A=(a_{j,k})$ لكتابة المصفوفة.

تعريف 2.1.1

1. نقول إن مصفوفة أنها مربعة إذا كان عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها أي من الدرجة (n, n).
2. نقول إن مصفوفة أنها صفية إذا كان لها صف واحد أي من الدرجة $(1, n)$ و في بعض الأحيان تسمى متجه صفي.
3. نقول إن مصفوفة أنها عمودية إذا كان لها عمود واحد (أي من الدرجة $(n, 1)$) و في بعض الأحيان تسمى متجه عمودي.
4. المصفوفة الصفرية هي المصفوفة التي جميع عناصرها اصفار ويرمز لها بالرمز (0).
5. مصفوفة الوحدة هي المصفوفة المربعة التي عناصرها القطرية تساوي واحد وبقية العناصر كلها اصفار ويرمز لها بالرمز I_n إذا كانت من الدرجة (n, n).
6. المصفوفة القطرية هي المصفوفة المربعة و جميع عناصرها أصفارا ما عدا العناصر الواقعة على القطر فيكون أحدها على الأقل مغايراً للصفر مثال $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
7. نقول أن مصفوفة مربعة أنها مثلثية علوية إذا كان كل عناصرها التي تقع أسفل القطر أصفارا. و نقول أن مصفوفة مربعة أنها مثلثية سفلوية إذا كان كل عناصرها التي تقع أعلى القطر أصفارا.

2.1 العمليات على المصفوفات

تعريف 1.2.1

1. الجمع:
لتكن $A = (a_{j,k})$ و $B = (b_{j,k})$ مصفوفتين من الدرجة (m, n).
نعرف المصفوفة
$$A + B = (a_{j,k} + b_{j,k})$$

و تسمى مصفوفة الجمع بين المصفوفة A و المصفوفة B.

2. الضرب بعدد حقيقي:

لتكن $A = (a_{j,k})$ مصفوفتين من الدرجة (m, n) و λ عدد حقيقي.

نعرف المصفوفة

$$\lambda A = (\lambda a_{j,k})$$

و تسمى مصفوفة ضرب المصفوفة A بالعدد الحقيقي λ.

مثال 1 :

1. إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$، فإن $A + B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$، فإن $2A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}$.

تعريف 2.2.1

إذا كانت $A = (a_1, \dots, a_n)$ متجها صفيا و $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ متجها عموديا. فنعرف الضرب الداخلي الإقليدي للمتجهين A و B على النحو التالي

$$AB = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

تعريف 3.2.1

إذا كانت $A=(a_{j,k})$ مصفوفة من الدرجة (m,n) و $B=(b_{j,k})$ مصفوفة من الدرجة (n,p) فإن $AB=(c_{j,k})$ مصفوفة من الدرجة (m,p) حيث $c_{j,k}$ هو نتيجة الضرب الإقليدي للصف j من المصفوفة A مع العمود k من المصفوفة B.

$$c_{j,k}=\sum_{i=1}^{n} a_{j,i}b_{i,k}.$$

مثال 2 :

إذا كانت $A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\0&1&5\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&1&3\\-1&2&0\end{pmatrix}$، فإن $AB=\begin{pmatrix}7&3&7\\-3&11&3\end{pmatrix}$.

ملاحظات 1 :

1. عملية الضرب ليست عملية تبديلية $AB\neq BA$ عموما. فمثلا إذا كانت $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$، فإن $AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ و $BA=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.
2. إذا كانت $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$، فإن $A^2=0$.

العمليات السابقة على المصفوفات تحقق ما يلي::

نظرية 4.2.1

إذا كانت A,B,C مصفوفات في $M_{m,n}(\mathbb{R})$ و ليكن $a,b\in\mathbb{R}$، فإن

1. $A+B=B+A$,
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$,
3. $a(A+B)=aA+aB$,
4. $(a+b)A=aA+bA$,
5. $(ab)A=a(bA)$,

6. $A+0=A$, حيث 0 المصفوفة الصفرية في $M_{m,n}(\mathbb{R})$.
7. $I_mA=A$ و $AI_n=A$,
8. إذا كانت $D\in M_{n,p}(\mathbb{R})$، $E\in M_{p,q}(\mathbb{R})$ و $F\in M_{r,m}(\mathbb{R})$، فإن $A(DE)=(AD)E$،
9. $(A+B)D=AD+BD$،
10. $F(A+B)=FA+FB$.

ملاحظة 2 :
لتكن $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ و $B\in M_{n,p}(\mathbb{R})$. إذا كانت $B_1,\ldots,B_p$ أعمدة المصفوفة B، فإن أعمدة المصفوفة AB هي $A.B_1,\ldots,A.B_p$.

إذا كانت
$$B=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \ldots & B_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \ldots & b_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \ldots & b_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$
، فإن
$$AB=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} AB_1 & AB_2 & \ldots & AB_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \ldots & c_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \ldots & c_{m,p} \end{pmatrix} \end{array}$$
،

حيث

$$c_{j,k}=\sum_{i=1}^{n}a_{j,i}b_{i,k}.$$

3.1 منقول المصفوفة

تعريف 1.3.1

لتكن $A=(a_{j,k})$ مصفوفة من الدرجة (m,n). يعرف منقول المصفوفة A المصفوفة من الدرجة (n,m) والتي نحصل عليها من A بحيث تكون صفوفها هي أعمدة A على التوالي. و نرمز بها A^T.

تعريف 2.3.1

نقول أن مصفوفة مربعة أنها متماثلة إذا كان $A = A^T$.

نظرية 3.3.1

إذا كانت $A = (a_{j,k})$ و $B = (b_{j,k})$ مصفوفات من الدرجة (m, n) فإن

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(kA)^T = kA^T$.
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$.
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

4.1 العمليات الأولية الصفية على المصفوفات

تعريف 1.4.1

العمليات الأولية على الصفوف هي

1. تغيير ترتيب صفين من المصفوفة
2. ضرف صف بعدد غير صفري
3. ضرب صف بعدد و إضافة الناتج إلى صف آخر.

تعريف 2.4.1

نقول أن مصفوفتين متكافئتين صفيا إذا حصلنا على إحداها من الأخرى بعد إجراء عدد منته من العمليات الأولية على الصفوف. و نكتب $A \sim B$.
نستخدم الرموز التالية

1. $R_{j,k}$ وتعني تبادل الصفين j و k.
2. rR_j و تعني ضرب الصف j بالعدد r.
3. $rR_{j,k}$ و تعني ضرب الصف j بالعدد r و إضافة الناتج للصف k.

تعريف 3.4.1

نقول أن مصفوفة A هي على صيغة درجية صفية
(row echelon form) إذا تحققت الشروط التالية
1) كل صف غير صفري يكون أول عنصر غير صفري هو 1 و يسمى العنصر المتقدم.
2) الصفوف الصفرية إن وجدت تكون في آخر المصفوفة.
3) إذا وجد صفان غير صفريان فإن العنصر المتقدم في الصف الأعلى يكون على يسار العنصر المتقدم في الصف الأسفل.

تعريف 4.4.1

نقول أن مصفوفة A هي على صيغة درجية صفية مختزلة
(reduced row echelon form) إذا تحققت الشروط التالية
1. A على صيغة درجية صفية
2. جميع عناصر الأعمدة التي تحوي على عنصر متقدم أصفارا باستثناء العنصر المتقدم.

مثال 3 :

1. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ هذه المصفوفة على صيغة درجية صفية و لكن غير مختزلة.

2. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 5\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$
هذه المصفوفة على صيغة درجية صفية مختزلة.

3. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 1 & 5\\3 & 0 & 0\end{pmatrix}$ هذه المصفوفة ليست على صيغة درجية صفية.

مثال 4 :

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\3 & 1 & 2\\4 & 1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{-1R_{1,2}} \begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\1 & -2 & 3\\4 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{1,2}} \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\2 & 3 & -1\\4 & 1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_{1,2},-4R_{1,3}} \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 7 & -7\\0 & 9 & -12\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{7}R_2} \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 1 & -1\\0 & 9 & -12\end{pmatrix} \xrightarrow{-9R_{2,3}} \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}R_3} \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{-3R_{3,1},1.R_{3,2}} \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{2R_{2,1}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & -3 & 4 & -2 & 0\\3 & -1 & 2 & -3 & 2\\-2 & -3 & 4 & 3 & 2\\-3 & 1 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)R_{1,2}} \begin{pmatrix}2 & -3 & 4 & -2 & 0\\1 & 2 & -2 & -1 & 2\\-2 & -3 & 4 & 3 & 2\\-3 & 1 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{1,2}} \begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & -1 & 2\\2 & -3 & 4 & -2 & 0\\-2 & -3 & 4 & 3 & 2\\-3 & 1 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)R_{1,2}} \begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & -1 & 2\\0 & -7 & 8 & 0 & -4\\-2 & -3 & 4 & 3 & 2\\-3 & 1 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2R_{1,3},3R_{1,4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & -6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{2,3},1R_{2,4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{7R_{2,3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 7 & 38 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{3,4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 7 & 38 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-4R_{3,4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3,\frac{1}{7}R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{26}{7} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2R_{2,1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{26}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_{3,1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{26}{7} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3R_{4,1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{29}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{26}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)R_{4,2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{29}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{16}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{26}{7} \end{pmatrix}$$

يمكن تجنب الكسور كما يلي:

$$\xrightarrow{-4R_{3,4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{7R_1,7R_2} \begin{pmatrix} 7 & 14 & -14 & -7 & 14 \\ 0 & 7 & 0 & 7 & 42 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1R_{4,1},-1R_{4,2}} \begin{pmatrix} 7 & 14 & -14 & 0 & 40 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{7R_{3,1},-2R_{2,1}} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{7}R_1,\frac{1}{7}R_2,\frac{1}{2}R_3,\frac{1}{7}R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{29}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{16}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{26}{7} \end{pmatrix}$$

نظرية 5.4.1

كل مصفوفة متكافئة صفيا مع مصفوفة على صيغة درجية صفية مختزلة وحيدة.

1.4.1 خوارزمية

لتكن مصفوفة A غير صفرية من الدرجة (m,n).

1. نبحث على أول عمود غير صفري للمصفوفة و نحدد أول عنصر من الأعلى غير صفري على هذا العمود. عذا العنصر يسمى العنصر المتقدم.
2. نستعمل العمليات الأولية الصفية على المصفوفة حتى يكون هذا العنصر المتقدم 1.
3. نستعمل العمليات الأولية الصفية على المصفوفة حتى يكون كل العناصر التي تحت هذا العنصر المتقدم أصفار.
4. إذا كانت صفوف المصفوفة المتحصل عليها بالعمليات السابقة كلها أصفار، فهذه المصفوفة على صيغة درجية صفية مختزلة. و إذا لم يكن كذلك نطبق العمليات السابقة على المصفوفة المتكونة من الصفوف التي هي تحت الصف الذي يحتوي على هذا العنصر المتقدم.

مثال 5 :

لتكن $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}3 & -2 & 7 & 0 & 7\\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 6 & 0 & 7\end{pmatrix} \xrightarrow[(-3)R_{1,3},(-2)R_{1,4}]{R_{3,1},(-1)R_{1,2}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -2 & 4\\ 0 & -2 & 4 & -3 & 7\\ 0 & -2 & 4 & -2 & 7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-1)R_{3,4}]{(-2)R_{2,3}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_2,(-1)R_{3,4}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-2)R_{3,2},(-1)R_{3,1}]{(1)R_{4,3},(4)R_{4,2}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A هي $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5.1 معكوس المصفوفة

تعريف 1.5.1

نقول أن مصفوفة A من الدرجة n لها معكوس إذا وجدت مصفوفة B من الدرجة n بحيث

$$AB = BA = I_n.$$

ونرمز A^{-1} معكوس المصفوفة A.

نظرية 2.5.1

1. معكوس المصفوفة إذا وجد فهو وحيد.
2. معكوس المصفوفة I_n هي I_n.
3. إذا كان للمصفوفة A معكوس فإن A هي معكوس المصفوفة A^{-1} لأن $(A^{-1})^{-1} = A$.
4. إذا كان للمصفوفة A و B معكوس فإن

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

5. إذا كان للمصفوفات $A_1, \dots, A_k$ معكوس فإن المصفوفة $A_1 \dots \dots A_k$ لها معكوس و

$$(A_1 \dots \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \dots \dots A_1^{-1}.$$

6. إذا كان للمصفوفة A معكوس و $r \neq 0$ فإن rA لها معكوس و

$$(rA)^{-1} = \frac{1}{r}A^{-1}.$$

7. إذا كان للمصفوفة A معكوس فإن A^T لها معكوس و

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

مثال 6 :
لتكن A مصفوفة مربعة و تحقق $(A-I)^2 = 0$. إذاً المصفوفة A لها معكوس.
$A(2I - A) = I \iff (A-I)^2 = A^2 - 2A + I = 0$. إذاً $A^{-1} = 2I - A$.

مثال 7 :
لتكن $B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ و $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. نبحث على مصفوفة مربعة A من الدرجة 2 بحيث $(B^{-1}A)^{-1} = C$.
نستنتج مما سبق أن $A = BC^{-1} \iff A^{-1}B = C \iff (B^{-1}A)^{-1} = C$. إذاً

$C^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ و $A=BC^{-1}=\begin{pmatrix}11 & -26\\ -3 & 7\end{pmatrix}$.

تعريف 3.5.1

نقول أن مصفوفة E من الدرجة n هي مصفوفة أولية إذا كانت حاصل عملية أولية صفية واحدة على مصفوفة الوحدة I_n.

ملاحظات 3 :

1. لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$ و لتكن المصفوفة الأولية $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ والتي نحصل عليها بإجراء تبديل الصفين الثاني والثالث من مصفوفة الوحدة I_3. نلاحظ أن $R_{2,3}A=EA=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$.
2. كذلك إذا كانت المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 3 & 6\\ 1 & 4 & 4 & 0\end{pmatrix}$ و لتكن المصفوفة الأولية $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 5 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ والتي نحصل عليها بإجراء $5R_{1,3}$ على مصفوفة الوحدة I_3. نلاحظ أن $5R_{1,3}A=EA=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 3 & 6\\ 6 & 4 & 14 & 15\end{pmatrix}$.

و بصورة عامة لدينا المبرهنة التالية

نظرية 4.5.1

إذا كانت مصفوفة A من الدرجة (m,n) و كانت $E = R(I_m)$ مصفوفة أولية حيث R عملية أولية. إذًا $EA = R(A)$ هي المصفوفة التي نحصل عليها من A بإجراء العملية الصفية الأوليية R.

نظرية 5.5.1

إذا كانت E مصفوفة أولية فإن E لها معكوس ومعكوسها مصفوفة أولية.

برهان.
لتكن R العملية الأولية بحيث $RI_m = E$.

1. إذا كانت $R = rR_j$، حيث $r \neq 0$، فإن $E^{-1} = \frac{1}{r}R_jI_m$.
2. إذا كانت $R = rR_{j,k}$، حيث $j \neq k$، فإن $E^{-1} = (-r)R_{j,k}I_m$.
3. إذا كانت $R = R_{j,k}$، فإن $E^{-1} = R_{j,k}I_m$

$\square$

نظرية 6.5.1

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن العبارات التالية متكافئة

1. المصفوفة A لها معكوس.
2. الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A هي I_n.
3. يمكن كتابة A كحاصل ضرب عدد منته من المصفوفات الأولية.

1.5.1 خوارزمية

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n

1. استخدم العمليات الأولية الصفية لتحويل المصفوفة $[A|I]$ إلى صيغة درجية صفية مختزلة

$[B|C]$

2. إذا كانت $B = I_n$ فإن $C = A^{-1}$.
3. إذا كانت $B \neq I_n$ فإنه لا يوجد معكوس للمصفوفة A.

مثال 8 :

أوجد معكوس المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_{1,2},R_{2,3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_{1,2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-1)R_{2,3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2R_2,2R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-1)R_{3,1},2R_{3,2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال 9 :

أوجد معكوس المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&3&2&1&1&0&0&0\\2&3&3&1&0&1&0&0\\3&3&4&2&0&0&1&0\\1&1&1&1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[(-1)R_{1,4}]{(-2)R_{1,2},(-3)R_{1,3}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&3&2&1&1&0&0&0\\0&-3&-1&-1&-2&1&0&0\\0&-6&-2&-1&-3&0&1&0\\0&-2&-1&0&-1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-1)R_4]{(-1)R_2,(-1)R_3}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&3&2&12&1&0&0&0\\0&3&1&1&2&-1&0&0\\0&6&2&1&3&0&-1&0\\0&2&1&0&1&0&0&-1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-2)R_{2,3}]{(-1)R_{4,2}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&3&2&1&1&0&0&0\\0&1&0&1&1&-1&0&1\\0&0&0&-1&-1&2&-1&0\\0&2&1&0&1&0&0&-1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-2)R_{2,4}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&3&2&1&1&0&0&0\\0&1&0&1&1&-1&0&1\\0&0&0&-1&-1&2&-1&0\\0&0&1&-2&-1&2&0&-3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-2)R_{3,4}]{(1)R_{3,2},-1R_3}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&3&2&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&-1&1\\0&0&0&1&1&-2&1&0\\0&0&1&0&1&-2&2&-3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_{3,4}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&3&2&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&-1&1\\0&0&1&0&1&-2&2&-3\\0&0&0&1&1&-2&1&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-1)R_{4,1}]{(-3)R_{2,1},(-2)R_{3,1}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-2&3&-2&3\\0&1&0&0&0&1&-1&1\\0&0&1&0&1&-2&2&-3\\0&0&0&1&1&-2&1&0\end{array}\right].$$

6.1 التمارين

تمارين في الباب الأول

تمرين 1 :
أوجد الصيغة الدرجة الصفية المختزلة للمصفوفات التالية

$$A=\begin{pmatrix}-3&1&1&2\\1&-4&2&-1\\0&-1&-2&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\2&-4&2&1\\0&5&1&0\\0&0&2&-4\end{pmatrix}،$$

$$C=\begin{pmatrix}3&-2&7&0&7\\1&-1&3&-1&4\\1&0&1&1&0\\2&-2&6&0&7\end{pmatrix}.$$

تمرين 2 :
لتكن $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-1&-1\\-5&0&3\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}-2&1&1\\8&1&-5\\4&3&-3\end{pmatrix}$.
هل توجد مصفوفة X بحيث $XA=B$؟

تمرين 3 :
أوجد معكوس المصفوفات التالية $A=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\4&-5&3\\3&4&-2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&1\\2&1&2\end{pmatrix}$.

تمرين 4 :

1. أوجد معكوس المصفوفة التالية $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.
2. أوجد مصفوفة B مربعة من الدرجة 3 بحيث

$$2(B+I)^{-1}=A.$$

تمرين 5 :
أوجد المصفوفة A المربعة من الدرجة 3 بحيث

$$(A-I)^{-1}=2\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&1\\2&1&2\end{pmatrix}.$$

تمرين 6 :

أوجد جميع المصفوفات $A=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$ التي تحقق $AB=BA$ حيث $B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

تمرين 7 :

لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

1. احسب $(I-A)^3$ و A^2.
2. إستنتج أن A لها معكوس و أوجد هذا المعكوس.

تمرين 8 :

1. لتكن مصفوفتين مربعتين من الدرجة n غير صفريتين E و P حيث $E^2=0$ و $PE=EP$.
   احسب $(I-PE)(I+PE)$
   ماذا تستنتج؟
2. اعط مصفوفة غير صفرية E من الدرجة 2 حيث $E^2=0$.

تمرين 9 :

1. أوجد معكوس المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$.
2. لتكن A^{-1} $B=A\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&8\end{pmatrix}$ حيث A هي المصفوفة في الفقرة (1)
   أوجد مصفوفة C حيث $C^3=B$.

تمرين 10 :

لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&1\\2&-1&0\end{pmatrix}$ و المصفوفة $B=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\2&0&-1\\-2&1&4\end{pmatrix}$

أوجد قيمة العدد a بحيث $A^2 - AB + aI_3 = 0$ واستنتج معكوس المصفوفة A.

باب 2

المحددات

1.2 تعريف المحدد

تعريف 1.1.2

إذا كانت $A = (a_{j,k})$ مصفوفة مربعة من الدرجة n، نرمز للمصفوفة المربعة من الدرجة $n - 1$ و التي نحصل عليها من المصفوفة A بحذف الصف j والعمود k بالرمز $A_{j,k}$.

مثال 1 :

إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ فإن $A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

تعريف 2.1.2

1. إذا كانت مصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

نعرف محدد المصفوفة A بما يلي

$$|A| = det(A) = ad - bc.$$

2. إذا كانت مصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

نعرف محدد المصفوفة A بما يلي

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

3. إذا كانت مصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{n,1} & a_{m,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

نعرف محدد المصفوفة A بما يلي

$$\begin{aligned} |A| = \det(A) &= a_{1,1}\det A_{1,1} - a_{1,2}\det A_{1,2} + \dots + (-1)^{n+1} a_{1,n}\det A_{1,n} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det A_{1,j}. \end{aligned}$$

مثال 2 :

1. محدد المصفوفة $A=\begin{pmatrix}4&5\\2&3\end{pmatrix}$ هو

$$|A|=\det(A)=\begin{vmatrix}4&5\\2&3\end{vmatrix}=4.3-5.2=2.$$

2. محدد المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\\0&2&4\end{pmatrix}$ هو

$$|A|=det(A)=\begin{vmatrix}1&3&5\\2&4&6\\0&2&4\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}4&6\\2&4\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2&6\\0&4\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}2&4\\0&2\end{vmatrix}$$

3. محدد المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\\0&2&4\end{pmatrix}$ هو

$$|A|=\det(A)=\begin{vmatrix}1&3&5\\2&4&6\\0&2&4\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}4&6\\2&4\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2&6\\0&4\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}2&4\\0&2\end{vmatrix}=0.$$

4.

تعريف 3.1.2

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n, يسمى المحدد $\det A_{j,k}$ مصغر العنصر $a_{j,k}$ ويسمى العدد $C_{j,k}=(-1)^{j+k}\det A_{j,k}$ المعامل المصاحب للعنصر $a_{j,k}$

ملاحظات 4 :

1. إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n, محدد المصفوفة A يساوي

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}a_{1,j}C_{1,j}.$$

2. بإعادة ترتيب الحدود نخلص إلى

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}C_{1,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}C_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}C_{k,j}.$$

3. إذا كانت $n = 3$ و المصفوفة $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$، فإن

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array}\right.$$

$$\det A = a_{1,1}(a_{2,2}\cdot a_{3,3} - a_{2,3}\cdot a_{3,2}) - a_{1,2}(a_{2,1}\cdot a_{3,3} - a_{2,3}\cdot a_{3,1}) + a_{1,3}(a_{2,1}\cdot a_{3,2} - a_{2,2}\cdot a_{3,1})$$

مثال 3 :

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -4 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & 6 & 0 & 7 \\ 2 & -6 & 1 & 2 & -6 \end{array}\right. \Rightarrow \det = 3\cdot 7\cdot 1 + (-4)\cdot 6\cdot 2 - (-6)\cdot 6\cdot 3 = 81$$

2.2 خواص المحددات

نظرية 1.2.2

1. إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن $\det A^T = \det A$.
2. إذا كانت A مصفوفة مربعة وتحتوي على صف أو عمود صفري فإن محددها يساوي صفر.
3. إذا كانت A مصفوفة مثلثية علوية أو سفلية فإن محددها يساوي

$$a_{1,1}\dots a_{n,n}.$$

4. إذا كانت A مصفوفة مربعة وتحتوي على صف مضاعف لصف آخر أو عمود مضاعف لعمود آخر فإن محددها يساوي صفر.
5. إذا حصلنا على مصفوفة B من مصفوفة A بتبديل صفين (أو عمودين) فإن $\det B = -\det A$.
6. إذا حصلنا على مصفوفة B من مصفوفة A بضرب صف بعدد وإضافة الناتج لصف

آخر فإن $\det B = \det A$.

مثال 4 :

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}
&\overset{(-2)R_{1,2},(-3)R_{1,3},(-1)R_{1,4}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&\overset{(-1)R_{1,2}}{=} -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.
\end{aligned}
$$

مثال 5 :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{(2)R_{1,2},(-3)R_{1,3} \\ (-1)R_{1,4},(-1)R_{1,5}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 9 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -13 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 9 & -3 & -2 \\ 3 & -13 & 6 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3R_{1,2},1R_{1,3}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 9 & -3 & -2 \\ 0 & 14 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 14 & -3 & -4 \\ 6 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(-1)R_{1,2},2R_{1,3}}{=} \begin{vmatrix} 14 & 6 & 1 \\ -17 & -6 & 0 \\ 24 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & -6 \\ 24 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\overset{1R_{1,2}}{=} \begin{vmatrix} -17 & -6 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 42 - 17 = 25.$$

مثال 6 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}|A| = \det(A) &= \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -3\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -3\end{vmatrix} = -3.\end{aligned}$$

مثال 7 :

$$A = \begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}|A| = \det(A) &= \begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & b-a & (b-a)(b+a)\\ 0 & c-a & (c-a)(c+a)\end{vmatrix}\\ &= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & b+a\\ 1 & c+a\end{vmatrix}\\ &= (b-a)(c-a)(c-b).\end{aligned}$$

نظرية 2.2.2

تكون مصفوفة مربعة A لها معكوس إذا و فقط إذا كان $\det A \neq 0$.

نظرية 3.2.2

لتكن A و B مصفوفتين مربعتين فإن

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

ملاحظة 5 :

1. إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n، فإن $|cA| = c^n|A|$.
2. لتكن مصفوفة A مربعة و إذا كانت B هي الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة A. إذا يوجد عدد منته من المصفوفات الأولية $E_1, \ldots, E_m$ بحيث $E_1 \ldots E_m A = B$. إذاً

$$\det(E_1) \ldots \det(E_m) \det(A) = \det(B).$$

3.2 المصفوفة المصاحبة

تعريف 1.3.2

لتكن مصفوفة A مربعة نعرف المصفوفة $B = (C_{j,k})^T$ و تسمى المصفوفة المصاحبة للمصفوفة A و نرمز بها $\text{adj}(A)$.

نظرية 2.3.2

إذا كانت مصفوفة A مربعة من الدرجة n فإن

$$(\text{adj}A)A = A(\text{adj}A) = (\det A)I_n.$$

نتيجة 3.3.2

إذا كانت مصفوفة A مربعة و لها معكوس فإن

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A)$$

و

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

مثال 8 :

1. إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$، فإن $\det A = 5$، $\operatorname{adj} A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ و $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$، فإن $\det A = -13$، $\operatorname{adj} A) = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ و $A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.

3. إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$، فإن $\det A = -24$، $\operatorname{adj} A) = \begin{pmatrix} -20 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -20 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -20 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -20 \end{pmatrix}$،
و
$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

مثال 9 :

1. إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$، $n \geq 2$ و لها معكوس، فإن $\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = (\det A)^{n-2}A$.

2. المصفوفة A لها معكوس إذا و إذا فقط إذا المصفوفة $\mathrm{adj}(A)$ لها معكوس

الحل

1. من العلاقة $A\mathrm{adj}(A) = |A|I_n$ نستنتج أن $|\mathrm{adj}(A)| = |A|^{n-1}$ و $(\mathrm{adj}(A))^{-1} = \frac{1}{|A|}A$.

   إذا كانت المصفوفة A لها معكوس فإن $\mathrm{adj}(A)$ $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)$.

   لتكن $B = \mathrm{adj}(A)$، إذاً $B\mathrm{adj}(B) = |B|I_n = |A|^{n-1}I_n$ و بالتالي فإن $\mathrm{adj}(B) = |A|^{n-1}B^{-1} = |A|^{n-2}A$.

2. من العلاقة $A\mathrm{adj}(A) = |A|I_n$ نستنتج أنه إذا كانت المصفوفة A لها معكوس فإن المصفوفة $\mathrm{adj}(A)$ لها معكوس.

   كذلك من نفس العلاقة إذا كانت المصفوفة $\mathrm{adj}(A)$ لها معكوس و المصفوفة A ليس لها معكوس فإن $A\mathrm{adj}(A) = 0$ و $A\mathrm{adj}(A)(\mathrm{adj}(A))^{-1} = 0$.

   إذاً $A = 0$ و هذا تناقض لأنه إذا كانت $A = 0$ فإن $\mathrm{adj}(A) = 0$.

تمرين 11 :

لتكن المصفوفة المربعة $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. أوجد المصفوفة $\mathrm{adj}(A)$ و محدد المصفوفة A.
2. أوجد معكوس المصفوفة A إن وجدت.

تمرين 12 : لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ و المصفوفة $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

أوجد قيمة العدد a بحيث $A^2 - AB + aI_3 = 0$ واستنتج معكوس المصفوفة A.

4.2 التمارين

تمارين في الباب الثاني

تمرين 1 :

أوجد المحددات التالية

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}، \qquad \begin{vmatrix} x & a & b & x \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \\ a & x & x & b \end{vmatrix}،$$

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

تمرين 2 :

لتكن كل من A, B, C مصفوفات مربعة من الدرجة 4 و تحقق

$$|A| = 2, \qquad |B| = -3, \qquad |C| = 5$$

احسب المحدد التالي $|2A^{-5}B^{-3}C^{-1}(B^T)^5|$

تمرين 3 :

إذا كانت A, B مصفوفتين مربعتين من الدرجة 3 حيث $|A^{-1}| = -3$,$|2B^T| = -4$, إحسب قيمة المحدد التالي $|A(\text{Adj}A) + 2B(\text{Adj}B)|$.

تمرين 4 :

1. أوجد معكوس المصفوفة التالية $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.
2. أوجد محدد المصفوفة B المربعة من الدرجة 3 و التي تحقق

$$2AB = I + A.$$

تمرين 5 :

1. أوجد محدد المصفوفة التالية $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & a & 1 \\ b & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
2. أوجد قيم a, b بحيث تكون للمصفوفة A معكوس.

تمرين 6 :
إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الدرجة 3 بحيث
$|AB^T| = -14$ و $\frac{1}{2}A^4 + A = 0$،
فاحسب $|A|$ و $|B|$.

تمرين 7 :
أوجد محدد المصفوفة التالية

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

تمرين 8 :
لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
أوجد A^2 واستنتج أن $A^2 = 2I - A$ و أن المصفوفة A لها معكوس و أوجد A^{-1}.

تمرين 9 :
لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ و المصفوفة $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
1. أثبت أن المصفوفة لها معكوس وأوجد P^{-1}.
2. أوجد المصفوفة $D = P^{-1}AP$.
3. احسب D^4.

تمرين 10 :

لتكن المصفوفات $A=\begin{pmatrix}2&-2&-1\\2&6&1\\0&0&4\end{pmatrix}$,

$P=\begin{pmatrix}2&2&2\\-2&-1&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}$ و $Q=\begin{pmatrix}0&-2&1\\4&4&0\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$.

1. احسب PQ واستنتج أن المصفوفة P لها معكوس وأوجد P^{-1}.
2. أوجد المصفوفة $B=P^{-1}AP$.
3. أوجد المصفوفة $N=B-4I_3$.
4. احسب N^2 واستنتج B^{-1} و A^{-1}.

تمرين 11 :

لتكن كل من $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ مصفوفة مربعة من الدرجة 4 و تحقق

$$\mathbf{2AC-AB^2+9I=0}$$

حيث $\mathbf{B=6}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&1&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$ و $\mathbf{C=9}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&0\\2&1&0&0\\1&1&2&0\end{pmatrix}$

1. أوجد المصفوفة $\mathbf{A}^{-1}$.
2. أوجد محدد المصفوفة $\mathbf{A}$.
3. أوجد $\mathrm{adj}\mathbf{A}$.

تمرين 12 :

أوجد معكوس المصفوفات التالية

1. $\begin{pmatrix}1&a&a^2\\a&1&a\\a^2&a&1\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$, $|a|\neq 1$.
2. $A=\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac13\\\frac12&\frac13&\frac14\\\frac13&\frac14&\frac15\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0.5&0.33\\0.5&0.33&0.25\\0.33&0.25&0.20\end{pmatrix}$.

تمرين 13 :

لتكن المصفوفة المربعة $A=\begin{pmatrix}1&-4&3\\0&2&-1\\1&-2&3\end{pmatrix}$.

1. أوجد المصفوفة $B = \mathrm{adj}A$ و محدد المصفوفة A.
2. أوجد معكوس المصفوفة A إذا وجدت.
3. استنتج المصفوفة $C = \mathrm{adj}B$.

باب 3

أنظمة المعادلات الخطية

1.3 مدخل للأنظمة الخطية

لنبدأ بطرح المسألة التالية:
نريد معرفة عمر الأب و عمر الإبن إذا كانت لنا المعطيات التالية:
إذا أخذنا أربعة أضعاف عمر الإبن و طرحنا منها عمر الأب نجد 5، و إذا أخذنا ضعف عمر الأب و طرحنا منها سبع أضعاف عمر الإبن نجد 3.
الجواب إذا كان عمر الأبن هو x و عمر الأب هو y نجد المعدلتين التاليتين:

$$\begin{cases} 4x & - & y & = & 5 \\ -7x & + & 2y & = & 3 \end{cases}$$

هاتين المعادلتين تسمى نظام خطي، و x, y تسمى المجاهيل.
سنعطي طريقتين لحل هذا النظام:
الطريقة الأولى
المعادلة الأولى متكافئة مع المعادلة التالية: $8x - 2y = 10$ و بجمع هذه المعادلة مع المعادلة الثانية نجد أن $x = 13$ و بتعويض قيمة x في أي معادلة نجد أن $y = 47$.
الطريقة الثانية
النظام الخطي السابق متكافئ مع الكتابة التالية

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$، $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ فإن النظام الخطي متكافئ مع $AX = B \iff X = A^{-1}B$.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ و $X = \begin{pmatrix} 13 \\ 47 \end{pmatrix}$.

2.3 طريقة جاوس و جاوس جوردن

تعريف 1.2.3

إذا كانت $(a_{j,k})$ أعدادا حقيقية $(1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n)$ و إذا كانت $x_1, \ldots, x_n$ مجاهيل و إذا كانت $b_1, \ldots, b_n$ أعدادا حقيقية. يمكن كتابة نظام معادلات خطية كما يلي

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & a_{1,2}x_2 & \cdots & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & a_{2,2}x_2 & \cdots & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & a_{m,2}x_2 & \cdots & a_{m,n}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

و يمكن كتابة هذا النظام الخطي في صيغة مصفوفات كما يلي: $AX = B$ مع

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

تعريف 2.2.3

1. نقول أن نظامين من المعادلات الخطية متكافئان إذا كان لها نفس مجموعة الحلول.
2. نقول أن نظام خطي متسقا أو متآلفا إذا كان له حل و نقول أنه غير متسق إذا لم يكن له حل.

سنقوم بتوسيع المصفوفة A و ذلك باضافة المصفوفة B و نحصل على مصفوفة $[A|B]$ وتسمى المصفوفة الموسعة

1.2.3 طريقة جاوس

لحل النظام الخطي سنقوم بوضع المصفوفة الموسعة $[A|B]$ على صيغة درجية صفية و نحصل على نظام خطي مثلثي مكافئ للنظام الخطي الأول و هذه الطريقة تسمى طريقة جاوس لحل النظام الخطي.

2.2.3 طريقة جاوس جوردن

لحل النظام الخطي سنقوم بوضع المصفوفة الموسعة $[A|B]$ على الصيغة الدرجية الصفية المختزلة و نحصل على نظام خطي مكافئ للنظام الخطي الأول و هذه الطريقة تسمى طريقة جاوس جوردن لحل النظام الخطي.

3.3 الأنظمة الخطية المتجانسة

تعريف 1.3.3

نقول أن نظام خطي $AX = B$ متجانس إذا كان $B = 0$.

ملاحظات 6 :

1. كل نظام خطي متجانس متسق لأن الحل التافه هو حل لهذا النظام.
2. إذا كان X_1 و X_2 حلان للنظام الخطي المتجانس $AX = 0$ فإن $X_1 + \lambda X_2$ هو حل للنظام الخطي لكل $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. إذا كان للنظام الخطي المتجانس $AX = 0$ حل غير صفري فإن النظام له عدد ما لا نهائي من الحلول.

نظرية 2.3.3

إذا كان للنظام الخطي $AX = B$ حل X_0 إذا كل حل X للنظام الخطي سيكون على الصيغة $X = X_0 + X_1$ حيث X_1 حل للنظام المتجانس $AX = 0$.

4.3 قاعدة كرامر

نظرية 1.4.3

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n ولها معكوس إذا الحل الوحيد للنظام الخطي $AX = B$ هو

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

حيث A_j هي المصفوفة A_j هي المصفوفة التي تحصل عليها من المصفوفة A بوضع العمود B عوضا عن العمود C_j

5.3 التمارين

تمارين الباب الثالث

تمرين 1 :

أوجد علاقة بين a, b, c حتى تكون الأنظامة الخطية التالية متسقة.

1. $\begin{cases} x + y + 2z &= a \\ x + z &= b \\ 2x + y + 3z &= c \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2y+3z &= a \\ 2x+3y+4z &= b \\ 3x+4y+5z &= c \end{cases}$

تمرين 2 :

1. عين كل من a, b, c التي من أجلها يكون $(1,-1,2)$ حلا للنظام الخطي
$\begin{cases} ax+by-3z=-3 \\ -2x-by+z=-1 \\ ax+3y-cz=-1 \end{cases}$.
2. أثبت أن $(\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{2})$ هو حلا وحيدا للنظام الخطي في الفقرة (1).

تمرين 3 :

أوجد حلول الأنظامة الخطية التالية

1. $\begin{cases} x+2y-z &= -4 \\ -x+y &= -2 \\ y-z &= -4 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x+2y-z+t &= 1 \\ 3x-y+5y-t &= 2 \\ 5x+3y+3z+t &= m \end{cases}$; $m \in \mathbb{R}$.
3. $\begin{cases} -2y+3z &= 0 \\ 2x-4y+2z &= 0 \\ -x-2y+5z &= 0 \\ x-2y-z &= 1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} y+3z-2t &= 0 \\ 2x+y-4z+3t &= 0 \\ 2x+3y+2z-t &= 1 \end{cases}$,
5. $\begin{cases} x+2y+z &= 1 \\ 2x+(a+3)y+3z &= 3 \\ x+(-a+3)y+(a-2)z &= 0 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x-y+z+t=0 \\ 2x-y+z+3t=0 \\ z-t=0 \\ -2x+y-t=0 \end{cases}$

تمرين 4 :

أوجد حلول الأنظمة الخطية التالية بالستعمال طريقة جاوس جوردن

.1
$$\begin{cases} x+y+2z+t=11 \\ x+2y+z+t=9 \\ x+y+z+2t=6 \\ 2x+y+z+t=14 \end{cases}$$

.2
$$\begin{cases} x+y+2z &=& 8 \\ -x-2y+z &=& 1 \\ 3x-7y+4z &=& 10 \end{cases}$$

.3
$$\begin{cases} x-y+2z-t &=& -1 \\ 2x+y-2z-2t &=& -2 \\ -x+2y-4z+t &=& 1 \\ 3x-3t &=& -3 \end{cases}$$

تمرين 5 :

إستخدم طريقة جاوس جوردن لإيجاد حلول النظام التالي حسب قيمة m

$$\begin{cases} 2x &+& 5y &-& 2z &+& 3t=1 \\ 2x &+& 6y &-& 2z &+& 4t=-2 \\ x &+& 2y &-& z &+& t=2 \\ 3x &+& 8y &-& 3z &+& 5t=m^2-1 \end{cases}$$

تمرين 6 :

ليكن النظام الخطي التالي:

$$\begin{cases} -x+y+mz &=& -2 \\ 2x-my-z &=& -1 \\ mx-2y+z &=& 1 \end{cases}$$

1. أوجد قيم العدد m حتى يكون للنظام الخطي عدد لا نهائي من الحلول.
2. أوجد حلول النظام الخطي في حالة $m=2$ إن وجدت.
3. أوجد حلول النظام الخطي في حالة $m=0$ إن وجدت.

تمرين 7 :

ليكن النظام الخطي

$$\begin{cases} x+my+2z &=& 1 \\ 2x-y+z &=& 3 \\ mx+4y+2mz &=& 2 \end{cases}$$

1. أوجد قيم m حتى يكون للنظام الخطي عدد لا نهائي من الحلول. و أوجد حلول النظام في

هذه الحالة.

2. أوجد قيم m حتى يكون النظام الخطي غير متسق.

تمرين 8 :

ليكن $m \in \mathbb{R}$ و ليكن النظام الخطي التالي:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & m-2 & m+3 & m^2+5 \\ 3 & 5 & -5 & m+3 & m^2+2 \end{array}\right]$$

1. أوجد قيم m حتى يكون النظام غير متسق.
2. أوجد قيم m حتى يكون النظام له حل وحيد.
3. أوجد قيم m حتى يكون النظام له عدد لا نهائي من الحلول.

تمرين 9 :

استخدم قاعدة كرامر لحل الأنظمة الخطية التالية

1. $$\begin{cases} x - 2y + 2z = -1 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ 3x + y + 2z = -1 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 3x - 2z = 2 \\ -2x + 3y - 2z = 3 \\ -5x + 4y - z = 1 \end{cases}$$

باب 4

فضاءات المتجهات

1.4 تعريف فضاء المتجهات

تعريف 1.1.4

نقول أن مجموعة $\mathbb{E}$ هي فضاء متجهات على $\mathbb{R}$ إذا كانت تحقق ما يلي:

1. (خاصية الإغلاق لعملية الجمع) إذا كان $u, v \in \mathbb{E}$ فإن $u + v \in \mathbb{E}$.
2. (الخاصية التجميعية لعملية الجمع) إذا كان $u, v, w \in \mathbb{E}$ فإن $u + (v + w) = (u + v) + w$.
3. (خاصية المحايد الجمعي) يوجد عنصر $0 \in \mathbb{E}$ (يسمى المحايد الجمعي) بحيث $u + 0 = 0 + u = u \forall u \in \mathbb{E}$.
4. لكل $u \in \mathbb{E}$ يوجد عنصر يرمز له بالرمز $-u$ ويسمى نظير u الجمعي و يحقق $u + (-u) = (-u) + u = 0$.
5. (الخاصية الإبدالية للجمع) إذا كان $u, v \in \mathbb{E}$ فإن $u + v = v + u$.
6. (خاصية الإغلاق لعملية الضرب بعدد) إذا كان $u \in \mathbb{E}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $\alpha u \in \mathbb{E}$.
7. إذا كان $u, v \in \mathbb{E}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.
8. إذا كان $u \in \mathbb{E}$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ فإن $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.
9. إذا كان $u \in \mathbb{E}$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ فإن $(\alpha.\beta)u = \alpha(\beta u)$.
10. إذا كان $u \in \mathbb{E}$ فإن $1.u = u$.

مثال 1 :

1. $\mathbb{R}^n$ فضاء متجهات.
2. المجموعة $\{(x, y, 2x+3y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$ هو فضاء متجهات.
3. مجموعة كثيرات الحدود $\mathcal{P} = \mathbb{R}[X]$ هو فضاء متجهات.
كذلك مجموعة كثيرات الحدود بدرجة أقل أو يساوي n، $\mathcal{P}_n = \mathbb{R}_n[X]$ هو فضاء متجهات.

2.4 الفضاءات الجزئية

تعريف 1.2.4

ليكن V فضاء متجهات و F مجموعة جزئية من V. نقول أن F هي فضاء جزئي من V إذا كان F هو فضاء متجهات وذلك بنفس العمليات على V.

نظرية 2.2.4

ليكن V فضاء متجهات و F مجموعة جزئية من V.
F هي فضاء جزئي من V إذا تحققت الشروط التالية
1. $0 \in F$،
2. إذا كان $u, v \in F$، فإن $u + v \in F$،
3. إذا كان $u \in F$، $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $\alpha u \in F$.

مثال 2 :

1. ليكن $F = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2a-b \end{pmatrix};\ a, b \in \mathbb{R}\}$. F هي فضاء جزئي من $V = M_2(\mathbb{R})$.
2. لتكن $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ مصفوفة و ليكن $F = \{X \in \mathbb{R}^n;\ AX = 0\}$. F هي فضاء جزئي من $V = \mathbb{R}^n$. (F هو مجموعة حلول النظام المتجانس $AX = 0$).
3. المجموعة $F = \{(x, x+1);\ x \in \mathbb{R}\}$ ليست فضاءا جزئيا من $\mathbb{R}^2$.

3.4 التركيبات الخطية والمجموعات المولدة

تعريف 1.3.4

ليكن V فضاء متجهات و لتكن $v_1, \ldots, v_n \in V$. نقول $w \in V$ هو تركيب خطي للمتجهات $v_1, \ldots, v_n$ إذا وجد $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ بحيث $w = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$.

مثال 3 :

المتجه $(4, 1, 1)$ هو تركيب خطي للمتجهات
$(1, 0, 2)$، $(2, -1, 3)$، $(0, -1, 1)$.
$(4, 1, 1) = -2(1, 0, 2) + 3(2, -1, 3) - 4(0, -1, 1)$.

نظرية 2.3.4

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m, n) و لتكن $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ وكانت $C_1, \ldots, C_n$ أعمدة المصفوفة A فإن $AX = x_1 C_1 + \ldots + x_n C_n$.

نتيجة 3.3.4

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m, n). عندئذ يكون النظام الخطي $AX = B$ متسقا إذا وفقط إذا كان B تركيبا خطيا لأعمدة المصفوفة A.

تعريف 4.3.4

لتكن $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ مجموعة جزئية من المتجهات في فضاء متجه V. نقول أن S تولد V إذا كان كل عنصر من V هو تركيب خطي لعناصر V.

نظرية 5.3.4

لتكن $S = \{v_1, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ و لتكن A مصفوفة من الدرجة (n, k) و $C_1, \ldots, C_k$ أعمدتها. عندئذ
S تولد $\mathbb{R}^n$ إذا وفقط إذا كان النظام $AX = B$ متسقا لكل $B \in \mathbb{R}^n$.

نظرية 6.3.4

لتكن $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ مجموعة جزئية من المتجهات في فضاء متجه V عندئذ
1. مجموعة جميع التركيبات الخطية W لمتجهات S تشكل فضاءا جزئيا من V.
2. W هو أصغر فضاء جزئي يحتوي على S.
يسمى هذا الفضاء هو الفضاء المولد بالمجموعة S و نرمز به $\langle S \rangle$.

4.4 الإرتباط الخطي والإستقلال الخطي

تعريف 1.4.4

نقول أن متجهات $v_1, \ldots, v_n$ في فضاء متجهات V هي مستقلة خطيا إذا كان الحل الوحيد للمعادلة $a_1v_1 + \ldots, +a_nv_n = 0$ هو الحل الصفري.

مثال 4 :

$u = (0,1,-2,1)$، $v = (1,0,2,-1)$، $w = (3,2,2,-1)$ مستقلة خطيا في $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{cases} y+3z &= 0 \\ x+2z &= 0 \\ -2x+2y+2z &= 0 \\ x-y-z &= 0 \end{cases} \iff xu+yv+zw=(0,0,0,0)$$.

هذا النظام له حل وحيد هو الحل الصفري.

تعريف 2.4.4

نقول أن متجهات $v_1,\dots,v_n$ في فضاء متجهات V هي مرتبطة خطيا إذا كانت ليست مستقلة خطيا.

نظرية 3.4.4

لتكن $S=\{v_1,\dots,v_k\}\subset\mathbb{R}^n$ و لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n) و أعمدتها متجهات S. عندئذ تكون S مستقلة خطيا إذا وفقط إذا كان النظام المتجانس $AX=0$ له حل وحيد الحل التافه.

ملاحظات 7 :

1. إذا كانت A مصفوفة من الدرجة (m,n) و $m<n$ فإنه يوجد عدد غير منته من الحلول للنظام $AX=0$.
2. إذا كانت $S=\{v_1,\dots,v_n\}\subset\mathbb{R}^m$ و $m<n$ فإن S مرتبطة خطيا.

نظرية 4.4.4

إذا كان $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ مجموعة من المتجهات في فضاء متجهات V حيث $n\geq 2$.

عندئذ S مرتبطة خطيا إذا وفقط إذا كان أحد متجهاتها تركيبا خطيا لبقية المتجهات.

5.4 الأساس والبعد

تعريف 1.5.4

لتكن $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ مجموعة من المتجهات في فضاء متجهات V. نقول أن S أساس للفضاء V إذا حققت الشرطين

1. S تولد V
2. S مستقلة خطيا.

نظرية 2.5.4

إذا كان $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ أساسا للفضاء V و كان $v \in V$ فإننا نستطيع كتابة v بطريقة وحيدة كتركيب خطي للمتجهات $v_1, \ldots, v_n$.

ملاحظة 8 :
إذا كان $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ مجموعة جزئية من الفضاء $\mathbb{R}^n$ حيث $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$ فإن S أساس للفضاء $\mathbb{R}^n$.

تمرين 10 :
أثبت أن $S = \{1, X, \ldots, X^n\}$ أساس لفضاء المتجهات $\mathcal{P}_n$.

نظرية 3.5.4

إذا كان $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ أساسا للفضاء V و لتكن $T = \{u_1, \ldots, u_m\}$. إذا كان $m > n$ فإن T مرتبطة خطيا.

نتيجة 4.5.4

إذا كانت كل من $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ و $T = \{u_1, \dots, u_m\}$. أساسا للفضاء V فإن $m = n$.

تعريف 5.5.4

إذا كان $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ أساسا للفضاء V فإن عدد المتجهات n في S يسمى بعد الفضاء V و نكتب $\dim V = n$.

نظرية 6.5.4

إذا كان V فضاء متجهات و بعده n و إذا كانت $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ مجموعة من المتجهات في الفضاء V عندئذ

1. إذا كانت S مستقلة خطيا فإن S أساس للفضاء V.
2. إذا كانت S تولد V فإن S أساس للفضاء V.

نظرية 7.5.4

إذا كانت $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ مجموعة مولدة للفضاء V فإن S تحتوي على أساس للفضاء V.

ملاحظة 9 :
إذا كانت $S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$ مجموعة مولدة فإن كلا من الخوارزميتين التاليتين تزودنا بأساس للفضاء الجزئي المولد بالمجموعة S.

خوارزمية 1

1. كون مصفوفة A صفوفها متجهات S
2. استخدم طريقة جاوس أو جاوس جوردن لوضع A على صيغة درجية صفية أو صيغة درجية صفية مختزلة و لتكن C.
3. عندئذ صفوف C الغير صفرية هي أساس للفضاء الجزئي $\langle S\rangle$.

خوارزمية 2

1. كون مصفوفة A أعمدتها متجهات S
2. استخدم طريقة جاوس أو جاوس جوردن لوضع A على صيغة درجية صفية أو صيغة درجية صفية مختزلة و لتكن C.
3. لتكن C_1 هي مجموعة المتجهات المكونة من الأعمدة ذات العناصر المتقدمة في C ولتكن S_1 هي مجموعة المتجهات المكونة من الأعمدة في A المقابلة لعناصر C_1 عندئذ S_1 هي أساس للفضاء الجزئي $\langle S\rangle$.

نظرية 8.5.4

1. إذا كانت $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ مجموعة مولدة لفضاء المتجهات V فإن S تحتوي على أساس للفضاء V.
2. إذا كانت $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ مجموعة مستقلة خطيا في فضاء متجهات V فإنه يوجد أساس T للفضاء V يحتوي على S.

مثال 5 :

ليكن W الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^5$ المولد بـ
$v_1 = (1, 0, 2, -1, 2)$، $v_2 = (2, 0, 4, -2, 4)$، $v_3 = (1, 2, -1, 2, 0)$،
$v_4 = (1, 4, -4, 5, -2)$.

1. أوجد أساسا لـ W محتوى في $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
2. أوجد أساسا لـ $\mathbb{R}^5$ يحتوي على $\{v_1, v_3\}$.

الحل

1. لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ والتي أعمدتها هي احداثيات المتجهات v_1, v_2, v_3, v_4.

الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A هي $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ إذا $\{v_1, v_3\}$ هو أساس لـ W.

2. إذا كان $e_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$، $e_2 = (0, 1, 0, 0, 0)$، $e_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$. إذا $\{v_1, v_3, e_1, e_2, e_3\}$ هو أساس لـ $\mathbb{R}^5$ يحتوي على $\{v_1, v_3\}$.

6.4 الإحداثيات وتغيير الأساس

تعريف 1.6.4

إذا كانت $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ أساسا للفضاء V و كان $v \in V$ حيث

$$v = x_1 v_1 + \ldots x_n v_n$$

فإن $(x_1, \ldots x_n)$ تسمى إحداثيات المتجه v بالنسبة للأساس S و نرمز

$$[v]_S = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

و يسمى المتجه الإحداثي للمتجه v بالنسبة للأساس S.

نظرية 2.6.4

إذا كان $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ و $C = \{u_1, \ldots, u_n\}$ أساسين للفضاء V. و لتكن ${}_CP_B$ مصفوفة من الدرجة n أعمدتها $[v_1]_C, \ldots, [v_n]_C$ عندئذ فإن المصفوفة ${}_CP_B$ لها معكوس كما أن

$$[v]_C = {}_CP_B[v]_B$$

لكل $v \in V$.
تسمى المصفوفة ${}_CP_B$ مصفوفة الإنتقال من الأساس B إلى الأساس C.

7.4 رتبة المصفوفة

تعريف 1.7.4

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m, n).
يسمى الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^n$ المولد بصفوف A ، الفضاء الصفي للمصفوفة A و يرمز له بالرمز $\text{row}A$.
يسمى الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^m$ المولد بأعمدة A ، الفضاء العمودي للمصفوفة A و يرمز له بالرمز $\text{col}A$.

نظرية 2.7.4

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m, n) و كانت B هي المصفوفة التي نحصل عليهامن A بإجراء عملية أولية صفية فإن $\text{row}A = \text{row}B$.

نظرية 3.7.4

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n) و كانت B هي صيغة درجية صفية للمصفوفة A فإن مجموعة الصفوف الغير صفرية في B مستقلة خطيا.

تعريف 4.7.4

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n).
نسمي بعد الفضاء الصفي للمصفوفة A رتبة المصفوفة و نرمز به $\text{rank}A = \text{dimrow}A$.

ملاحظة 10 :
لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n).
رتبة المصفوفة هو عدد العناصر المتقدمة في أي صيغة درجية صفية للمصفوفة A.

نظرية 5.7.4

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n) فإن

$$\text{rank}A = \text{dimrow}A = \text{dimcol}A.$$

نتيجة 6.7.4

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n) فإن

$$\text{rank}A = \text{rank}A^T.$$

نتيجة 7.7.4

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n) و إذا كانت P مصفوفة لها معكوس من الدرجة m و إذا كانت Q مصفوفة لها معكوس من الدرجة n فإن

$$\text{rank}A = \text{rank}PAQ.$$

البرهان
نعلم أن إجراء عملية أولية على الصفوف على A يكافئ ضرب المصفوفة A من اليسار بمصفوفة أولية. و بما أن المصفوفة P هي حاصل ضرب مصفوفات أولية فإنه يمكن الحصول على PA بمتتالية من العمليات الصفية الأولية. لذا فإن

$$\text{rank}A = \text{rank}PA.$$

و باستعمال النتيجة السابقة فنستنتج

$$\text{rank}A = \text{rank}PAQ.$$

□

نظرية 8.7.4

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n) فإن العبارات التالية متكافئة
1. للنظام $AX=0$ حل وحيد وهو الحل التافه.
2. أعمدة المصفوفة A مستقلة خطيا.
3. $\text{rank}A = n.$
4. للمصفوفة A^TA معكوس.

نظرية 4.7.9

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n) فإن العبارات التالية متكافئة

1. النظام $AX=B$ متسق لكل $B\in\mathbb{R}^m$.
2. أعمدة المصفوفة A تولد $\mathbb{R}^m$.
3. $\text{rank}A=m.$
4. للمصفوفة AA^T معكوس.

تعريف 4.7.10

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n). نعرف الفضاء الجزئي $\{X\in\mathbb{R}^n;\ AX=0\}$ الفضاء الصفري للمصفوفة A و نرمز له بالرمز $N(A)$ و نسمي بعده بصفرية المصفوفة A و نرمز له بالرمز $\text{nullity}(A)$.
كذلك نعرف الفضاء الجزئي $\{AX;\ X\in\mathbb{R}^n\}$ صورة المصفوفة A و نرمز له بالرمز $\text{Im}(A)$.

نظرية 4.7.11

لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n) فإن $\text{Im}(A)=\text{col}A$.

نظرية 4.7.12

مبرهنة البعد للمصفوفات
لتكن A مصفوفة من الدرجة (m,n) فإن

$$\text{nullity}(A)+\text{rank}(A)=n.$$

8.4 التمارين

تمارين الباب االرابع

تمرين 1 :
بين من المجموعات التالية من هي فضاء جزئي
$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 3x - 7y = z\}$
$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2 - z^2 = 0\}$,
$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + y - z = x + y + z = 0\}$,
$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ z(x^2 + y^2) = 0\}$,
$E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \ x + y = 0\}$,
$E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \ xy = 0\}$,
$E_7 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; \ x = 0, y = z\}$,
$E_8 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \ x = 1\}$.

تمرين 2 :
لتكن A مربعة من الدرجة n و $W = \{B \in M_n : \ AB = BA\}$.
أثبت أن W فضاء جزئي من M_n. (M_n هو فضاء المصفوفات المربعة من الدرجة n).

تمرين 3 :
لتكن المتجهات التالية $e_1 = (1, 2, 3, 4)$ و $e_2 = (1, -2, 3, -4)$ في $\mathbb{R}^4$.
هل يوجد x و y حتى يكون $(x, 1, y, 1)$ في الفضاء المولد بالمتجهات e_1, e_2؟
و هل يوجد x و y حتى يكون $(x, 1, 1, y)$ في الفضاء المولد بالمتجهات e_1, e_2؟

تمرين 4 :
هل يوجد x, y حتى يكون المتجه $v = (-2, x, y, 3)$ موجود في الفضاء الجزئي المولد بالمتهات (e_1, e_2) مع $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ و $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$؟

تمرين 5 :
ليكن E الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^3$ المولد بالمتجهات التالية: $(2, 3, -1), (1, -1, -2)$ و ليكن F الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^3$ المولد بالمتجهات التالية: $(3, 7, 0), (5, 0, -7)$
أثبت أن $E = F$.

تمرين 6 :
هل يوجد $x, y \in \mathbb{R}$ حتى يكون المتجه $v = (-2, x, y, 5)$ موجود في الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^4$

المولد بالمتجهات التالية: $u = (1, -1, 1, 2)$ و $v = (-1, 2, 3, 1)$.

تمرين 7 :

ليكن في $\mathbb{R}^4$ المتجهات التالية:
$e_1 = (0, 1, -2, 1)$، $e_2 = (1, 0, 2, -1)$، $e_3 = (3, 2, 2, -1)$، $e_4 = (0, 0, 1, 0)$ و $e_5 = (0, 0, 0, 1)$.

هل العبارات التالية صحيحة:

1. $\text{Vect}\{e_1, e_2, e_3\} = \text{Vect}\{(1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2)\}$.
2. $(1, 1, 0, 0) \in \text{Vect}\{e_1, e_2\} \cap \text{Vect}\{e_2, e_3, e_4\}$.
3. $\text{Vect}\{e_1, e_2\} + \text{Vect}\{e_2, e_3, e_4\} = \mathbb{R}^4$.

تمرين 8 :

ليكن في $\mathbb{R}^3$، $u_1 = (1, 2, 1)$، $u_2 = (1, 3, 2)$، $u_3 = (1, 1, 0)$، $u_4 = (3, 8, 5)$. وليكن $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ و $G = \text{Vect}(u_3, u_4)$.

أثبت أن $F = G$.

تمرين 9 :

أثبت أن المتجهات
$u_1 = (1, 0, 1)$، $u_2 = (-1, -1, 2)$ و $u_3 = (-2, 1, -2)$ تكون أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$، و أوجد إحداثيات المتجه $v = (x, y, z)$ في هذا الأساس.

تمرين 10 :

أوجد قيم $t \in \mathbb{R}$ بحيث $S = \{(1, 0, t), (1, 1, t), (t, 0, 1)\}$ تمثل أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$.

تمرين 11 :

أثبت أن المتجهات $S = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$ تمثل أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$. أوجد إحداثيات المتجهات التالية $e_1 = (1, 0, 0)$، $e_2 = (1, 0, 1)$، و $e_3 = (0, 0, 1)$ في هذا الأساس.

تمرين 12 :

أوجد بعد الفضاء المولد بالمتجهات التالية $u_1 = (3, 2, 1, 0),\ u_2 = (2, 3, 4, 5),\ u_3 = (0, 1, 2, 3),\ u_4 = (1, 2, 1, 2),\ u_5 = (0, -1, 2, 1)$ في $\mathbb{R}^4$.

تمرين 13 :

ليكن $B = \{v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 0, -2), v_3 = (1, 1, 0)\}$ أساسا في $\mathbb{R}^3$ وليكن $C = \{u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, 1, 0), u_3 = (0, 0, 1)\}$ الأساس المعتاد (أو الطبيعي) للفضاء $\mathbb{R}^3$.

1. أوجد كلا من ${}_CP_B$ و ${}_BP_C$.

2. أوجد $[v]_B$ إذا كان $v = (2,-1,1)$.

تمرين 14 :

ليكن V الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^5$ المولد بالمتجهات التالية $v_1 = (1,-1,2,0,3)$، $v_2 = (2,-2,4,0,6)$، $v_3 = (1,2,-3,-2,1)$، $v_4 = (0,-3,4,2,2)$.
أوجد أساسا للفضاء V محتوى في $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

تمرين 15 :

أوجد قيم $t \in \mathbb{R}$ بحيث $S = \{(1,0,t), (1,1,t), (t,0,1)\}$ تمثل أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$.

تمرين 16 :

ليكن في الفضاء $\mathbb{R}^4$ المتجهات التالية
$e_1 = (1,2,3,4),\ e_2 = (1,1,1,3),\ e_3 = (2,1,1,1),\ e_4 = (-1,0,-1,2)$، $e_5 = (2,3,0,1)$، و ليكن $E = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$ و $F = \langle e_4, e_5\rangle$.
أوجد أبعاد الفضاءات التالية F ، E.

تمرين 17 :

أوجد رتبة المصفوفات التالية

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & 7 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -5 & -7 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 & b \end{pmatrix}$

تمرين 18 :

ليكن E الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^3$ المولد بالمتجهات التالية: $\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ و ليكن F الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^3$ المولد بالمتجهات التالية: $\begin{pmatrix}5\\0\\-7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix}$.

أثبت أن $E = F$.

تمرين 19 :

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 1 & 1\\-1 & -2 & 0 & -1 & -2\\1 & 2 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

1. أوجد رتبة المصفوفة A.
2. أوجد أساسا للفضاء الصفري للمصفوفة A.

تمرين 20 :

ليكن E الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^4$ المولد بالمتهات التالية $v_1 = (1,-1,1,0), v_2 = (2,1,-2,1), v_3 = (1,2,-3,1), v_4 = (3,3,-5,2)$.

1. أوجد أساسا للفضاء E محتوى في $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
2. جد اساسا للفضاء $\mathbb{R}^5$ يحتوي على v_1, v_2.

تمرين 21 :

ليكن $B = \{1, x, x^2\}$ و $C = \{1-x, x+x^2, x-x^2\}$ أساسين للفضاء $P_2[x]$

1. أوجد كلا من ${}_BP_C$ و ${}_CP_B$
2. أوجد $[P]_C$ إذا كان $P(x) = 3 - 2x + x^2$

تمرين 22 :

ليكن W الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^3$ المولد بالمتجهات التالية: $u_1 = (1,2,-1)$، $u_2 = (-1,1,2)$

1. أثبت أن المجموعة $\{u_1, u_2\}$ مستقلة خطيا.
2. أثبت أن المتجه $v = (1,5,0)$ ينتمي للفضاء W.
3. أثبت أن المتجه $v = (1,2,-2)$ لا ينتمي للفضاء W.

تمرين 23 :

1. أثبت أن $B = \{v_1 = (1,0,1), v_2 = (-2,1,0), v_3 = (1,1,2)\}$ أساسا للفضاء

.$\mathbb{R}^3$

2. إذا كان $C = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)\}$ الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^3$
أوجد المصفوفة $_BP_C$ (مصفوفة الإنتقال من الأساس C إلى الأساس B.)
3. أوجد $[v]_B$ إذا كان $[v]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

تمرين 24 :
ليكن W الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^4$ المولد بالمتجهات التالية
$u_3 = (2,-1,3,1)$, $u_2 = (2,-2,4,0)$, $u_1 = (1,-1,2,0)$,
$u_5 = (0,1,-1,1)$. $u_4 = (1,0,1,1)$,

1. استخرج أساسا للفضاء W من المجموعة $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$.
2. أجد بعد الفضاء W.

تمرين 25 :
لتكن المصفوفة
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. أوجد أساسا للفضاء الصفري للمصفوفة (Null space).
2. عين أساسا للفضاء العمودي للمصفوفة.
3. أوجد رتبة المصفوفة A.

تمرين 26 :
أوجد أساسا للفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^4$ المولد بالمتجهات:

$$u_1 = (1,0,2,-1),\ u_2 = (-1,1,-1,0)\ u_3 = (0,1,1,-1),\ u_4 = (2,-1,3,-1)$$

تمرين 27 :

1. أوجد قيم a حتى تكون المتجهات
$u_1 = (1,-1,3,1), \quad u_2 = (3,1,5,3), \quad u_3 = (1,1,1,a)$ مرتبطة خطيا.
2. أوجد أساسا للفضاء $\mathbb{R}^4$ يحتوي على $\{u_1, u_2, u_3\}$ في حالة $a = 0$.

تمرين 28 :

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & m \end{pmatrix}$

أوجد قيم m حتى تكون صفرية المصفوفة A ($\text{nullity}(A)$) تساوي 1.

تمرين 29 :

ليكن V فضاء متجهات و $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ أساسا لهذا الفضاء.

1. إذا كانت
$$u_1 = v_1 - v_2 + v_3$$
$$u_2 = v_2 + 2v_3$$
$$u_3 = v_1 - 2v_3$$
فأثبت أن المجموعة $C = \{u_1, u_2, u_3\}$ تكوّن أساسا للفضاء V.
2. أوجد المصفوفة ${}_BP_C$ (مصفوفة الإنتقال من الأساس C إلى الأساس B).
3. إذا كان $v = u_1 - 2v_2 + u_3$
فأوجد $[v]_C$ و $[v]_B$.

باب 5

فضاءات الضرب الداخلي

1.5 تعريف الضرب الداخلي

تعريف 1.1.5

ليكن V فضاء متجهات على $\mathbb{R}$.
نقول أن الدالة $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ هي ضرب داخلي على V إذا تحقق كل ما يلي لكل $u, v, w \in V$، $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.
2. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle v, w\rangle$.
3. $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$.
4. $\langle u, u\rangle \geq 0$
5. $u = 0 \iff \langle u, u\rangle = 0$.

مثال 1 :

1. الضرب الداخلي المعتاد على $\mathbb{R}^n$ معرف كما يلي:
إذا كان $u, v \in \mathbb{R}^n$، $u = (u_1, \ldots, u_n)$ و $v = (v_1, \ldots, v_n)$،

$$\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j = u_1 v_1 + + \ldots + u_n v_n.$$

2. إذا كان $E = \mathcal{C}([0,1])$ فضاء الدوال المتصلة على $[0,1]$. لكل $f, g \in E$, نعرف الضرب الداخلي على E كما يلي:

$$\langle f, g\rangle == \int_0^1 f(t)g(t).$$

3.
4.

ملاحظة 11 :
إذا كان $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ فضاء ضرب داخلي وإذا كان $u, v, w, x \in E$ فإن

$$\langle u + v, w + x\rangle = \langle u, w\rangle + \langle u, x\rangle + \langle v, w\rangle + \langle v, x\rangle.$$

2.5 التعامد

تعريف 1.2.5

ليكن $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ فضاء ضرب داخلي.

1. إذا كان $u \in E$, نعرف طول أو معيار المتجه بما يلي:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}.$$

2. إذا كان $u, v \in E$, نعرف المسافة بين u و v بما يلي:

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

3. و نعرف الزاوية $0 \leq \theta \leq \pi$ بين متجهين $u, v \in E$ بما يلي:

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|.\|v\|}$$

نظرية 2.2.5

(متباينة كوشي شوارتز)
إذا كان $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ و $u, v \in E$ إذا

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

ولا تكون المساواة إلا إذا كان المتجهين u, v مرتبطين خطيا.

نظرية 3.2.5

إذا كان $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ و $u, v \in E$ إذا

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

تعريف 4.2.5

إذا كان $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ فضاء ضرب داخلي. نقول أن متجهين $u, v \in E$ متعامدين و نكتب $u \perp v$, إذا كان $\langle u, v\rangle = 0$.

نظرية 5.2.5

(قاعدة بيتاغورس)
إذا كان $u \perp v$ إذا

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

3.5 الأساسات العيارية

تعريف 1.3.5

إذا كان $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ فضاء ضرب داخلي. نقول أن مجموعة $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ من المتجهات الغير صفرية متعامدة إذا كان

$$\langle e_j, e_k\rangle = 0, \quad \forall 1 \le j \neq k \le n.$$

و نقول أنها عيارية إذا كان

$$\|e_j\| = 1, \quad \forall 1 \le j \le n.$$

و نقول أنها عيارية و متعامدة إذا كان

$$\langle e_j, e_k\rangle = \delta_{j,k}, \quad \forall 1 \le j, k \le n.$$

($\delta_{j,k} = 0$ إذا كان $j \neq k$ و $\delta_{j,j} = 1$.)

نظرية 2.3.5

كل مجموعة عيارية و متعامدة مستقلة خطيا.

نظرية 3.3.5

إذا كان $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ فضاء ضرب داخلي و إذا كانت $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ مجموعة عيارية و متعامدة و $u \in E$ فإن

$$u = \langle u, e_1\rangle e_1 + \ldots 9 + \langle u, e_n\rangle e_n.$$

نظرية 4.3.5

(خوارزمية جرام شميدت)
إذا كان $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ و $(v_1, \ldots, v_n)$ مجموعة مستقلة خطيا في E. إذا توجد مجموعة وحيدة عيارية و متعامدة $(e_1, \ldots, e_n)$ بحيث

1. لكل $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k),$$

2. لكل $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\langle e_k, v_k\rangle > 0.$$

البرهان

نبحث في الأول على مجموعة متعامدة $(u_1, \ldots, u_n)$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_1 &= & v_1 \\ u_2 &= & v_2 - \dfrac{\langle u_1, v_2\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \\ & \vdots & \\ u_n &= & v_n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \dfrac{\langle u_i, v_n\rangle}{\|u_i\|^2} u_i. \end{cases}$$

نتحصل على المجموعة $(e_1, \ldots, e_n)$ من المجموعة $(u_1, \ldots, u_n)$ كما يلي:

$$e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}, \quad k \in \{1, \ldots, n\}.$$

مثال 2 :

4.5 التمارين

تمارين الباب االخامس

تمرين 1 :

ليكن الفضاء الجزئي F من $\mathbb{R}^4$ المولد بالمتجهات
$S = \{u = (1,1,0,0),\ v = (1,0,-1,0),\ w = (0,0,1,1)\}.$

1. أثبت أن S هو أساس للفضاء الجزئي F.
2. أوجد أساسا عياريا متعامدا للفضاء الجزئي F باستعمال خوارزمية جرام شميد. (حيث الضرب الداخلي هو الضرب الإقليدي).

تمرين 2 :

1. أثبت أن $\langle (a,b),(x,y)\rangle = ax + ay + bx + 2by$ تمثل ضربا داخليا في $\mathbb{R}^2$.
2. إستعمل طريقة جرام شميت لتحويل الأساس
$\{u_1 = (1,-1), u_2 = (1,2)\}$ إلى أساس عياري و متعامد.

تمرين 3 :

عين أساسا لصورة و أساسا لنواة التحويل الخطي $\mathbf{T}\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{t}) = (\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{z}, \mathbf{2x}-\mathbf{z}-\mathbf{t}, \mathbf{y}+\mathbf{z}+\mathbf{2t}).$$

تمرين 4 :

ليكن P_3 فضاء كثيرات الحدود بدرجة أقل أو يساوي 3 وليكن الضرب الداخلي على P_3 المعرف بالقاعدة

$$\langle P,Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1) + P(2)Q(2).$$

وليكن

$$P(x) = 1 + x - x^2 + x^3, \quad Q(x) = 1 + x^2 - x^3.$$

أ) أوجد المسافة بين P و Q.

ب) أوجد $\cos\theta$ إذا كانت θ هي الزاوية بين P و Q.

تمرين 5 :

ليكن $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$، $X_1 = (x_1, y_1)$ و $\mathbf{X_2} = (\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2})$.
نعرف الضرب الداخلي على الفضاء $\mathbf{V}$ كما يلي:

$$\langle \mathbf{X_1}, \mathbf{X_2} \rangle = \mathbf{2x_1x_2 + 3y_1y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1}.$$

1. أوجد المسافة بين المتجهين $\mathbf{u} = (\mathbf{-1}, \mathbf{2})$ و $\mathbf{v} = (\mathbf{1}, \mathbf{-1})$ و أوجد الزاوية التي بينهما.
2. أوجد قيمة $\mathbf{c}$ بحيث يكون المتجه $\mathbf{v} = (\mathbf{1}, \mathbf{c})$ متعامدا على المتجه $\mathbf{u} = (\mathbf{-2}, \mathbf{3})$.

تمرين 6 :
ليكن الضرب الداخلي على الفضاء $\mathbb{R}^2$ معرفا بالقاعدة

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2x_1x_2 + 5y_1y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1.$$

1. استخدم قاعدة جرام شميت لتحويل الأساس

$$\{u_1 = (1, -1),\ u_2 = (-2, 1)\}$$

إلى أساس $\{v_1, v_2\}$، عياري و متعامد.
2. ليكن $v = av_1 + bv_2$ و $w = cv_1 + dv_2$.
أوجد $\langle v, w \rangle$ بدلالة a, b, c, d.

تمرين 7 :
ليكن $V = \mathbb{R}^3$، $X = (x_1, x_2, x_3)$ و $Y = (y_1, y_2, y_3)$.
أ) أثبت أن الدالة

$$\langle X, Y \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_3y_1$$

لا تمثل ضربا داخليا على الفضاء V.
ب) نعرف الضرب الداخلي على الفضاء V كما يلي

$$\langle X, Y \rangle = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 3x_3y_3.$$

[i] أوجد المسافة بين المتجهين $u = (-2, 1, 1)$ و $v = (3, 2, 1)$.
[ii] إذا كان $X = (2, 0, 1)$ و $Y = (-3, 1, 2)$، فأثبت أن

$$\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2.$$

تمرين 8 :
إذا كان الضرب الداخلي على الفضاء $\mathbb{R}^2$ معرفا بالقاعدة

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = 2xx' + yy'$$

استخدم قاعدة جرام شميت لتحويل الأساس

$$\{u_1 = (1, -1),\ u_2 = (2, 1)\}$$

إلى أساس عياري و متعامد.

باب 6

التحويلات الخطية

1.6 تعريف التحويلات الخطية

تعريف 1.1.6

ليكن كل من V و W فضاء متجهات و ليكن $T: V \longrightarrow W$ تطبيقا. نقول أن T تحويل خطي إذا كان لكل $u, v \in V$، $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$.
2. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

ملاحظة 12 :

إذا كان $T: V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا فإن

1. $T(0) = 0$.
2. $T(-u) = -T(u)$.
3. $T(u-v) = T(u) - T(v)$.

نظرية 2.1.6

إذا كان $T\colon V \longrightarrow W$ تطبيقا فإن T تحويلا خطيا إذا و فقط

$$T(\alpha u+\beta v)=\alpha T(u)+\beta T(v).$$

ملاحظة 13 :
إذا كان $T\colon V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا فإن

$$T(\alpha_1 u_1+\ldots+\alpha_n u_n)=\alpha_1 T(u_1)+\ldots+\alpha_n T(u_n).$$

نظرية 3.1.6

إذا كانت $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ فإن التطبيق $T_A\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ المعرف بالقاعدة $T_A(X)=AX$ لكل $X \in \mathbb{R}^n$ هو تحويلا خطيا و يسمى التحويل الخطي المقابل للمصفوفة A.

نظرية 4.1.6

ليكن $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ تحويلا خطيا و ليكن $(e_1,\ldots,e_n)$ الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^n$. عندئذ $T=T_A$ حيث $A=[a_{i,j}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ أعمدتها $T(e_1),\ldots,T(e_n)$.
تسمى المصفوفة A المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي T.

نظرية 5.1.6

إذا كان V, W فضائي متجهات وكان $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ مجموعة من المتجهات في W فإنه يوجد تحويل خطي وحيد $T\colon V \longrightarrow W$ بحيث $T(v_j) = w_j$ لكل $1 \leq j \leq n$.

2.6 نواة وصورة التحويل الخطي

تعريف 1.2.6

ليكن $T\colon V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا. نعرف نواة التحويل T والتي نرمز بها بالرمز ketT المجموعة التالية

$$\mathrm{ketT} = \{v \in V;\ T(v) = 0\}.$$

كما نعرف صورة التحويل T والتي نرمز بها بالرمز ImT المجموعة التالية

$$\mathrm{ImT} = \{T(v);\ v \in V\}.$$

نظرية 2.2.6

إذا كان $T\colon V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا فإن ketT فضاء جزئي من V و ImT فضاء جزئي من W.

تعريف 3.2.6

إذا كان $T\colon V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا فإن بعد الفضاء ketT يسمى صفرية التحويل T و نرمز بالرمز $(\mathrm{nullity}(T))$، كذلك بعد الفضاء ImT يسمى رتبة التحويل T و نرمز بالرمز $(\mathrm{rank}(T))$

ملاحظة 14 :
إذا كانت $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ و $T_A \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m =$ المعرف بالقاعدة $T_A(X) = AX$ فإن $\text{rank}T = \text{rank}A$, و $\text{Im}T = \text{col}A$.

نظرية 4.2.6

إذا كان $T \colon V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا و $\{v_1, \ldots v_n\}$ أساسا للفضاء V فإن المجموعة $\{t(v_1), \ldots T(v_n)\}$ تولد الفضاء $\text{Im}T$.

نظرية 5.2.6

مبرهنة البعد للتحويلات
إذا كان $T \colon V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا و كان $\text{dim}V = n$ فإن

$$\text{nullity}(T) + (\text{rank}(T) = n.$$

أي

$$\text{dimker}(T) + \text{dimIm}(T) = n.$$

تعريف 6.2.6

إذا كان $T \colon V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا.

1. نقول أن T أحادي أو متباين إذا تحقق لكل $u, v \in V$ ما يلي

$$T(u) = T(v) \Rightarrow u = v.$$

2. نقول أن T شامل أو غامر إذا كان $\text{Im}(T) = W$.

نظرية 7.2.6

إذا كان $T: V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا.
يكون التحويل T أحاديا إذا كان $\ker(T) = \{0\}$.

نتيجة 8.2.6

إذا كان $T: V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا و $\dim V = \dim W = n$ عندئذ يكون التحويل T أحاديا إذا و فقط إذا كان T تحويلا شاملا.

3.6 التمارين

تمارين الباب االسادس

تمرين 1 :

لتكن
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. أوجد أساسا للفضاء العمودي للمصفوقة A.
2. أوجد صفرية المصفوفة A.

تمرين 2 :

أثبت أن المصفوفتين $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ متشابهتين. (أوجد مصفوفة P لها معكوس و تحقق $PB = AP$.

تمرين 3 :

أثبت أن المصفوفتين $M = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ و $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ متشابهتين. (أوجد

مصفوفة P لها معكوس و تحقق $PM = NP$.

تمرين 4 :

1. أثبت أن المصفوفتين $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ غير متشابهتين.
2. أثبت أن المصفوفتين $A = \begin{pmatrix} 29 & 38 & -18 \\ -11 & -14 & 7 \\ 20 & 27 & -12 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
لهما نفس الرتبة ونفس المحدد ولكن ليست متشابهتين. (احسب $(A-I)^2$ و $(B-I)^2$).
3. هل المصفوفتين $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ متشابهتين.

تمرين 5 :

أثبت أن المصفوفتين $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 & ? \\ 2 & 1 & ? \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ متشابهتين.

تمرين 6 :

أوجد رتبة المصفوفات التالية

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} & 1 & 5 \\ -1 & 4 & \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & -7 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 & b \end{pmatrix}$$

تمرين 7 :

ليكن $b \neq A$. أثبت أن المصفوفتين $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ متشابهتين.

تمرين 8 :

أثبت أن المصفوفتين $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ متشابهتين.

تمرين 9 :

لتكن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ -5 & -2 & -5 \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix},$$

والمتجهات

$$u = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

1. أثبت أن
   (f_1, f_2, f_3) تمثل أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$.
2. أوجد المصفوفة A في الأساس (f_1, f_2, f_3) واستنتج A^n لكل $n \in \mathbb{N}$.

تمرين 10 :

أثبت أن المصفوفتين $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ متشابهتين. (أوجد مصفوفة P لها معكوس و تحقق $PB = AP$.

تمرين 11 :

أثبت أن المصفوفتين $M = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ و $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ متشابهتين. (أوجد مصفوفة P لها معكوس و تحقق $PM = NP$.

تمرين 12 :

1. أثبت أن المصفوفتين $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ غير متشابهتين.
2. أثبت أن المصفوفتين $A = \begin{pmatrix} 29 & 38 & -18 \\ -11 & -14 & 7 \\ 20 & 27 & -12 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
لهما نفس الرتبة ونفس المحدد ولكن ليست متشابهتين. (احسب $(A-I)^2$ و $(B-I)^2$).
3. هل المصفوفتين $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ متشابهتين.

تمرين 13 :
أثبت أن المصفوفتين $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 & ? \\ 2 & 1 & ? \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ متشابهتين.

تمرين 14 :
ليكن $\mathbf{T}\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ التحويل الخطي والذي مصفوفته بالنسبة للأساس المعتاد S للفضاء $\mathbb{R}^3$ هي

$$[\mathbf{T}]_\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

أوجد مصفوفة التحويل الخطي $[\mathbf{T}]_\mathbf{B}$ بالنسبة للأساس $\mathbf{B}$ التالي

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{u_1} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}),\ \mathbf{u_2} = (\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{3}),\ \mathbf{u_3} = (\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{4})\}.$$

تمرين 15 :
ليكن $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ التحويل الخطي الذي يحقق:

$$T(1,0,0) = 1 + X^2, \qquad T(0,1,0) = 2 + 3X^2, \qquad T(0,0,1) = -X^2.$$

1. أوجد $T(a,b,c)$، لكل $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
2. أوجد أساسا لكل من الفضائين $\ker T$ و $\mathrm{Im}T$.

تمرين 16 :

لتكن $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. أوجد رتبة و صفرية المصفوفة A.
2. أوجد أساسا للفضاء العمودي للمصفوفة A.

تمرين 17 :

ليكن الفضاء $V = \mathbb{R}^3$ و الأساسين
$B = \{v_1 = (1,1,-1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,0,1)\}$
و
$C = \{u_1 = (1,0,1), u_2 = (4,2,-1), u_3 = (1,2,0)\}$.

1. أوجد $[u_1]_B$، $[u_2]_B$، $[u_3]_B$. ($[u_1]_B$ هي إحداثيات المتجه u_1 بالنسبة للأساس B)
2. إحسب ${}_BP_C$ مصفوفة الإنتقال من الأساس C إلى الأساس B.
3. إذا كان $[v]_C = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ فأوجد كلا من $[v]_B$ و v.

باب 7

القيم والمتجهات المميزة والإستقطار

1.7 القيم والمتجهات المميزة

تعريف 1.1.7

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة و كان $\lambda \in \mathbb{R}$. نقول أن λ هي قيمة مميزة للمصفوفة A إذا وجد $X \in \mathbb{R}^n$ و $X \neq 0$ بحيث $AX = \lambda X$ و في هذه الحالة يسمى X متجه مميز بالنسبة للقيمة المميزة λ.

نظرية 2.1.7

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة و $\lambda \in \mathbb{R}$. فإن λ قيمة مميزة للمصفوفة A إلا وإذا كان $|\lambda I - A| = 0$.

تعريف 3.1.7

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة فإن
$|\lambda I - A| = 0$ يسمى كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A.

مثال 1 :
أوجد القيم المميزة للمصفوفات التالية

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.7 الإستقطار

تعريف 1.2.7

نقول أن مصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$
قابلة للإستقطار (diagonalizable) إذا وجدت مصفوفة $P \in M_n(\mathbb{R})$ لها معكوس
بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية.

نظرية 2.2.7

تكون مصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$ قابلة للإستقطار إلا وإذا وفقط إذا كان لها n متجه مميز مستقلة خطيا. وفي هذه الحالة تشكل هذه المتجهات أساسا لـ $\mathbb{R}^n$.

مثال 2 :
أثبت أن المصفوفات التالية قابلة للإستقطار و أوجد $P \in M_n(\mathbb{R})$ لها معكوس بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية ثم أوجد A^{15}.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$، $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$، $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

تعريف 3.2.7

لتكن مصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$ و λ قيمة مميزة للمصفوفة A، نعرف

$$E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n;\ AX = \lambda X\}$$

ويسمى الفضاء المميز للقيمة المميزة λ.

ملاحظة 15 :
إذا كانت λ قيمة مميزة لمصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$، فإن $E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n;\ AX = \lambda X\}$ فضاء جزئي من $\mathbb{R}^n$.

تعريف 4.2.7

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة و كانت كثيرة الحدود المميزة

$$q_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^m Q(\lambda)$$

بحيث $Q(\lambda_1) \neq 0$ فنقول أن القيمة المميزة λ_1 لها تعدد m و يسمى التعدد الجبري للقيمة المميزة λ_1 أما بعد الفضاء المميز $E_{\lambda_1} = \{X \in \mathbb{R}^n;\ AX = \lambda_1 X\}$ فيسمى التعدد الهندسي للقيمة المميزة λ_1.

نظرية 5.2.7

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة و كانت كثيرة الحدود المميزة

$$q_A(\lambda) = C(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$$

فإن A قابلة للإستقطار إلا و إذا كان التعدد الهندسي يساوي التعدد الجبري لكل قيمة مميزة للمصفوفة.

ملاحظة 16 : حالة خاصة
إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة و لها n قيمة مميزة مختلفة فإن A قابلة للإستقطار.

3.7 التمارين

تمارين الباب االسابع

تمرين 1 :
ابحث قابلية الإستقطار للمصفوفات التالية و أوجد المصفوفة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -6 \\ 18 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0&2\\0&-1&2&0\\2&-2&3&-2\\-2&0&0&3\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3&-1&1\\2&0&-1&0&-2\\0&0&1&0&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}0&2&3&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

تمرين 2 :

1. أثبت أن 1 و -1 هي قيم مميزة للمصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}m+1&m+1&1\\-m&-m&-1\\m&m-1&0\end{pmatrix}.$$

2. أوجد التعدد الجبري لكل من القيم المميزة 1 و -1.
3. أوجد أساسا للفضاء المميز $E_1=\{X\in\mathbb{R}^3;\ AX=X\}$ و استنتج قيم m بحيث تكون المصفوفة A قابلة للاستقطار.
4. أ) إذا كانت $m=0$ أوجد مصفوفة P لها معكوس ومصفوفة D قطرية حيث $D=P^{-1}AP$.
ب) إذا كانت $m=0$ احسب A^{1437}.

تمرين 3 :

أثبت أن المصفوقة

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&-1&3\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

قابلة للإستقطار و أوجد A^n لكل $n\in\mathbb{N}$.

تمرين 4 :

1. أثبت أن (-1) و 2 هي قيم مميزة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -15 & 9 \\ 9 & -16 & 9 \\ 9 & -15 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. أوجد أساسا للفضاءات المميزة
$E_{-1} = \{X \in \mathbb{R}^3;\ AX = -X\}$ و $E_2 = \{X \in \mathbb{R}^3;\ AX = 2X\}$
3. أ) أوجد مصفوفة P لها معكوس ومصفوفة D قطرية حيث $D = P^{-1}AP$.
ب) أوجد المصفوفة A^9.