جامعة الملك سعود
King Saud University

كليّة العلوم – قسم الرياضيات- الفصل الصيفي 1439-1440 هـ
مقرّر 481 ريض – التحليل الحقيقي 2
اختبار الفصلي الثاني – مدّة الاختبار: ساعة ونصف

(1) ليكن $a\in\mathbb{R}$, ادرس التقارب النقطي و التقارب المنتظم على الفترة $(0,+\infty)$ للمتتالية الدوال: $f_n(x)=n^a x\, e^{-nx}$ حيث $n\geq 1$ عدد صحيح.
(4 درجات)

(2) لتكن $g_n(x)=\begin{cases}\dfrac{n\,x^{n-1}}{1+x}; & 0\leq x<1\\ 1; & x=1\end{cases}$ متتالية دوال. بيّن أن:
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_0^1 g_n(x)\,dx\right)\neq\int_0^1\left(\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)\right)dx$. هل أن المتتالية $(g_n)_n$ متقاربة انتظاميا على $[0,1]$؟
علل إجابتك.
(3 درجات)

(3) اثبت ان المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}$ تتقارب نقطيا إذا وفقط إذا كان $x\in(-1,1)$ وتتقارب انتظاميا على $[-a,a]$ لكل $a\in(0,1)$.
(4 درجات)

(4) بيّن أن $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+x^n}$ متقاربة تقاربا انتظاميا على $[-1,1]$.
(<u>إرشاد</u>: ادرس : $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^n}{n+x^n}-\dfrac{(-1)^n}{n}\right]$)
(4 درجات)

(5) جد مفكوك ماكلورين للدالة $f(x)=\dfrac{x^2}{8+x^3}$ ثم استنتج متسلسلة القوى للدالة $g(x)=\ln\left(8+x^3\right)$ و ماهي فترة تقاربها ؟
(4 درجات)

(6) جد مفكوك ماكلورين للدالة $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ ثم احسب قيمة تقريبية للتكامل $\int_{1/2}^{1}\dfrac{\sinh x}{x}dx$.
(3 درجات)

(7) اثبت المساواة التالية : $\int_0^1\dfrac{x^p}{2-x^2}dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\left(2^{n+1}\right)(2n+p+1)}$ لكل $p\geq 0$ ثم استنتج ان $\ln 2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\,2^n}$.
(3 درجات)

تصحيح الاختبار التحريري الثاني 481 ريض
للفصل الصيفي

1 ① ليكن $a\in\mathbb{R}$. لكل $x>0$ ، $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{نقطيا}} 0$

اذا كان $x=0$ ، $f_n(0)=0$

$$\sup_{(0,\infty)} |f_n(x)-0| = \sup_{(0,\infty)} |n^a x e^{-nx}|$$

$$f_n'(x) = n^a e^{-nx} - n^{a+1} x e^{-nx}$$
$$= n^a e^{-nx}(1-nx)$$

1

x	0		$1/n$		∞
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$$f_n\left(\tfrac1n\right) = n^a \cdot \frac1n e^{-1} = \frac{n^{a-1}}{e}$$

و بالتالي

$$\sup_{(0,\infty)} |f_n| = \frac{n^{a-1}}{e}$$

2 إذا كان $a\geq 1$ فان (f_n) لا تتقارب بانتظام على $(0,\infty)$

أما إذا كان $a<1$ فان (f_n) تتقارب بانتظام للدالة الصفرية على $(0,\infty)$

② $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{نقطيا}} 0$ لأن $\lim_{n\to\infty} x^{n-1}=0$ لكل $0<x<1$

1
$$\int_0^1 \left(\lim_n g_n(x)\right) dx = 0$$

$$\int_0^1 g_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{n x^{n-1}}{1+x}\,dx = \left[\frac{x^n}{1+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx$$

$$u'(x) = n x^{n-1} \qquad u(x) = x^n$$
$$\Rightarrow$$
$$v(x) = \frac{1}{1+x} \qquad v'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\int_0^1 g_n(x)\,dx = \frac12 + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx$$

1,5
$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx = \frac12 \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx = 0$$

0.5 * (g_n) لا تتقارب بانتظام على $[0,1]$ لأن

إذا كانت (g_n) تتقارب بانتظام على $[0,1]$ فإن لدينا

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 g_n(x)\,dx\right) = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx$$

③ إذا كانت $|x|>1$ فإن $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=1$ وبالتالي $\sum_n \frac{x^n}{1+x^n}$ متباعدة.

1

أما إذا كانت $|x|<1$ فإن $\frac{x^n}{1+x^n}\underset{n\to\infty}{\sim}$ لهذا نضع $u_n=\frac{x^n}{1+x^n}$. نستخدم اختبار النسبة

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|\left|\frac{1+x^n}{1+x^{n+1}}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|=L$$

فنستنتج أن $\sum_n \frac{x^n}{1+x^n}$ متقاربة تقاربا نقطيا إذا وفقط $x\in(-1,1)$

1

ليكن $a\in(0,1)$; و $|x|<a$ فإن لدينا:

$$\left|\frac{x^n}{1+x^n}\right| \leq |x|^n \leq a^n$$

لكن $\sum_n a^n$ متقاربة لأن $0<a<1$

2

باستخدام مبرهنة فيرشتراس ، نستنتج أن:

$\sum_n \frac{x^n}{1+x^n}$ متقاربة بانتظام على $[-a,a]$ لكل $0<a<1$.

④ ندرس $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n+x^n}-\frac{(-1)^n}{n}\right]$

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^n} - \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^n n-(-1)^n(n+x^n)}{n(n+x^n)}$$

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(n+x^n)}$$

لكل $-1\leq x\leq 1$

$$|u_n(x)| = \frac{|x|^n}{n(n+x^n)} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

2

نعلم أن $\sum_n \frac{1}{n(n-1)}$ متقاربة ($\sum_n \frac{1}{n(n-1)} \overset{\text{بالمقارنة}}{\sim} \sum \frac{1}{n^2}$)

باستخدام مبرهنة فيرشتراس فإن $\sum_n\left[\frac{(-1)^n}{n+x^n}-\frac{(-1)^n}{n}\right]$ متقاربة

1 تقاربا انتظاميا على $[-1,1]$

1 لكن نعلم أن $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ (متسلسلة متناوبة عددية متقاربة)

فنستنتج أن $\sum_{n} \frac{(-1)^n}{n+x^n}$ متقاربة تقاربا انتظاميا على $[-1,1]$

5 نعلم أن $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$ لكل $-1<u<1$

1 $$\frac{1}{8+x^3} = \frac{1}{8\left(1-\left(-\frac{x}{2}\right)^3\right)} = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)^{3n}$$

لكل $-1<\left(-\frac{x}{2}\right)^3<1$ $\quad \frac{1}{8+x^3} = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{2^{3n}}x^{3n}$

لكل $-2<x<2$ $\quad \frac{1}{8+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{2^{3(n+1)}}x^{3n}$

1 لكل $-2<x<2$ $\quad f(x) = \frac{x^2}{8+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{2^{3(n+1)}}x^{3n+2}$

نعلم أن $\ln(8+x^3) - \ln 8 = \int_0^x \frac{3t^2}{8+t^3}\,dt$

وبالتالي

لكل $-2<x<2$ $\quad g(x) = \ln(8+x^3) = \ln 8 + 3\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{2^{3(n+1)}}t^{3n+2}\right)dt$

1 باستخدام مبرهنة التكامل للمتسلسلات القوى

$$g(x) = 3\ln 2 + 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{2^{3(n+1)}}\left(\int_0^x t^{3n+2}\,dt\right)$$

لكل $-2<x<2$ $\quad g(x) = \ln(8+x^3) = 3\ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{2^{3(n+1)}(n+1)}x^{3(n+1)}$

1 لكل $-2<x<2$ $\quad \ln(8+x^3) = 3\ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\,2^{3(n+1)}}x^{3(n+1)}$

6 نعلم أن $e^u = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}$ لكل $u\in\mathbb{R}$

1 وبالتالي $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}$; $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ لكل $x\in\mathbb{R}$

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n\right]$$

لكل $x \in \mathbb{R}$ $\quad \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1-(-1)^n}{2}\right] \frac{x^n}{n!}$

1 لكل $x \in \mathbb{R}$ $\quad \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$

$$\sinh x \approx x\left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)\right)$$

$x \neq 0 \qquad \frac{\sinh x}{x} \approx 1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}$

1

$$\int_{1/2}^{1} \frac{\sinh x}{x}\,dx \approx \int_{1/2}^{1}\left[1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right]dx$$

$$\approx \left[x + \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600}\right]_{1/2}^{1}$$

$$\approx \left[\left(1 + \frac{1}{18}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8\times 18}\right)\right]$$

$$\approx \frac{1}{2} + \frac{7}{8\times 18}$$

7 لدينا $p \geq 0$

$$\int_0^1 \frac{x^p}{2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^p \cdot \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

لأن $0 < x < 1$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^p \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n dx$$

2

نستخدم مبرهنة التكامل للمتسلسلات

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^p \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}\right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}\left(\int_0^1 x^{p+2n}\,dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}(2n+p+1)}$$

1

الآن خذ $, p = 1$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{-2x}{2-x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}(2n+2)}$$

$$-\frac{1}{2}\left[\ln(2-x^2)\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\left[0 - \ln 2\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}\,2(n+1)} \Leftrightarrow \ln 2 = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N\,2^N}$$