تصحيح

جامعة الملك سعود King Saud University — كلية العلوم – قسم الرياضيات	الاختبار الشهري الثاني للمقرر 343 ريض للفصل الصيفي 1437-1436 هـ
الإسم: .... الرقم الجامعي:.................................... أستاذ المقرر:....................................	الزمن: ساعتان. الدرجة:

ملاحظات : 1. عدد الورقات 4   2. ممنوع استخدام الالة الحاسبة.

السؤال الأول (4 درجات):

لتكن φ التطبيق التالي

$$\varphi:(\mathbb{R},+)\to\left(S^1=\{z\in\mathbb{C};|z|=1\},\times\right)$$
$$x \mapsto \varphi(x)=e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

(1) بيّن أن φ تشاكلا غامرا . (درجتان)

• φ تطبيق. نأخذ $x,y\in\mathbb{R}$.

$\varphi(x+y)=e^{i(x+y)}=e^{ix}\times e^{iy}=\varphi(x)\times\varphi(y)$ إذا φ هو تشاكل. 1,5

لكل $z\in S^1$ يوجد $x\in\mathbb{R}$ بحيث $z=e^{ix}=\varphi(x)$. 0,5

فإن φ هو تشاكلاً غامراً.

(2) أوجد $\ker\varphi$ (نواة φ). (درجة)

0,5 $\ker\varphi=\{x\in\mathbb{R} \,/\, \varphi(x)=1\}$.

0,5 $\ker\varphi=\{x\in\mathbb{R} \,/\, e^{ix}=1\}=\{x\in\mathbb{R} \,/\, e^{ix}=e^{2ik\pi}, k\in\mathbb{Z}\}$

$\ker\varphi=\{2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}=2\pi\mathbb{Z}$.

(3) استنتج أن $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\cong S^1$. (درجة)

1 باستخدام مبرهنة التشاكل $\mathbb{R}/\ker\varphi\simeq\varphi(\mathbb{R})$

يعني $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\simeq S^1$

السؤال الثاني (7 درجات):

لتكن G_1,G_2 زمر و $\varphi:G_1\to G_2$ تشاكلا . أثبت ما يلي:

(1) إذا كان $H\le G_1$ فإن $\varphi(H)\le G_2$. (درجتان)

0,5 • $\varphi(H)\neq\emptyset$ لأن $e_1\in H$, $\varphi(e_1)=e_2\in\varphi(H)$

• لتكن $y_1,y_2\in\varphi(H)$ فإنه يوجد $h_1,h_2\in H$ بحيث $\varphi(h_1)=y_1$ و $\varphi(h_2)=y_2$

1,5 $y_1y_2^{-1}=\varphi(h_1)\cdot(\varphi(h_2))^{-1}=\varphi(h_1)\varphi(h_2^{-1})$ لأن φ تشاكلاً

$y_1y_2^{-1}=\varphi(h_1h_2^{-1})\in\varphi(H)$ و $h_1h_2^{-1}\in H$ $(H\le G_1)$

فنستنتج أن $\varphi(H)\le G_2$.

(2) إذا كان $K \le G_2$ فإن $\varphi^{-1}(K) \le G_1$. (درجتان)

(0,5) • $\varphi^{-1}(K) \neq \phi$ لأن $e_1 \in \varphi^{-1}(K)$ ($e_2 \in K$ و $e_1 = \varphi^{-1}(e_2)$)

(1,5) • لتكن $x_1, x_2 \in \varphi^{-1}(K)$ فإنه يوجد $y_1, y_2 \in K$ بحيث $\varphi(x_1)=y_1$, $\varphi(x_2)=y_2$

$\varphi(x_1x_2^{-1}) = \varphi(x_1)\,\varphi(x_2^{-1}) = \varphi(x_1)\,\varphi(x_2)^{-1}$

$\varphi(x_1x_2^{-1}) = y_1y_2^{-1} \in K$ عندئذ $x_1x_2^{-1} \in \varphi^{-1}(K)$ وبالتالي $\varphi^{-1}(K) \le G_1$.

(3) استنتج أن $\ker\varphi \lhd G_1$. (درجة)

(0,5) • $\ker\varphi = \varphi^{-1}(\{e_2\}) \le G_1$ (من خلال (2))

(0,5) • لتكن $x \in G_1$ و $h \in \ker\varphi$ فإن $xhx^{-1} \in \ker\varphi$ لأن $\varphi(xhx^{-1}) = \varphi(x)\,\varphi(h)\,(\varphi(x))^{-1} = \varphi(x)\cdot e_2\,(\varphi(x))^{-1} = e_2$ وبالتالي $\ker\varphi \lhd G_1$

(4) إذا كان $H \lhd G_1$ فإن $\varphi(H) \lhd \varphi(G_1)$. (درجتان)

(0,5) • $\varphi(H) \le \varphi(G_1)$

(1,5) • نأخذ $y \in \varphi(G_1)$ و $k \in \varphi(H)$ عندئذ يوجد $x \in G_1$ بحيث $\varphi(x)=y$

كذلك يوجد $h \in H$ بحيث $\varphi(h)=k$.

$yky^{-1} = \varphi(x)\,\varphi(h)\,(\varphi(x))^{-1} = \varphi(\underbrace{xhx^{-1}}_{\in H}) \in \varphi(H)$ وبالتالي $\varphi(H) \lhd \varphi(G_1)$

لأن $H \lhd G_1$.

السؤال الثالث (8 درجات): أثبت ما يلي:

(1) إذا كانت G زمرة و $H \le G$ وكانت $x^2 \in H$ لكل $x \in G$ فإن $H \lhd G$. (درجتان)

(0,5) - نأخذ $x \in G$ و $h \in H$ فلنثبت أن $xhx^{-1} \in H$

(1,5) بما أن $x \in G$ فإن $x^2 \in H$ و $x^{-2} = (x^{-1})^2 \in H$, كذلك $(xh)^2 \in H$

$xhx^{-1} = (xh)\,(xh)\,(xh)^{-1}\,x^{-1}$

$xhx^{-1} = xhxh\,h^{-1}x^{-1}x^{-1}$

$xhx^{-1} = (xh)^2\,h^{-1}\,(x^{-1})^2 \in H$

(2) إذا كانت $A \lhd G$ و $B \lhd G$ فإن $AB \lhd G$, إذا علمت أن $AB \le G$. (درجتان)

(0,5) - نأخذ $x \in G$ و $ab \in AB$ فلنثبت أن $x(ab)x^{-1} \in AB$

(1,5) $xabx^{-1} = xax^{-1}xbx^{-1}$

$= \underbrace{(xax^{-1})}_{\in A}\underbrace{(xbx^{-1})}_{\in B} \in AB$

لأن $A \lhd G$, $xax^{-1} \in A$,

و $B \lhd G$, $xbx^{-1} \in B$,

(3) إذا كانت $G \lhd H$ و G ابدالية فإن G/H ابدالية. (درجتان)

نأخذ $aH, bH \in G/H$ فإن

$$(aH)(bH) = (ab)H = (ba)H$$
$$= (bH)(aH)$$

لأن G ابدالية و $H \lhd G$

2

وبالتالي G/H هي زمرة ابدالية.

(4) إذا كانت G زمرة حيث $G/Z(G)$ دورية فإن G ابدالية. (درجتان)

- نفترض $G/Z(G)$ دورية فإنه يوجد $x \in G$ بحيث $G/Z(G) = \langle xZ(G) \rangle$

ولنأخذ $a, b \in G$ إذن يوجد $m, n \in \mathbb{Z}$ بحيث

$$aZ(G) = (xZ(G))^m = x^m Z(G)$$
$$bZ(G) = (xZ(G))^n = x^n Z(G)$$

ولذا فانه يوجد $g, h \in Z(G)$ بحيث

2

$$a = x^m g \quad \text{و} \quad b = x^n h$$

$$ab = (x^m g)(x^n h) = x^m g x^n h = x^m x^n g h$$
$$= x^{m+n} g h = x^n x^m h g = (x^n h)(x^m g) = ba$$

وبالتالي G ابدالية

<u>السؤال الرابع (5 درجات):</u>

(1) نصّ نظرية كيلي. (درجتان)

كل زمرة منتهية من الرتبة n هي متماثلة

2

لزمرة جزئية من S_n (زمرة التبديلات على مجموعة ذات n عنصر)

(2) عرّف $Inn(G)$. (درجة)

لتكن G زمرة. تسمى المجموعة الجزئية

1

$$Inn\,G = \{\varphi_a \in Aut(G) \,/\, a \in G\}$$

بمجموعة التماثلات الذاتية الداخلية للزمرة G.

$$\varphi_a : G \to G, \quad x \to \varphi_a(x) = axa^{-1}$$ تماثل.

(3) لتكن كل من G_1, G_2 زمر منتهية بحيث $\gcd(|G_1|,|G_2|)=1$. أثبت أن **التشاكل الوحيد** من G_1 إلى G_2 هو **التشاكل التافه**. (درجتان)

- ليكن $\varphi: G_1 \to G_2$ تشاكلا . و $a \in G_1$ فان $o(a) \mid |G_1|$

و $o(\varphi(a)) \mid o(a)$ و نعلم أن $o(\varphi(a)) \mid |G_2|$

(2)

يعني $\begin{cases} o(\varphi(a)) \mid |G_1| \\ o(\varphi(a)) \mid |G_2| \end{cases}$ وبما أن $\gcd(|G_1|,|G_2|)=1$ فان $o(\varphi(a))=1$

يعني $\varphi(a)=e_2$. إذن φ هو تافه.

السؤال الخامس (6 درجات): بيّن أيًا من العبارات التالية صحيحة وأيّها خاطئة مع تعليل إجابتك:

(1) $|Aut(\mathbb{Z})|=2$. (درجتان)

صحيح . نعلم أن $\mathbb{Z}=\langle 1\rangle$. نأخذ $\varphi: \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$

تشاكلا . φ يحدد بتحديد $\varphi(1)$ لأن $\varphi(n)=n\varphi(1)$ لكل $n\in\mathbb{Z}$

و لذا : $\varphi(1)=\begin{cases} 1 \\ \text{أو} \\ -1 \end{cases}$ يعني $\varphi(n)=\begin{cases} n \\ \text{أو} \\ -n \end{cases}$ اذا يوجد فقط

(2) تماثلان . و بالتالي $|Aut(\mathbb{Z})|=2$.

(2) $|Aut(\mathbb{Z}_{12})|=4$. (درجتان)

صحيح ، لأن

$$Aut(\mathbb{Z}_{12}) \simeq U_{12}$$

(2)

$$U_{12}=\{k\in[\![1,12]\!] \mid \gcd(k,12)=1\}$$

$$U_{12}=\{1,5,7,11\}$$

و بالتالي $|Aut(\mathbb{Z}_{12})|=4$

(3) إذا كانت $Aut(G)$ زمرة دورية فإن G ابدالية. (درجتان)

صحيح ، لأن $G/Z(G) \simeq Inn(G) \triangleleft Aut(G)$

(2)

بما أن $Aut(G)$ دورية فان $Inn(G)$ هي أيضا دورية

و بالتالي $G/Z(G)$ دورية هذا يؤدي الى أن G ابدالية.