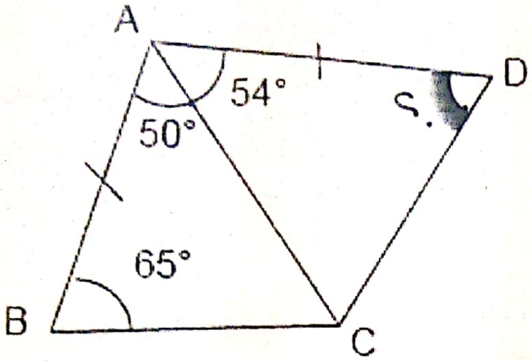
كليّة العلوم – قسم الرياضيات- الفصل الصيفي 1439-1440 هـ
مقرّر 379 ريض – اسس الهندسة الإقليدية و اللاإقليدية
اختبار الفصلي الأول – مدّة الاختبار: ساعة ونصف

السؤال الأول (5 درجات):

(1) جد قياس الزاوية $A\hat{D}C$ بحيث $AB = AD$.



(2) ليكن P , Q , R و S أربع نقاط في المستو الاقليدي E^2 بحيث لا تكون 3 نقاط منهم على نفس الاستقامة و ليكن كل من A , B , C و D منتصف القطع المستقيمة $[PQ]$, $[QR]$, $[RS]$ و $[SP]$ على التوالي . بيّن ان $(CD) \| (AB)$ و $(BC) \| (AD)$ أو متطابقة.

السؤال الثاني (10 درجات):

نعتبر في المستو الاقليدي E^2, النقاط التالية: $A(0,1)$, $B(1,2)$, $C(2,-1)$, $A'(0,0)$, $B'(1,1)$ و $C'(-2,2)$.

أ) اعط صيغة التّناظر بالنسبة للمستقيم (AC).

ب) بيّن أنّ المثلثين ABC و $A'B'C'$ متطابقان و جد صيغة التقايس الذي يحوّل ABC إلى $A'B'C'$ و حدّد عناصره.

السؤال الثالث (10درجات):

(1) عيّن نوع التحويلات المعرّفة على المستوى الاقليدي E^2 وجد عناصرها:

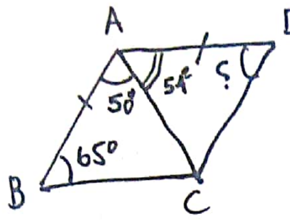
أ) $$\varphi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

ب) $$\psi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2) حدّد نوع التركيب $\psi \circ \varphi$ وجد عناصره.

تصحيح الاختبار الشهري الأول للفصل الصيفي ١٤٤٠/٣٩ هـ

مقرر ٣٧٩ ريض (د/ برهان)



السؤال الأول: (5 درجات)

① بالنسبة للمثلث ABC،

$B\hat{A}C + A\hat{B}C + B\hat{C}A = 180°$

$\underset{50}{''} + \underset{65}{''} + B\hat{C}A = 180$

و $B\hat{C}A = 65° = A\hat{B}C$ وبالتالي (ABC) ذات ضلعين متساوين $AC = BA$

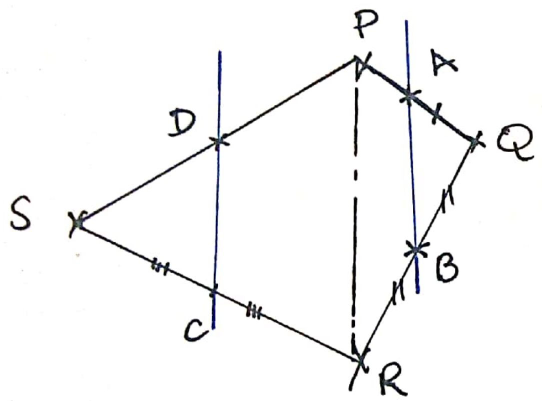
② وبما أن $AB = AD$ فإن $AC = AD$

يعني المثلث ACD متساوي ضلعين عندئذ $A\hat{C}D = C\hat{D}A$

ضع $x = A\hat{D}C$ لدينا $2x + 54 = 180$ ط بالتالي $x = \frac{180-54}{2} = 63°$

قياس الزاوية $A\hat{D}C$ هو $63°$.

② نفترض أن P,Q,R ليس على نفس الاستقامة



$A = P * Q$ منتصف $[P,Q]$

$B = Q * R$ منتصف $[Q,R]$

$\frac{QA}{QP} = \frac{QB}{QR} = \frac{1}{2}$

نظرية طالس

(*) $(AB) // (PR)$

بنفس الطريقة للمثلث SPR

$C = S * R$

$D = S * P$

③ وبالتالي $(DC) // (PR)$ (**)

فنستنتج من خلال (*) و (**) أن $(AB) // (DC)$.

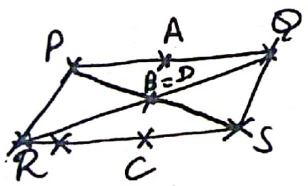
بنفس الطريقة للمثلثين

$$(AD)//(BC) \Leftarrow \begin{cases} (AD) // (QS) \ , \ \Delta PQS \\ (BC) // (QS) \ ; \ \Delta QRS \end{cases}$$

و

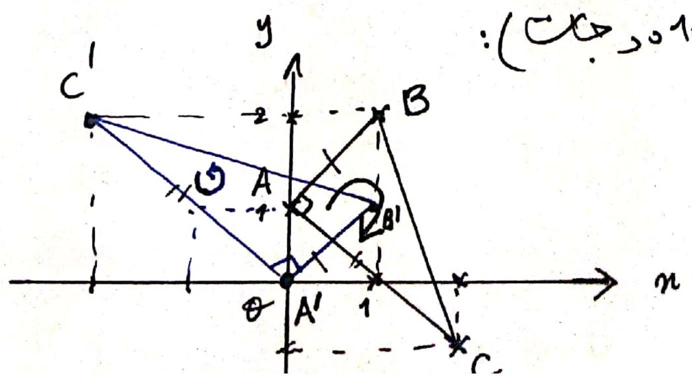
⚠ إذا كان RSQP متوازي الأضلاع

عندئذ $(AB) = (CD)$



السؤال الثاني: (١٠ درجات)

(أ)



$x_C = 2$; $x_A = 0$

$y_C = -1$; $y_A = 1$

② (أ) معادلة المستقيم (AC):

$$y - y_A = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}(x - x_A)$$

$$y - 1 = \frac{-1-1}{2-0}(x-0)$$

$$y - 1 = -x$$

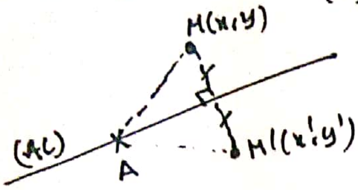
①

$$\boxed{x + y - 1 = 0}$$

$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \perp (AC)$

$S_{(AC)}(M(x,y)) = M'(x',y') \iff \overrightarrow{MM'} = -2\langle \overrightarrow{AM} | \vec{n} \rangle \vec{n}$

($S_{(AC)}$ طم التناظر حول المحور (AC))



$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \cancel{2}\frac{[(x-0)+(y-1)]}{\cancel{4}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x - x - y + 1 \\ y' = y - x - y + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = -x + 1 \end{cases}$$

②

صيغة التناظر بالنسبة للمستقيم (AC).

$$\boxed{\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$$

(ب) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}x_C - x_A\\y_C - x_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-0\\-1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow AC = \|\overrightarrow{AC}\| = 2\sqrt{2}$

نرى أن $(AB) \perp (AC) \iff \langle \overrightarrow{AB} | \overrightarrow{AC} \rangle = 0$

$\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix}1-0\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ وبالتالي $A'B' = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix}-2-0\\2-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ وبالتالي $A'C' = 2\sqrt{2}$

$(A'B') \perp (A'C')$ $\langle \overrightarrow{A'B'} | \overrightarrow{A'C'} \rangle = 0$

و بالتالي المثلثين ABC و $A'B'C'$ متطابقين.

①

$$M_1 = \begin{array}{cc} \overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AC} \\ \end{array} \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & -2\end{pmatrix}\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \Rightarrow M_1^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & -2\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{array}{cc} \overrightarrow{A'B'} & \overrightarrow{A'C'} \\ \end{array} \begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array}$$

مصفوفة التقايس φ هي

$$A_\varphi = M_2 M_1^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -2\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A_\varphi = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & -4\\-4 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\varphi(M(x,y)) = M'(x',y') \iff \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x - x_A\\y - y_A\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_{A'}\\y_{A'}\end{pmatrix}$$

$\varphi(A) = A'$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-0\\y-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

(4

③

$$\boxed{\varphi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$A_\varphi^T A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_{\mathbb{E}^2}$$

$$|A_\varphi| = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

وبالتالي التقايس φ هو انعكاس > إما محوري / إما انزلاقي.

- ندرس النقاط الثابتة:

نضع $L = \{M(x,y) \in \mathbb{E}^2 / \varphi(M) = M\}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-1 \\ x \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y-1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = x-1 \\ 0 = -1 \end{matrix}$$

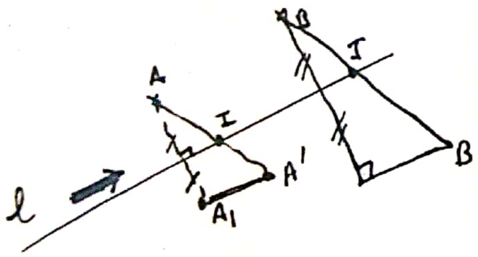
↯

وبالتالي $L = \emptyset$

يعني φ هو انعكاس انزلاقي $\varphi = t_{\vec{u}} \circ S_l$

حيث $\vec{u} \parallel l$

• بما أن $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$ فان l يمر من $I = \varphi(A) * A$ و $J = \varphi(B) * B$



$$I = \left(\frac{x_A + x_{A'}}{2} ; \frac{y_A + y_{A'}}{2}\right) = (0, 1/2)$$

$$J = \left(\frac{x_B + x_{B'}}{2} ; \frac{y_B + y_{B'}}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$$

$$l: y - \frac{1}{2} = \frac{3/2 - 1/2}{1-0}(x - 0)$$

③

$$y - \frac{1}{2} = x \Leftrightarrow \boxed{x - y + \frac{1}{2} = 0}$$

$$t_{2\vec{u}} = \varphi \circ \varphi$$

$$t_{2\vec{u}}(A) = \varphi(\varphi(A)) = \varphi(A') = \varphi(0,0) = (-1,0) = L$$

$$2\vec{u} = \vec{AL} = \begin{pmatrix} -1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{u} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

. السؤال الثالث (١٥ درجة)

1 كل من φ و ψ هم تحويلات تآلفية على E^2

مصفوفتاهما $A_\varphi = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$ و $A_\psi = \frac{\sqrt2}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$

$$A_\varphi^T \cdot A_\varphi = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}25&0\\0&25\end{pmatrix} = Id_{E^2}(\varphi)$$

و بالتالي φ هو تقايس على E^2

1

$$|A_\varphi| = \frac{1}{25}\begin{vmatrix}3&4\\4&-3\end{vmatrix} = \frac{1}{25}(-25) = -1$$

و بالتالي φ هو انعكاس حول محور انزلاقي (تحصيل انعكاس حول محور وانسحاب)

• ندرس النقاط الثابتة: نضع $\Lambda = \{M(x,y) \,/\, \varphi(M)=M\}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}12\\-6\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}(3x+4y+12)\\ y = \frac{1}{5}(4x-3y-6)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x = 3x+4y+12\\ 5y = 4x-3y-6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x-4y=12\\ -4x+8y=-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2y=6\\ x-2y=\frac{3}{2}\end{cases}$$

$6 = 3/2$ ↯

و بالتالي $\Lambda = \emptyset$

إذن φ هو تحصيل انسحاب وانعكاس محوري

أي φ انعكاس انزلاقي (Glide reflection)

$$\varphi = t_{\vec u} \circ S_l = S_l \circ t_{\vec u}$$

نضع $O' = \left(\frac{12}{5} ; -\frac{6}{5}\right) = \varphi(0,0) = \varphi(O)$

$A' = \left(\frac{19}{5} ; -1\right) = \varphi(1,1) = \varphi(A)$

$I = O * O'$

$J = A * A'$

$l = (IJ)$

3

$I = \left(\frac{12}{10} ; -\frac{6}{10}\right) = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

$J = \left(\frac{24}{10} ; 0\right) = \left(\frac{12}{5}, 0\right)$

• معادلة المستقيم l:

$$y - 0 = \left(\frac{0+3/5}{\frac{12}{5}-\frac{6}{5}}\right)\left(x - \frac{12}{5}\right)$$

$$y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{12}{5}\right) \Leftrightarrow \boxed{x - 2y - \frac{12}{5} = 0}$$

$$t_{2\vec u}(O) = \varphi\circ\varphi(O) = \varphi\circ\varphi(0,0) = \varphi\left(\frac{12}{5}, -\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{72}{25}, \frac{36}{25}\right)$$

و بالتالي $\boxed{\vec u = \frac{36}{25}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}$

$$A_\psi = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$ (ب)

$$A_\psi^T A_\psi = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = Id_{/E^2}$$

و بالتالي ψ هو تقايس

1

$$|A_\psi| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 1$$ بما أن

فان ψ هو دوران

$\psi = R_{(\Omega,\theta)}$ مركزه Ω وزاويته θ.

لدينا

$$tr\, A_\psi = \sqrt{2} = 2\cos\theta$$

1

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{4}} \Leftarrow \begin{matrix}\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta = +\frac{\sqrt{2}}{2}\end{matrix}$$

• مركزه $\Omega(x_0, y_0)$; $\psi(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2x_0 = \sqrt{2}x_0 - \sqrt{2}y_0 + 2 - 2\sqrt{2}\\ 2y_0 = \sqrt{2}x_0 + \sqrt{2}y_0 - 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_0 - y_0) + 1 - \sqrt{2}\\ y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_0 + y_0) - 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2-\sqrt{2})x_0 + \sqrt{2}y_0 = 2(1-\sqrt{2})\\ -\sqrt{2}x_0 + (2-\sqrt{2})y_0 = -2\end{cases}$$

كرامر

$$\begin{vmatrix}2-\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 2-\sqrt{2}\end{vmatrix} = (2-\sqrt{2})^2 + 2 \neq 0$$
$$= 4 + 2 - 4\sqrt{2} + 2$$
$$= 4(2-\sqrt{2})$$

$$x_0 = \frac{1}{4(2-\sqrt{2})}\begin{vmatrix}2(1-\sqrt{2}) & \sqrt{2}\\ -2 & 2-\sqrt{2}\end{vmatrix}$$

$$x_0 = \frac{1}{4(2-\sqrt{2})}\left[2(1-\sqrt{2})(2-\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}\right]$$

$$x_0 = \frac{4(2-\sqrt{2})}{4(2-\sqrt{2})} = 1$$

$$y_0 = \frac{1}{4(2-\sqrt{2})}\begin{vmatrix}2-\sqrt{2} & 2(1-\sqrt{2})\\ -\sqrt{2} & -2\end{vmatrix}$$

$$y_0 = \frac{-2(2-\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{4(2-\sqrt{2})}$$

2

$$y_0 = \frac{-8+4\sqrt{2}}{4(2-\sqrt{2})} = -1$$

مركز الدوران $\boxed{\Omega = (1,-1)}$

2

نضع $h = \psi \circ \varphi$ (تحصيل انعكاس انزلاقي

مع دوران فهو انعكاس

1

⑥

$$M'(x',y') = h(M(x,y)) = t(\varphi(x,y))$$
$$= t\left(\frac{1}{5}(3x+4y+12) ; \frac{1}{5}(4x-3y-6)\right)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{10}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3x+4y+12 \\ 4x-3y-6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{10}\begin{pmatrix} 3x+4y+12-4x+3y+6 \\ 3x+4y+12+4x-3y-6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{10}\begin{pmatrix} -x+7y+18 \\ 7x+y+6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{10}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{18\sqrt{2}}{10}+1-\sqrt{2} \\ \frac{6\sqrt{2}}{10}-1 \end{pmatrix}$$

- ندرس النقاط الثابتة لـ h :

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{10}(-x+7y) + \frac{9}{5}\sqrt{2} + 1-\sqrt{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{10}(7x+y) + \frac{3\sqrt{2}}{5} - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{10}{\sqrt{2}}x = -x+7y + \frac{10}{\sqrt{2}}\left(\frac{9}{5}\sqrt{2}+1-\sqrt{2}\right) \\ \frac{10}{\sqrt{2}}y = 7x+y + \frac{10}{\sqrt{2}}\left(\frac{3\sqrt{2}}{5}-1\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(1+\frac{10}{\sqrt{2}}\right)x - 7y = 18 + \frac{10}{\sqrt{2}} - 10 = 8 + \frac{10}{\sqrt{2}} \\ -7x + \left(\frac{10}{\sqrt{2}}-1\right)y = 6 - \frac{10}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

المصفوفة الموسعة :

1
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1+\frac{10}{\sqrt{2}} & -7 & 8+\frac{10}{\sqrt{2}} \\ -7 & \frac{10}{\sqrt{2}}-1 & 6-\frac{10}{\sqrt{2}} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{2}+10} & \frac{10+8\sqrt{2}}{\sqrt{2}+10} \\ -7 & \frac{10}{\sqrt{2}}-1 & 6-\frac{10}{\sqrt{2}} \end{array}\right]$$

يعني h هو انعكاس انزلاقي

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{2}+10} & \frac{10+8\sqrt{2}}{10+\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 6-\frac{10}{\sqrt{2}}+\frac{70+56\sqrt{2}}{\sqrt{2}+10} = \frac{12+60\sqrt{2}-10\sqrt{2}-100+70\sqrt{2}+112}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+10)} \end{array}\right]$$

$12 \neq 0$