كليّة العلوم – قسم الرياضيات- الفصل الصيفي 1439-1440 هـ
مقرّر 481 ريض – التحليل الحقيقي 2
اختبار النهائي – مدّة الاختبار: 3 ساعات

(س1) ليكن $I=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,dt$ و $J=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\,dt$. **(4 درجات)**

(أ) بيّن أنّ التكامل المعتل I متقارب (*إرشاد:* $\ln t\le\frac{1}{\sqrt{t}}$ في جوار 0) .

(ب) بيّن أن: $I=J$.

(ج) احسب $I+J$ ثم استنتج أن قيمة $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

(س2) ادرس تقارب ام تباعد المتسلسلات العددية التالية: **(6 درجات)**

(أ) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^n$ (ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

(ج) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-e^{1/n^2}\right)\sqrt{\ln n}$ (د) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left[\left(n+\frac{a}{n}\right)\pi\right]$ حيث $a\in\mathbb{R}$.

(س3) **(4 درجات)**

(أ) لتكن $f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ متتالية دوال معرّفة على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. بيّن أن f_n تتقارب بانتظام لدالة f قابلة للاشتقاق لكن متتالية الدوال (f_n') متباعدة.

(ب) لتكن $g_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$ متتالية دوال معرّفة على $\mathbb{R}$. بيّن أن g_n هي دوال من الصفّ الأول $C^1(\mathbb{R})$ و g_n تتقارب انتظاميا على $\mathbb{R}$ لدالة $g\notin C^1(\mathbb{R})$.

(س4) لتكن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ حيث $f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n^3}$. **(6 درجات)**

(أ) اثبت ان المتسلسلة متقاربة تقاربا انتظاميا على $\mathbb{R}$.

(ب) لكل $x\in\mathbb{R}$, نضع $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$. اثبت ان الدالة S متصلة على $\mathbb{R}$.

(ج) اثبت أن: $\int_0^{\pi}S(x)dx=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$.

(د) أثبت أن: لكل $x\in\mathbb{R}$, $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$ ثم استنتج أن:

$$\int_0^{\pi/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

(س5) **(6 درجات)**

(أ) أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$.

(ب) جد نصف قطر التقارب R للمتسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$ ثم ادرس التقارب عندما $x=\pm R$.

انتقل للصفحة الخلفيّة

(س6) **(6 درجات)**

(أ) لتكن A_n متتالية لمجموعات جزئية من $\mathbb{R}$ معرفة كالاتي:

$A_{2n}=\left[-1,2+\frac{1}{n^2}\right)$ و $A_{2n-1}=\left(-2-\frac{1}{n},1\right]$. فجد $\overline{\lim}\, A_n$ و $\underline{\lim}\, A_n$.

(ب) احسب القياس $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\left[n,n+\frac{1}{2^n}\right)\right)$

ثم احسب $\int f(x)\,d\mu$ حيث $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}\chi_{\left[n,n+\frac{1}{2^n}\right)}(x)$.

(س7) **(8 درجات)**

باستخدام نظرية التقارب المسقوف احسب النهايات التالية:

(أ) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\cos x\,dx$

(ب) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^n dx$

(ج) $\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{n}\right)}{x^2}dx$

(د) $\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x^2)}dx$

د.ابرهان

تصحيح الاختبار النهائي 481 ريض

للفصل الصيفي ١٤٤٠/١٤٣٩ هـ

السؤال ١: (4 درجات)

(أ) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt\right)$

(تكامل معتل عند الصفر)

نعلم أن $\sin t \approx t$ عندما $t\to 0$

$\ln t \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ عندما $t\to 0$

و بالتالي $\int_0^{\varepsilon} \ln(\sin t)dt \leq \int_0^{\varepsilon}\frac{dt}{\sqrt{t}}$

$\int_0^{\varepsilon}\frac{dt}{\sqrt{t}} = 2[\sqrt{t}]_0^{\varepsilon} < \infty$

و بالتالي I متقارب.

1

(ب) نعلم أن لكل $\sin t = \cos(\frac{\pi}{2}-t), t\in\mathbb{R}$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right)du$$

خذ $t=\frac{\pi}{2}-u$

فإن $dt=-du$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos u)\,du = J$$

1

(ج)

$$I+J = \int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos t)$$

$$= \int_0^{\pi/2}\ln(\sin t\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)dt$$

$$= \int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)dt + \int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2t)\,dt$$

$$= -\frac{\pi}{2}\ln 2 + K$$

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin u)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u)\,du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin u)\,du\right]$$

$u=2t$

$du=2dt$

$\sin(\pi-v)=\sin v$

$v=\pi-u$

$$= \frac{1}{2}\left[I + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ln(\sin(\pi-v))(-dv)\right]$$

1

$$K=I$$

Scanned by CamScanner

$2I = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + I$ وبالتالي

1

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

السؤال الثاني: (6 درجات)

(أ) $\sum_n u_n = \sum_n \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^n$ متسلسلة موجبة

حيث $u_n = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^n$

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

$$u_n \sim e\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

نستخدم اختبار نهاية المقارنة ، $\sum\left(\frac{1}{2}\right)^n < \infty$ متقاربة هندسية

1,5

وبالتالي $\sum_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^n$ متقاربة.

(ب) $\sum_n u_n = \sum_n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ متسلسلة موجبة

عند $n\to\infty$ $\cos\frac{1}{n} \approx 1 - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$$1-\cos\frac{1}{n} \approx \frac{1}{n^2}$$

نستخدم اختبار نهاية المقارنة $\left(\sum\frac{1}{n^2} < \infty\right.$ متسلسلة p حيث $\left.p=2>1\right)$

وبالتالي $\sum_n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ متقاربة.

1,5

(ج) $\sum u_n = \sum_{n=2}\left(1-e^{\frac{1}{n^2}}\right)\sqrt{\ln n}$ متسلسلة ~~موجبة~~

عندما $n\to\infty$ $e^{\frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$$|u_n| \approx +\frac{1}{n^2(\ln n)^{-1/2}}$$

نستخدم اختبار نهاية المقارنة . نعلم $\sum_n \frac{1}{n^2(\ln n)^{-1/2}}$ (متسلسلة Bertrand) متقاربة

وبالتالي $\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-e^{1/n^2}\right)\sqrt{\ln n}$ متقاربة تقاربا مطلقا.

1,5

(د) $\sum_n \sin\left(\left(n+\frac{a}{n}\right)\pi\right) = \sum_n (-1)^n \sin\left(\frac{a\pi}{n}\right)$

$\sin(n\pi) = 0$
$\cos(n\pi) = (-1)^n$

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

نضع $u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{a\pi}{n}\right)$

• إذا كان $a=0$ فإن $u_n=0$

• إذا غيرنا a بـ $-a$ فإن u_n تتغير علامتها لذا نفترض $a>0$.

$$|u_n| = \left|\sin\frac{a\pi}{n}\right|$$
$$\approx \frac{a\pi}{n}$$

بما أن $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة فإن $\sum |u_n|$ متباعدة.

نستطيع الآن اختبار المتسلسلات المترددة.

1,5

• $\sin\left(\frac{a\pi}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ حيث $a>0$

• نضع $f(x) = \sin(a\pi x)$ فإن $f'(x) = a\pi\cos(a\pi x)$

$f'>0$ على $[0,\frac{1}{2a}]$ وبالتالي $\sin\left(\frac{a\pi}{n}\right) \searrow$ لكل $n \geq 2a$

وبالتالي $\sum_n \sin\left(\left(n+\frac{a}{n}\right)\pi\right)$ متقاربة تقاربا شرطيا.

السؤال الثالث (4 درجات)

(أ) لكل $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$ ، $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} = 0$

إذن (f_n) تتقارب نقطيا للدالة الصفرية على $[0,\frac{\pi}{2}]$

1

$$\sup_{[0,\frac{\pi}{2}]} |f_n(x) - 0| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

1

وبالتالي (f_n) تتقارب انتظاميا للدالة الصفرية على $[0,\frac{\pi}{2}]$

$f_n'(x) = \frac{n\cos(nx)}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\cos(nx)$ ، $\{\sqrt{n}\cos(nx)\}_n$ متباعدة

(ب) لكل $x \in \mathbb{R}$ ، $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} = |x|$

(g_n) تتقارب نقطيا للدالة $g(x)=|x|$ على $\mathbb{R}$ (غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$)

1

$$\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - |x|\right| = \frac{x^2+\frac{1}{n^2}-x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|} \leq \frac{\frac{1}{n^2}}{1/n} = \frac{1}{n}$$

$$\sup_{\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

1

وبالتالي (g_n) تتقارب انتظاميا للدالة $g(x)=|x|$ على $\mathbb{R}$.

g_n هم دوال في C^1 لكن $g(x)=|x| \notin C^1(\mathbb{R})$.

السؤال الرابع (6 درجات)

(أ) لكل $x \in \mathbb{R}$ ، $\left|\frac{\sin(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$ و $\sum_n \frac{1}{n^3}$ متقاربة $p=3>1$

باستخدام اختبار فيراشتراس فان $\sum \frac{\sin(nx)}{n^3}$ متقاربة

تقاربا انتظاميا على $\mathbb{R}$.

1.5

(ب) الدوال (f_n) متصلة على $\mathbb{R}$ و متقاربة انتظاميا

على $\mathbb{R}$ و بالتالي S هي دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

0.5

(ج) $[0,\pi] \subset \mathbb{R}$ وبالتالي لدينا التقارب الانتظامي على $[0,\pi]$.

$$\int_0^\pi S(x)\,dx = \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\int_0^\pi \sin(nx)\,dx\right)$$

$$\int_0^\pi \sin(nx)\,dx = -\frac{1}{n}\left[\cos nx\right]_0^\pi = -\frac{1}{n}\left[\cos(n\pi) - \cos 0\right]$$
$$= -\frac{1}{n}\left[(-1)^n - 1\right]$$

2

وبالتالي

$$\int_0^\pi S(x)\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}\left((-1)^n - 1\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[1-(-1)^n\right]}{n^4} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

(د) الدوال (f_n) قابلة للاشتقاق و $f_n'(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$

باستخدام اختبار فيرشتراس

لكل $x\in\mathbb{R}$ $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2}$

1

و $\sum_n \frac{1}{n^2}$ متقاربة فان $\sum_n \frac{\cos(nx)}{n^2}$ متقاربة

تقاربا انتظاميا على $\mathbb{R}$ و $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \right) dx = \int_0^{\pi/2} S'(x)\, dx$$

1

$$= S\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - S(0)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

$$\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 ; & n = 2k \\ (-1)^k ; & n = 2k+1 \end{cases}$$

السؤال الخامس (6 درجات)

(أ)

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

$$A = \lim_{x\to 1} (x-1) f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-2} = -1$$

$$B = \lim_{x\to 2} (x-2) f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x-1} = 1$$

1 لكل $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{1-x}$

1 لكل $|x|<1$ $\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

لكل $|x|<2 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{2}\right|<1$ $\quad \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2(1-\frac{x}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$

وبالتالي لكل $-1<x<1$

1 $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$ (متسلسلة ماكلورين للدالة f)

حيث: $a_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ لكل $n \geq 0$ عدد صحيح.

(ب) إذا كان $|x|<1$ فإن

$$\left| \sin\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \right| \leq x^n$$

1 و $\sum x^n$ متقاربة وبالتالي $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$ متقاربة

أما إذا كان $|x|>1$ فإن

1 $$\left| \sin\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \right| \simeq \frac{|x|^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{n \ln|x|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

وبالتالي $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$ متباعدة (اختبار التباعد للمتسلسلات)

إذن $R = 1$.

عندما $x=1$، $\sum_n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \approx \sum \frac{1}{n^{1/2}}$ متباعدة

1 عندما $x=-1$ $\sum_n (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ متسلسلة متناوبة

$\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)_n$ هي متتالية تناقصية

لأن $f(x)=\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$; $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-3/2}\cos\left(x^{-1/2}\right)<0$$

و بالتالي $\sum(-1)^n\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ متقاربة شرطيا.

(6 درجات)

السؤال السادس

(أ)

$$\overline{\lim}\, A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k\geq n}A_k\right)$$

$$\underline{\lim}\, A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k\geq n}A_k\right)$$

$$\bigcup_{k\geq n}A_k=\left(\bigcup_{\substack{k\geq n\\ k\ \text{زوجي}}}A_k\right)\cup\left(\bigcup_{\substack{k\geq n\\ k\ \text{فردي}}}A_k\right)$$

$$=\left[-1;2+\frac{1}{n^2}\right)\cup\left(-2-\frac{1}{n};1\right]$$

$$=\left(-2-\frac{1}{n};2+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k\geq n}A_k\right)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-2-\frac{1}{n};2+\frac{1}{n^2}\right)=[-2,2]$$

1,5

$$\overline{\lim}\, A_n=[-2,2]$$

$$\bigcap_{k\geq n}A_k=\left(\bigcap_{\substack{k\geq n\\ k\ \text{زوجي}}}A_k\right)\cap\left(\bigcap_{\substack{k\geq n\\ k\ \text{فردي}}}A_k\right)$$

$$=[-1,2]\cap[-2,1]$$

$$=[-1,1]$$

1,5

و بالتالي $\underline{\lim}\, A_n=[-1,1]$

(ب) نضع $B_n=\left[n;n+\frac{1}{2^n}\right)$ نرى $B_i\cap B_j=\phi$ إذا $i\neq j$

و بالتالي

1,5

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}B_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu(B_n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2^n}-n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{1-1/2}=2$$

$$\int f\,d\mu = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \chi_{[n,n+\frac{1}{2^n})}\,d\mu$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}\,\mu\left([n, n+\tfrac{1}{2^n})\right)$$

1,5

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}\cdot\frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{6}{5}$$

السؤال السابع : (8 درجات)

أ) نأخذ $x \in [0,n]$ ، $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$$

$$f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos x\, \chi_{[0,n]}(x)$$

1

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-x}\cos x\, \chi_{[0,\infty)}(x)$$

$$|f_n| \le e^{-x}\cos x = g(x)$$

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx < \infty$$

باستخدام نظرية التقارب المسقوف

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos x\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx$$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx = \left[e^{-x}\sin x\right]_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx$$

تكامل بالتجزئة

$u(x) = e^{-x}$, $v'(x) = \cos x$ $\Rightarrow$ $u'(x) = -e^{-x}$, $v(x) = \sin x$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx = \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx$$

تكامل بالتجزئة

$u(x) = e^{-x}$, $v'(x) = \sin x$ $\Rightarrow$ $u'(x) = -e^{-x}$, $v(x) = -\cos x$

$$= 1 - \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx$$

$\lim_{n\to\infty} (\cos x)e^{-x} = 0$

$$2I = 1 \Rightarrow I = 1/2$$

1

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos x\,dx = 1/2$$

(ب) لكل $x \in (0,1]$,

$$\left|\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^n\right| \leq 1 = g(x)$$

1

$$\int_0^1 g(x)\,dx = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^n = 0$$

باستخدام نظرية التقارب المسقوف

1

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^n dx = 0$$

(ج) نأخذ $x>1$,

1

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{x^2}$$

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{x^2} = g(x)$$

$$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 1$$

باستخدام نظرية التقارب المسقوف

1

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{n}\right)}{x^2}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$$

(د)

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right) \frac{n}{x(1+x^2)}$$

بما أن $\frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ فإن $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1+x^2}$

1

و بما أن $\left|\frac{\sin u}{u}\right| \leq 1$ لكل u في جوار الصفر

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2} = g(x)$$

1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\tan^{-1} x\right]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

باستخدام نظرية التقارب المسقوف

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \frac{n}{x(1+x^2)}\,dx = \pi$$