~~تصحيح~~

جامعة الملك سعود King Saud University	كلية العلوم – قسم الرياضيات	الاختبار النهائي للمقرر 343 ريض للفصل الصيفي 1437-1436 هـ
الإسم: .... الرقم الجامعي:..............................		الزمن: 3 ساعات. الدرجة:

ملاحظات : 1. عدد الورقات 5 2. استخدم خلف الورقات كمسودة.

السؤال الأول (5 درجات):

إذا كان $g=(g_1,g_2,g_3)\in G=\mathbb{Z}_{12}\times U_{14}\times S_{13}$ حيث

$g_1=3,\quad g_2=9,\quad g_3=(1,5,3,7)(2,6,4,8,12,13)(2,7,3,5)$.

املأ الفراغات التالية:

0,5 + 0,5 (1) $|g_1|= 4$ (2) $|g_2|= 3$

0,5 + 0,5 (3) $|g_3|= 8$ (4) $|g|= lcm(4,3,8)=24.$

0,5 + 0,5 (5) $<g>\cong \mathbb{Z}_{24}$ (6) $Aut(<g>)\cong Aut(\mathbb{Z}_{24})\simeq U_{24}.$

0,5 + 1,5 (7) $g_3 \notin A_{13}$ (8) $g^{-1}=(9,11,(1,7,13,12,8,4,6,2)).$

$4g_1\equiv 0 \bmod 12$; $g_2^3=1 \bmod 14$ $(U_{14}\simeq \mathbb{Z}_{14}^{\times})$

$$g_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 2 & 7 & 4 & 3 & 6 & 1 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 3 & 4 & 1 & 12 & 9 & 10 & 11 & 13 & 2 \\ \hline 2 & 6 & 3 & 8 & 5 & 4 & 1 & 12 & 9 & 10 & 11 & 13 & 7 \end{pmatrix}\in S_{13}\ ;\quad U_{14}=\{1,3,5,7,9,11,13\}$$

$g_3=(1,2,6,4,8,12,13,7).$ وذلك لتحصيل 7 ناقلات
دورة طولها 8
إذن أن g_3 هي فردية.

$|g|=lcm(4,3,8)=24.$

$<g>$ زمرة دورية ذات رتبة 24 من G

$g_1^{-1}=9$; $9+3\equiv 0 \bmod 12$

$g_2^{-1}=g_2^2=11.$

$<g_2>=\{1,9,11\}\leq U_{14}.$

$<g_1>=\{0,3,6,9\}\leq \mathbb{Z}_{12}.$

السؤال الثاني (7 درجات):

(1) لتكن $G=<a>$ زمرة دورية. أثبت مايلي:

(أ) إذا كانت G منتهية رتبتها n فإن $G\cong\mathbb{Z}_n$. (درجتان)

- بما أن $G=<a>$. نأخذ $x\in G$ فإنه يوجد $l\in\mathbb{Z}$ بحيث $x=a^l$.
- نأخذ التطبيق: $\varphi: G\longrightarrow(\mathbb{Z}_n,+)$. φ هو تشاكل لأن

1 $x=a^l\longmapsto[l]$

$\varphi(\underbrace{a^l}_{x}\underbrace{a^k}_{y})=\varphi(a^{l+k})=[l+k]=[l]+[k]=\varphi(\underbrace{a^l}_{x})+\varphi(\underbrace{a^k}_{y}).$

• φ أحادي لأن $\varphi(x)=\varphi(y)\Leftrightarrow\varphi(a^l)=\varphi(a^k)$

1 $\Leftrightarrow [l]=[k] \Leftrightarrow n\mid l-k \Leftrightarrow a^{l-k}=e\Leftrightarrow a^l=a^k\Leftrightarrow x=y.$

لأن $|l-k|<n$

• φ شاملاً لأن $|G|=|\mathbb{Z}_n|=n$.

فنستنتج أن φ هو تماثلاً وبالتالي $G\simeq\mathbb{Z}_n$.

(ب) إذا كانت G غير منتهية فإن $\mathbb{Z}$. $G \cong \mathbb{Z}$.

(درجة)

- نأخذ التطبيق $\varphi : G \to \mathbb{Z}$ ، $x = a^l \to l$

0,5 • φ تشاكلاً لأن $\varphi(a^l . a^k) = \varphi(a^l) + \varphi(a^k)$ ، $l + k = l + k$

• φ أحادياً $\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow \varphi(a^l) = \varphi(a^k) \Leftrightarrow l = k \Leftrightarrow x = y$

0,5 • φ شاملاً لأن $G = \langle a \rangle$. و بالتالي φ تماثلاً يعني $G \simeq \mathbb{Z}$

(2) لتكن G زمرة رتبتها pq حيث p و q أعداد أولية و $p > q$. فاثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية **واحدة** على الأكثر رتبتها p .

(درجتان)

- نستخدم البرهان بالتناقض . نفترض أنه يوجد زمرتين جزئية H, K مختلفتين من G لهما رتبة p.

لدينا $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = \frac{p^2}{|H \cap K|} < pq = |G|$ و $H \cap K \leq H$ ، $H \cap K \leq K$

2 إذن . $|H \cap K| > 1$. بما أن $|H \cap K| \,\big|\, |H| = p$ (لاجرانج)

فإن $|H \cap K| = p$ و بالتالي $H \cap K = H$, كذلك $H \cap K = K$.

يعني $H = K$ ↯ هذا مستحيل.

لذا يوجد زمرة جزئية واحدة على الأكثر رتبتها p .

(3) لتكن G زمرة منتهية غير ابدالية من الرتبة p^3 حيث p عدد أولي و ليكن $Z(G) \neq \{e\}$. أثبت أن: $Z(G)$ زمرة دورية.

(درجتان)

- بما أن $Z(G) \triangleleft G$ فإن $|Z(G)|$ يقسم $|G|$ (لاجرانج).

ولذا فإن $|Z(G)| = p$ أو $|Z(G)| = p^2$ (لأن $Z(G) \neq \{e\}$).

1 • إذا كان $|Z(G)| = p^2$ فإن $|G/Z(G)| = p$ وبالتالي $G/Z(G)$ دورية

ومنه G ابدالية ↯ مستحيل (لأن G غير ابدالية)

1 • إذا كان $|Z(G)| = p$ فبالتالي $Z(G) \simeq \mathbb{Z}_p$ يعني $Z(G)$ هي زمرة دورية.

السؤال الثالث (5 درجات): لتكن G زمرة تؤثر على مجموعة غير خالية X .

(1) عرف مثبتة x (G_x) و مدار (x) $Orb(x)$ حيث $x \in X$.

(درجتان)

نأخذ $x \in X$ ،

1 (مثبتة x) $G_x = \{ g \in G \,/\, g * x = x \}$.

1 (مدار x) $Orb(x) = \{ g * x \,;\, g \in G \}$.

(2) نفترض أن $|G|=33$ و $|X|=19$. أثبت أنه يوجد مدار يحتوي على عنصر وحيد. (3 درجات)

- نفترض أنه لا يوجد مدار يحتوي على عنصر وحيد (بالتناقض)
- بما أن $|G|=33$ فإن طول المدارات 3 أو 11.

1 • نضع n عدد المدارات ذات طول 3 و m عدد المدارات ذات طول 11. من خلال معادلة الفصول

1 $$|X| = \sum_{x\in X} |orb(x)|$$

فإن $19 = 3n + 11m$ لكن هذه المعادلة

1 ليس لها حل في $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

و بالتالي يوجد على الأقل مدار يحتوي على عنصر وحيد.

السؤال الرابع (7 درجات):

(1) لتكن $H \leq G$ حيث $|G|=80$ و $|H|=16$. بيّن أن G غير بسيطة. (درجتان)

$[G:H]=\frac{|G|}{|H|}=\frac{80}{16}=5$ .. باستخدام اختبار الدليل $80=|G| \nmid 5!=120$

2 فإن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة

و بالتالي G غير بسيطة.

(2) نصّ نظرية سيلو الثالثة. (درجتان)

- إذا كانت G زمرة منتهية من الرتبة $p^n m$ حيث p عددا أوليا و $n\geq 1$ عدد صحيح و $p\nmid m$.

إذا كان n_p عدد زمر سيلو الجزئية من النوع p فإن:

- $n_p = 1 \mod (p)$ 1
- $n_p \mid |G|$ 2

(3) لتكن G زمرة ذات رتبة 30. أثبت أنها غير بسيطة. (3 درجات)

- لدينا $|G| = 30 = 2\times3\times5$ باستخدام مبرهنة سيلو الثالثة

1,5 $n_3=\{1,10\} \Leftarrow \begin{cases} n_3 = 1 \mod 3 \\ n_3 \mid 10 \end{cases}$ || $n_2 \in\{1,3,5,15\} \Leftarrow \begin{cases} n_2 = 1 \mod 2 \\ n_2 \mid 15 \end{cases}$

$n_5\in\{1,6\} \Leftarrow \begin{cases} n_5 = 1 \mod 5 \\ n_5 \mid 6 \end{cases}$.

- نفترض أن $n_3=10$ و $n_5=6$. 10 زمر سيلو من نوع 3 يعني لدينا 20 عنصر مخالف لـ e ذات رتبة 3.

1,5 6 زمر سيلو من نوع 5 يعني لدينا $6\times4=24$ عنصر مخالف لـ e ذات رتبة 5

و بالتالي $45=20+24+1>|G|$ ↯ هذا مستحيل لذا $n_3=1$ أو $n_5=1$

يعني G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية فعلية $Syl_3(G)$ أو $Syl_5(G)$ يعني G غير بسيطة.

السؤال الخامس (16 درجة): بيّن أيًا من العبارات التالية صحيحة وأيها خاطئة مع تعليل إجابتك:

(1) توجد زمرة G و $H, K \leq G$ بحيث $|G| = 24, |H| = 6, |K| = 8, |H \cap K| = 3$. (درجتان)

خاطئ لأن $H \cap K \leq K$ باستخدام نظرية لاجرانج

يعني $|H \cap K| \,\big|\, |K|$ أي $3 | 8$ مستحيل.

2

(2) A_3 هي زمرة دورية. (درجتان)

صحيح.

$|A_3| = \frac{3!}{2} = 3$.

$A_3 \simeq \mathbb{Z}_3$

$\mathbb{Z}_3$ دورية فإن A_3 دورية.

$\sigma = (1,2,3)$

$A_3 = \langle \sigma \rangle = \{I, \sigma, \sigma^2\}$

2

(3) $A_n \lhd S_n$ (A_n زمرة التناوب) و $|A_n| = \frac{n!}{2}$. (درجتان)

صحيح، خذ: $\varphi : S_n \to \{-1, 1\}$ تشاكل لأن: $\varphi(\sigma \circ \mu) = \varphi(\sigma)\varphi(\mu)$

$\sigma \to \begin{cases} 1 ; & \sigma \text{ زوجي} \\ -1 ; & \sigma \text{ فردي} \end{cases}$

$A_n = \ker \varphi = \varphi^{-1}(\{1\})$

نعلم أن: $A_n = \ker \varphi \lhd S_n$ وباستخدام مبرهنة التماثل

$S_n / A_n \simeq \mathbb{Z}_2$ فإن $|A_n| = \frac{n!}{2}$.

2

(4) يوجد تشاكل **غير تافه** بيّن اي زمرتين. (درجتان)

خاطئ، خذ $\varphi : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_4$ تشاكل.

$|\mathbb{Z}_3| = 3$, $|\mathbb{Z}_4| = 4$, $\gcd(3,4) = 1$ فإن φ هو تشاكل تافه

لأن عندما نأخذ $[a] \in \mathbb{Z}_3$ لدينا $o(\varphi([a])) \,|\, o([a])$ و $o([a]) | 3$ و $o(\varphi(a)) | 4$

لأن $\gcd(3,4) = 1$ فإن $o(\varphi([a])) = 1$ وبالتالي $\varphi(a) = [0]$

يعني $\varphi : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_4$, $[a] \to [0]$ تافه.

2

(5) إذا كانت $Z\left(Aut\left(G\right)\right)=\{I\}$ فإن $Z\left(G\right)=\{e\}$. (درجتان)

خاطئ؛ لأن خذ $G=\mathbb{Z}_2$.

لدينا $Z(Aut(\mathbb{Z}_2))=\{I\}$ لكن $Z(\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2 \neq \{e\}$

2

(6) $(\mathbb{R}^{\times},\cdot)\cong(\mathbb{R},+)$. (درجتان)

خاطئ : المعادلة $x^2=1$ لها حلان ± 1 في $(\mathbb{R}^{\times},\cdot)$

لكن $2x=0$ لها حلاً وحيداً الصفر في $(\mathbb{R},+)$

2

إذاً $(\mathbb{R}^{\times},\cdot) \not\cong (\mathbb{R},+)$

(7) توجد زمرة غير ابدالية رتبتها 361 . (درجتان)

خاطئ . نفترض أنه يوجد زمرة غير ابدالية G رتبتها 361 .

$|G|=(19)^2=p^2$ فإن G ابدالية $\lightning$.

(لأن $|Z(G)|>1$)

2

$p=19$

عدد أولي .

(8) $\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_9\cong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{18}$. (درجتان)

خاطئ ، بما أن $gcd(8,9)=1$ فإن $\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_9 \simeq \mathbb{Z}_{72}$

2

يعني دورية . لكن $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{18}$ ليس دورية

(غير متماثلة لـ $\mathbb{Z}_{72}$) .