٣ ـ ٣٦

0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	···	0	0	0

٣ ـ ٣٧

0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	···	1	1	0	0

٣ ـ ٣٩ (أ) $7-, 12-, 15-, 5-, 16$ ، (ب) $2, -5, 0, 30, -3, 0$

٣ ـ ٤٠ خطأ الآن فى حالة خارج القسمة السالب ، بصفة عامة ، عملية الإنهاء المبكر تعطى عددا أكبر .

٣ ـ ٤١ (أ) 0.2901×10^{2} (ب) 0.5021×10^{2} ، (جـ) 0.1673×10^{3}

٣ ـ ٤٢ (أ) 0.5445×10^{-3} ، (ب) 0.3088×10^{2} ، (جـ) 0.3088×10^{2}

٣ ـ ٤٣ (أ) 0.1810×10^{-2} ، (ب) 0.2488×10^{3}

٣ ـ ٤٤ (أ) 0.3377×10^{-5} ، (ب) 0.2493×10^{1}

٣ ـ ٤٥ (أ) $e = -0.002, r = -0.00299\%$; (ب) $e = 0.008,\ r = 0.01196\%$

٣ ـ ٤٦ $D=0.777, D= 0.77,\ e = 0.007,\ r = 0.90\%$

٣ ـ ٤٧ $|e_{A+B}|=|e_A+e_B|\leq|e_A|+|e_B|$

الفصل الرابع

المنطق ، جداول الصواب

٤ ـ ١ مقدمة

يمكن برمجة الحاسب لاتخاذ قرارات تعتمد على تقارير معينة ـ فمثلا « العدد الذى تم حسابه يزيد عن 100 » ـ صواب أم خطأ . صحة وخطأ التقرير تسمى **قيمة الصواب لهذا التقرير** ، التقرير اما صواب أو خطأ ، ولكن ليس الاثنين معا . بعض التقارير تكون مركبة (**تقارير مركبة**) ، أى أنها تتكون من تقارير جزئية وأدوات ربط مختلفة .

مثال ٤ ـ ١

(أ) « الورد احمر والبنفسج أزرق » تقرير مركب التقارير الجزئية هى « الورد أحمر » ، « والبنفسج ازرق » .

(ب) « هو ذكى أو يذاكر كل ليلة » تقرير مركب من التقارير الجزئية « هو ذكى » ، « هو يذاكر كل ليلة » .

(جـ) أين تذهب ؟ هذا ليس تقريرا حيث أنه ليس صوابا ولاخطأ .

الخاصية الأساسية للتقارير المركبة هى أن قيمة الصواب لها تحدد تحديدا كاملا بقيم الصواب للتقارير الجزئية مع طريقة ربطها لتكوين التقرير المركب . نبدأ بدراسة بعض هذه الروابط . فى هذا الفصل سوف نستخدم الحروف p, q, r (الحروف الصغيرة أو الكبيرة بأدلة أو بدون) لنرمز للتقارير .

٤ ـ ٢ العطف : $p \wedge q$

أى تقريرين يمكن ربطهما بالحرف « و » لتكوين تقرير مركب يسمى عطف التقريرين الاصليين بالرموز

$$p\wedge q$$

يرمز الى عطف التقريرين p, q ويقرأ « p و q »

قيمة الصواب للتقرير المركب $p \wedge q$ تعطى بالجدول التالى :

p	q	$p\wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

هنا ، السطر الأول هو اختصار للقول أنه اذا كان p صوابا وكان q صوابا فإن $p \wedge q$ صواب . الأسطر الأخرى لها المعانى المناظرة . نعتبر هذا الجدول تعريفا دقيقا لقيمة الصواب للتقرير المركب $p \wedge q$ كدالة فى قيم الصواب للتقريرين p, q لاحظ أن $p \wedge q$ يكون صوابا فقط فى الحالة عندما يكون كل من التقريرين الجزئيين صوابا .

مثال ٤ - ٢ اعتبر التقارير الأربعة التالية :

(١) باريس فى فرنسا و $2+2=4$.

(٢) باريس فى فرنسا و $2+2=5$

(٣) باريس فى انجلترا و $2+2=4$.

(٤) باريس فى انجلترا و $2+2=5$

التقرير الأول فقط صواب . وكل واحد من التقارير الأخرى خطأ اذ أن على الأقل واحد من التقارير الجزئية خطأ .

٤ - ٣ التخيير ، $p \vee q$

أى تقريرين يمكن ربطهما بالكلمة «أو» (بمعنى أو/و) لتكوين تقرير جديد يسمى التخيير بين التقريرين الأصليين بالرموز

$$p \vee q$$

يرمز الى الاختيار بين التقريرين p,q ويقرأ « p أو q » .

قيمة الصواب لـ $p \vee q$ تعطى بالجدول التالى ، والذى يعتبر تعريف $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

لاحظ أن $p \vee q$ يكون خطأ فقط إذا كان كل من التقريرين الجزئيين خطأ .

مثال ٤ - ٣ اعتبر التقارير الأربعة التالية :

i) باريس فى فرنسا أو $2+2=4$

ii) باريس فى فرنسا أو $2+2=5$

iii) باريس فى انجلترا أو $2+2=4$

iv) باريس فى انجلترا أو $2+2=5$

فقط (iv) خطأ . وكل واحد من التقارير الأخرى صواب إذ أن على الأقل أحد التقارير الجزئية صواب .

ملحوظة : الكلمة «أو» فى اللغة تستخدم بطريقتين مختلفتين ، أحيانا تستخدم بمعنى p أو q أو كليهما أى ان على الاقل أحد البديلين يحدث ، كما سبق ، وأحيانا تستخدم بمعنى p أو q ولكن ليس كليهما ، أى أن فقط واحد من البديلين يحدث ، فمثلا ، فى الجملة « هو سوف يذهب الى هارفارد أو الى ييل » تستخدم «أو» بالمعنى الثانى وهنا المعنى يسمى التخيير المانع . وسوف نستخدم «أو» بالمعنى الأول اذا لم يذكر خلاف ذلك . هذا الشرح يوضح مدى الدقة التى نكتسبها من لغة الرموز المستخدمة : $p \vee q$ تعرف بجدول الصواب لها ودائما تعنى « p و/أو q » .

٤ - ٤ النفى ، $\sim p$

إذا كان p تقريرا ما ، فان تقريرا آخر ، يسمى نفى p ، يمكن الحصول عليه بكتابة « غير صحيح أن . . . » قبل p أو ، إذا أمكن ، بادخال الكلمة «لا» فى p بالرموز ، $\sim p$.

ترمز الى نفى p (وتقرأ « نفى p ») .

قيمة الصواب لـ $\sim p$ تعطى بالجدول التالى :

p	$\sim p$
T	F
F	T

أى أن ، إذا كان p صوابا فان $\sim p$ خطأ ، واذا كان P خطأ فان $\sim p$ صواب . وبالتالى فان قيمة الصواب لنفى أى تقرير هى دائما عكس قيمة الصواب للتقرير الأصلى .

مثال ٤ - ٤ اعتبر التقارير التالية :

(أ) باريس فى فرنسا . (د) $2+2=5$

(ب) خطأ أن باريس فى فرنسا (هـ) خطأ أن $2+2=5$

(جـ) باريس ليست فى فرنسا (و) $2+2\neq5$

(ب) ، (جـ) كل منهما نفى (أ) ، وكل من (هـ) ، (و) نفى (د) . حيث أن (أ) صواب ، فان التقريرين (ب) ، (جـ) خطأ ، وحيث أن (د) خطأ ، فان التقريرين (هـ) ، (و) صواب .

ملحوظة : الرموز المنطقية للروابط «و» ، «أو» و «ليس» ليست مصطلحات قياسية . فمثلا ، بعض الكتب تستخدم

$p \wedge q$ لـ $p \,\&\, q,\ p \cdot q$ or pq

$p \vee q$ لـ $p + q$

$\sim p$ لـ $p',\ \bar{p}$ or $\neg p$

٤ - ٥ قضايا المناقشة وجداول الصواب

يمكننا تكوين تقارير مركبة أكثر تعقيدا بالاستخدام المتكرر للروابط المنطقية ($\wedge, \vee, \sim$ وأخرى يأتى شرحها) . عندما تكون التقارير الجزئية $p,q,..$ المكونة لتقرير مركب $P(p,q,..)$ متغيرات ، فاننا نسمى التقرير قضية للمناقشة .

الآن قيمة الصواب لقضية للمناقشة تعتمد على قيم الصواب للمتغيرات بها ، أى أن قيمة الصواب لقضية للمناقشة تعرف فور معرفة قيم الصواب للمتغيرات . أبسط وأوجز طريق لتوضيح هذه العلاقة هو من خلال جدول الصواب . جدول الصواب للقضية $\sim(p \wedge \sim q)$ ، مثلا ، يتكون كما يلى :

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

لاحظ أن الأعمدة الأولى فى الجدول هى المتغيرات $p,q,...$ وهناك عدد كاف من الصفوف فى الجدول لتمثيل جميع التركيبات الممكنة من F,T لهذه المتغيرات . (لمتغيرين كما سبق ، يلزم أربعة صفوف ، لثلاثة متغيرات ، يلزم ثمانية

صفوف ، وبصفة عامة لـ n من المتغيرات يلزم 2^n من الصفوف) . يوجد عمود لكل مرحلة بسيطة فى تكوين القضية ، قيمة الصواب فى كل خطوة تحدد من المراحل السابقة باستخدام تعريف الروابط ~ ، ٧ ، ٨ . أخيرا نحصل على قيمة الصواب للقضية ، والتى تظهر فى العمود الأخير .

ملحوظة : جدول الصواب للقضية السابقة يتكون بالضبط من العمودين تحت المتغيرين والعمود تحت القضية :

p	q	$\sim(p \wedge \sim q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

الأعمدة الأخرى تستخدم لمجرد بناء جدول الصواب .

طريقة أخرى لتكوين جدول الصواب السابق للقضية $\sim(p \wedge \sim q)$ هى كما يلى . أولا نكون الجدول التالى :

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					
خطوة						

لاحظ أن القضية كتبت فى الصف العلوى على يمين المتغيرات ، وهناك عمود أسفل كل متغير أو أداة ربط فى القضية . ثم نضع قيم الصواب فى جدول الصواب على خطوات مختلفة كما يلى :

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$
T	T		T			T
T	F		T			F
F	T		F			T
F	F		F			F
خطوة			1			1

(أ)

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$
T	T		T		F	T
T	F		T		T	F
F	T		F		F	T
F	F		F		T	F
خطوة			1		2	1

(ب)

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$
T	T		T	F	F	T
T	F		T	T	T	F
F	T		F	F	F	T
F	F		F	F	T	F
خطوة			1	3	2	1

(جـ)

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$
T	T	T	T	F	F	T
F	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	F	T
F	F	T	F	F	T	F
خطوة		4	1	3	2	1

(د)

جدول الصواب لهذه القضية يتكون من العمودين الأصليين تحت المتغيرين والعمود الأخير فى الجدول ، أى الخطوة الأخيرة .

٤ - ٦ صيغ التأكيد وصيغ التناقض .

بعض القضايا $P(p,q,...)$ تحوى فقط T فى العمود الأخير فى جداول الصواب لها ، أى أنها صواب لأى قيم صواب للمتغيرات . هذه القضايا تسمى صيغ تأكيد . وبالمثل القضية $P(p,q)$ **تسمى صيغة تناقض** اذا كانت تحوى فقط F فى العمود الأخير فى جدول الصواب لها ، **أى أنها خطأ لأى قيم صواب للمتغيرات . فمثلا ، القضية ؛ p أو نفى p ؛** أى $p \wedge \sim p$ هى صيغة تأكيد والقضية ؛ p ونفى p ؛ أى $p \wedge \sim p$ صيغة تناقض . وهذا يتحقق بتكوين جدولى الصواب لهما .

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
T	F	F
F	T	F

نلاحظ أن نفى صيغة التأكيد هى صيغة تناقض إذا إنها دائما تكون خطأ ، ونفى صيغة التناقض هى صيغة تأكيد إذ إنها دائما تكون صوابا .

افرض أن $P(p,q,..)$ صيغة تأكيد ، وأن $P_1(p,q,...)$ و $P_2(p,q,...)$ أى قضايا للمناقشة . حيث أن قيمة الصواب للقضية $P(p,q,...)$ لاتعتمد على قيم الصواب للمتغيرات ...,p,q ، فانه يمكننا وضع P_1 بدلا من p ، P_2 بدلا من ...,q فى صيغة التأكيد $P(p,q,...)$ وتظل صيغة تأكيد . بعبارة أخرى :

مبدأ التعويض : اذا كانت $P(p,q..)$ صيغة تأكيد ، فان $P(p_1,p_2,..)$ صيغة تأكيد لأى قضايا ....,p_1,p_2 .

مثال ٤ - ٥ باستخدام جدول الصواب السابق ، $(p \vee \sim p)$ هى صيغة تأكيد . بتعويض $q \wedge r$ بدلا من p نحصل على القضية $(q \wedge r) \vee \sim(q \wedge r)$ ، والتى باستخدام مبدأ التعويض يجب أن تكون صيغة تأكيد . هذا يتحقق بجدول الصواب التالى :

q	r	$q \wedge r$	$\sim(q \wedge r)$	$(q \wedge r) \vee \sim(q \wedge r)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

٤ - ٧ التكافؤ المنطقى ؛ جبر قضايا النقاش

القضيتان $P(p,q...)$ و $Q(p,q...)$ **يقال إنهما متكافئتان منطقيا أو للتبسيط متكافئتان أو متساويتان** ، ورمز ذلك

$$P(p,q,...) \equiv Q(p,q,...)$$

اذا كان جدولا الصواب لهما متطابقين . **فمثلا ، اعتبر جدولى الصواب لـ** $\sim(p \wedge q)$ و $\sim p \vee \sim q$:

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

حيث أن جدولى الصواب لهما متطابقان ، أى أن كلا القضيتين خطأ فى الحالة الأولى ، وصواب فى الحالات الثلاثة الأخرى ، فان القضيتين $\sim(p\wedge q)$ ، $\sim p\vee\sim q$ متكافئتان منطقيا ويمكن كتابة :

$$\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$$

مثال ٤ - ٦ اعتبر التقرير

« ليس صحيحا أن الورد أحمر والبنفسج أزرق »

هذا التقرير يمكن كتابته فى الصورة $\sim(p\wedge q)$ حيث p « الورد أحمر » و q « البنفسج أزرق » ، ولكن من جداول الصواب السابقة ، فان $\sim(p\wedge q)$ يكافىء منطقيا التقرير $\sim p\vee\sim q$. وبالتالى التقرير الأصلى له نفس معنى التقرير .

« الورد ليس أحمر ، أو البنفسج ليس أزرق »

قضايا المناقشة تحقق عددا من التكافؤات المنطقية ، أو القوانين ، بجانب القانون السابق . بعض من أهم هذه القوانين واسماؤها توجد فى الجدول ٤ - ١ . فى الجدول t ترمز إلى صيغة تأكيد و f ترمز إلى صيغة تناقض .

٤ - ٨ التقارير المشروطة والتقارير ثنائية الشروط

العديد من التقارير ، وخاصة فى الرياضيات ، تكون فى الصورة ، « إذا كان p فإن q » . مثل هذه التقارير تسمى تقارير مشروطة ويرمز لها بالرمز

$$p\rightarrow q$$

التقرير المشروط $p\rightarrow q$ كثيرا ما يقرأ « p يحتم q » أو « p فقط اذا كان q » .

التقرير المألوف الآخر هو على الصورة « p إذا وفقط إذا كان q » . مثل هذه التقارير يرمز لها بالرمز

$$p\leftrightarrow q$$

وتسمى تقارير ثنائية الشروط .

جدول ٤ - ١ قوانين جبر قضايا المناقشة

	قوانين اللاتمو		
1a.	$p\vee p\equiv p$	1b.	$p\wedge p\equiv p$
	قوانين الدمج		
2a.	$(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$	2b.	$(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$
	قوانين الإبدال		
3a.	$p\vee q\equiv q\vee p$	3b.	$p\wedge q\equiv q\wedge p$
	قوانين التوزيع		
4a.	$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$	4b.	$p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
	قوانين المحايد		
5a.	$p\vee f\equiv p$	5b.	$p\wedge t\equiv p$
6a.	$p\vee t\equiv t$	6b.	$p\wedge f\equiv f$
	قوانين المكمل		
7a.	$p\vee\sim p\equiv t$	7b.	$p\wedge\sim p\equiv f$
8a.	$\sim t\equiv f$	8b.	$\sim f\equiv t$
	قانون مكمل المكمل		
9.	$\sim\sim p\equiv p$		
	قوانين دى مورجان		
10a.	$\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$	10b.	$\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$

قيم الصواب لـ $p\rightarrow q$ و $p\leftrightarrow q$ معطاة فى الجدولين التاليين .

p	q	$p\rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p	q	$p\leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

لاحظ أن التقرير المشروط $p\rightarrow q$ يكون خطأ فقط عندما يكون الجزء الأول p صواب والجزء الثانى q خطأ ..فى حالة ما يكون p خطأ ، فان التقرير المشروط $p\rightarrow q$ يكون صوابا بغض النظر عن قيمة الصواب لـ q . لاحظ أيضا أن $p\leftrightarrow q$ يكون صوابا عندما يكون p,q لهما نفس قيم الصواب وخطأ فى الحالات الأخرى . (لمعرفة العلاقة بين التقارير ثنائية الشروط والتقارير المشروطة ، انظر المسألتين ٤ - ١٥ ، ٤ - ١٦)

والآن اعتبر جدول الصواب للقضية $\sim p\vee q$:

p	q	$\sim p$	$\sim p\vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

لاحظ أن جدول الصواب السابق يتطابق مع جدول الصواب لـ $p\rightarrow q$. وبالتالى $p\rightarrow q$ يكافىء منطقيا القضية $\sim p\vee q$:

$$p\rightarrow q\equiv\sim p\vee q$$

بعبارة أخرى ، التقرير المشروط « إذا كان p فان q » يكافىء منطقيا التقرير « ليس p أو q » الذى يحوى فقط اداتى الربط $\vee$ و $\sim$ وبالتالى كان جزءا من لغتنا .

اعتبر القضية المشروطة $p\rightarrow q$ وكذلك القضايا المشروطة البسيطة التى تحوى p,q

$$\sim q\rightarrow\sim p,\ q\rightarrow p,\ \sim p\rightarrow\sim q$$

هذه القضايا تسمى على الترتيب معكوس ، مقلوب ، مقلوب المعكوس للقضية $p\rightarrow q$. جداول الصواب لهذه القضايا الأربعة كما يلى :

p	q	التقرير المشروط $p\rightarrow q$	مقلوب $q\rightarrow p$	معكوس $\sim p\rightarrow\sim q$	مقلوب المعكوس $\sim q\rightarrow\sim p$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T

لاحظ أن التقرير المشروط والمعكوس أو المقلوب له غير متكافئين منطقيا . من جهة أخرى ، التقرير المشروط ومقلوب المعكوس له متكافئان منطقيا . هذه النتيجة تصاغ كما يلى :

نظرية ٤ - ١ التقرير المشروط $p\rightarrow q$ يكافىء منطقيا مقلوب المعكوس له $\sim q\rightarrow\sim p$

مثال ٤ - ٧

(أ) اعتبر التقريرين التاليين عن المثلث A :

$p\to q$: إذا كان A متساوى الأضلاع ، فانه متساوى الساقين .

$q\to p$: إذا كان A متساوى الساقين ، فانه متساوى الأضلاع .

هنا $p\to q$ صواب ، ولكن المعكوس $q\to p$ خطأ .

(ب) إذا كان x عددا صحيحا . اثبت أن : $(p\to q)$ « اذا كان x^2 عددا فرديا فان x عدد فردى » . نثبت أن مقلوب المعكوس $\sim q\to\sim p$ ، « اذا كان x عددا زوجيا فان x^2 عدد زوجى » صواب . ليكن x عددا زوجيا ، فيكون $x=2n$ حيث n عدد صحيح وبالتالى

$$x^2=(2n)(2n)=2(2n^2)$$

أيضا عدد زوجى ، بما أن التقرير مقلوب المعكوس $\sim q\to\sim p$ صواب ، إذن التقرير المشروط الأصلى $p\to q$ أيضا صواب .

٤ - ٩ القياس

القياس هو علاقة بين فئة من قضايا النقاش $P_1,P_2,\dots,P_n$ ، التى تسمى المقدمات وقضية أخرى للمناقشة Q تسمى الاستنتاج ، ونرمز للقياس ، بالرمز

$$P_1,P_2,\dots P_n\vdash Q$$

يقال إن قياسا ما صحيح إذا كانت المقدمات تؤدى إلى الاستنتاج كنتيجة ، ويصاغ ذلك كما يلى :

تعريف : القياس $P_1,P_2,\dots,P_n\vdash Q$ يكون صحيحا إذا كانت Q صوابا عندما يكون جميع المقدمات $P_1,P_2,\dots P_n$ صوابا .

القياس غير الصحيح مغالطة .

مثال ٤ - ٨

(أ) القياس التالى صحيح

$p,p\to q\vdash q$ (قانون الفصل)

إثبات هذه القاعدة يتضح من جدول الصواب التالى .

p	q	$p\to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

لأن p صواب فى الحالتين (السطرين) $1,2$ ، $p\to q$ صواب فى الحالات $1,3,4$ ، وبالتالى $p\to q,p$ صواب معا (فى نفس الوقت) فى الحالة 1 . حيث ان فى هذه الحالة q صواب ، فان القياس يكون صحيحا .

(ب) القياس التالى مغالطة $p\to q,q\vdash p$ لأن $q,p\to q$ كلاهما صواب فى الحالة (السطر) 3 فى جدول الصواب السابق ، ولكن فى هذه الحالة p خطأ .

القضايا $P_1P_{,2},\dots P_n$ تكون صوابا فى نفس الوقت إذا وفقط إذا كانت القضية $P_1\wedge P_2\wedge\dots\wedge P_n$ صوابا . وبالتالى القياس $P_1,P_2,\dots P_n\vdash Q$ يكون صحيحا إذا وفقط اذا كان Q صوابا عندما يكون $P_1\wedge P_2\wedge\dots\wedge P_n$ صوابا أو ، ما يكافىء ذلك، إذا وفقط إذا كانت القضية

$$(P_1\wedge P_2\wedge\dots\wedge P_n)\to Q$$

صيغة تأكيد . تصاغ هذه النتيجة كما يلى :

نظرية ٤ - ٢ القياس $P_1,P_2,\dots P_n\vdash Q$ يكون صحيحا اذا وفقط اذا كان $(P_1\wedge P_2\wedge\dots\wedge P_n)\to Q$ صيغة تأكيد .

نطبق هذه النظرية فى المثال التالى :

مثال ٤ - ٩ مبدأ أساس فى التفكير المنطقى يقول :

« اذا كان p يحتم q و q يحتم r فإن p يحتم r »

أى أن ، القياس التالى صحيح :

$p\to q,q\to r\vdash p\to r$ (قانون القياس المنطقى)

هذه الحقيقة تتحقق من جدول الصواب التالى الذى يوضح أن القضية

$$[(p\to q)\wedge(q\to r)]\to(p\to r)$$

هى صيغة تأكيد :

p	q	r	$[(p$	$\to$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\to$	$r)]$	$\to$	$(p$	$\to$	$r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	F	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F	F	T	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T	F	T	F	F	T	F	T	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F
خطوة			1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1

يكافىء ذلك ، أن القياس صحيح لأن المقدمات $p\to q$ و $q\to r$ صواب فى نفس الوقت فقط فى الحالات (الأسطر) 1,5,7,8 . وفى هذه الحالات الاستنتاج $p\to r$ صواب أيضا (لاحظ أن جدول الصواب قد تطلب $2^3=8$ اسطر اذ ان المتغيرات ثلاثة p,q,r) .

نؤكد أن صحة القياس لاتعتمد على قيم الصواب أو على مكونات التقارير الواردة بالقياس ولكن تعتمد فقط على التكوين الشكلى لذلك القياس .

نوضح ذلك فى المثال التالى :

مثال ٤ ـ ١٠ اعتبر القياس التالى :

S_1 : إذا كان الرجل أعزب ، فهو غير سعيد .

S_2 : إذا كان الرجل غير سعيد ، فانه يموت صغيراً

....

S : الأعزب يموت صغيراً .

هنا التقرير S أسفل الخط المنقوط هو الاستنتاج للقياس ، والتقارير S_1, S_2 أعلى الخط هى المقدمات . نقول أن القياس $S_1, S_2 \vdash S$ صحيح ، لأن القياس على الصورة .

$$p \rightarrow q,\ q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$$

حيث p هى « هو أعزب » ، q هى « هو غير سعيد » و r « أنه يموت صغيراً » ، ومن مثال ٤ ـ ٩ هذا القياس (قانون القياس المنطقى) صحيح .

٤ ـ ١٠ الحتمية المنطقية

يقال أن القضية $P(p,q..)$ تحتم منطقياً القضية $Q(p,q,...)$ ويكتب .

$$P(P,Q,...) \Rightarrow Q(p,q,...)$$

إذا كانت $Q(p,q,...)$ صواباً طالما كانت $P(p,q,...)$ صواباً

مثال ٤ ـ ١١ p يحتم منطقياً $p \vee q$ ، لأنه بالنظر إلى جداول الصواب لـ $p \vee q, p$ التالية نلاحظ أن p تكون صوابا فى الحالتين (السطرين) 1,2 وفى هاتين الحالتين $p \vee q$ أيضاً صواب . بعبارة أخرى p تحتم منطقيا $p \vee q$.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

الآن ، اذا كانت $Q(p,q...)$ صوابا طالما كانت $P(p,q,...)$ صوابا فان القياس

$$P(p,q,...) \vdash Q(p,q,...)$$

صحيح ، والعكس أيضا . بالاضافة الى ذلك القياس $P \vdash Q$ يكون صحيحا اذا وفقط اذا كان التقرير المشروط $P \rightarrow Q$ صوابا دائما ، أى صيغة تأكيد . تصاغ هذه النتيجة كما يلى :

نظرية ٤ ـ ٣ : لأى قضيتين $P(p,q....), Q(p,q,...)$ التقارير الثلاثة التالية متكافئة :

(i) $P(p,q,...$ تحتم منطقياً $Q(p,q,...)$

(ii) القياس $P(p,q,...) \vdash Q(p,q,...)$ صحيح

(iii) القضية $P(p,q,...) \rightarrow Q\ (p,q,...)$ صيغة تأكيد .

اذا كان $P \Rightarrow Q$ ، $Q \Rightarrow P$ ، فان Q,P يجب أن يكون لها نفس جدول الصواب ، وبالتالى $P \equiv Q$ ، العكس أيضا صحيح . وبالتالى فان فكرة الحتمية المنطقية وثيقة الصلة بفكرة التكافؤ المنطقى .

مسائل محلولة

التقارير والتقارير المركبة

٤ ـ ١ اذا كان p هو « الجو بارد » و q هو « هى تمطر » . أوجد الجمل البسيطة التى تمثل كلا من التقارير التالية : (١) $\sim p$ ، (٢) $p \wedge q$ ، (٣) $p \vee q$ ، (٤) $q \vee \sim p$ ، (٥) $\sim p \wedge \sim q$ ، (٦) $\sim\sim q$

فى كل حالة ترجم ∧ , ∨ , ~ الى « و » ، « أو » ، و « ليس » ، « أو » خطأ أن على الترتيب ، ثم بسط الجملة .

(١) الجو ليس بارداً
(٢) الجو بارد وهى تمطر
(٣) الجو بارد أو هى تمطر
(٤) هى تمطر أو الجو ليس بارداً
(٥) الجو ليس باردا وهى لاتمطر
(٦) ليس صحيحا أنها لاتمطر .

٤ ـ ٢ إذا كان p هو « هو طويل » وكان q هو « هو وسيم » . اكتب كل تقرير مما يلى فى الصورة الرمزية باستخدام q,p . (بفرض أن « هو قصير » تعنى « هو ليس طويلا » أى $\sim p$) .

(١) هو طويل ووسيم .
(٢) هو طويل وليس وسيماً .
(٣) ليس صحيحا أنه قصير أووسيم .
(٤) هو ليس طويلا ولاوسيماً
(٥) هو طويل أوقصير ووسيم .
(٦) ليس صحيحا أنه قصير أوليس وسيم

(١) $p \wedge q$ (٣) $\sim(\sim p \vee q)$ (٥) $p \vee (\sim p \wedge q)$

(٢) $p \wedge \sim q$ (٤) $\sim p \wedge \sim q$ (٦) $\sim(\sim p \vee \sim q)$

قضايا المناقشة وجداول الصواب لها

٤ ـ ٣ أوجد جدول الصواب لـ $\sim p \wedge q$

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

طريقة ١

p	q	$\sim$	p	$\wedge$	q
T	T	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	F
خطوة		2	1	3	1

طريقة ٢

٤ ـ ٤ أوجد جدول الصواب لـ $\sim(p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	T

طريقة ١

p	q	$\sim$	$(p$	$\vee$	$q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	F	F
خطوة		3	1	2	1

طريقة ٢

٤ ـ ٥ أوجد جدول الصواب لـ $\sim(p\vee\sim q)$

p	q	$\sim q$	$p\vee\sim q$	$\sim(p\vee\sim q)$
T	T	F	T	F
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	T	F

طريقة ١

p	q	$\sim$	$(p$	$\vee$	$\sim$	$q)$
T	T	F	T	T	F	T
T	F	F	T	T	T	F
F	T	T	F	F	F	T
F	F	F	F	T	T	F
الخطوة		4	1	3	2	1

طريقة ٢

(لاحظ أن جدول الصواب هذا يتطابق مع جدول الصواب فى المسألة ٤ ـ ٣)

صيغ التأكيد وصيغ التناقض

٤ ـ ٦ اثبت أن القضية $p\vee\sim(p\wedge q)$ صيغة تأكيد .

كون جدول الصواب لـ $p\vee\sim(p\wedge q)$:

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$p\vee\sim(p\wedge q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

حيث أن قيمة الصواب لـ $p\vee\sim(p\wedge q)$ هى T لجميع قيم الصواب لـ q,p فهى صيغة تأكيد

٤ ـ ٧ حقق أن القضية $(p\wedge q)\wedge\sim(p\vee q)$ صيغة تناقض .

كون جدول الصواب لـ $(p\wedge q)\wedge\sim(p\vee q)$:

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$(p\wedge q)\wedge\sim(p\vee q)$
T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

حيث أن قيمة الصواب لـ $(p\wedge q)\wedge\sim(p\vee q)$ هى F لجميع قيم الصواب لـ q,p فهى صيغة تناقض .

التكافؤ المنطقى

٤ ـ ٨ اثبت أن التخيير يتبع قانون التوزيع على العطف ، أى اثبت قانون التوزيع

$$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$$

كون جداول الصواب المطلوبة .

p	q	r	$q\wedge r$	$p\vee(q\wedge r)$	$p\vee q$	$p\vee r$	$(p\vee q)\wedge(p\vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

حيث أن جدولى الصواب لهما يتطابقان فان القضيتين متكافئتان .

٤ ـ ٩ اثبت أن عملية التخيير يمكن كتابتها بدلالة عمليتى العطف والنفى . أكثر تحديدا ،

$$p\vee q\equiv\sim(\sim p\wedge\sim q)$$

كون جداول الصواب المطلوبة .

p	q	$p\vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\vee\sim q$	$\sim(\sim p\wedge\sim q)$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T
F	T	T	T	F	F	T
F	F	F	T	T	T	F

حيث أن جدولى الصواب يتطابقان ، اذن القضيتين متكافئتان .

٤ ـ ١٠ بسط كل قضية باستخدام الجدول ٤ ـ ١ (أ) $p\vee(p\wedge q)$ ، (ب) $\sim(p\vee q)\vee(\sim p\wedge q)$.

(أ) التكافؤ

Equivalence

(1) $p\vee(p\wedge q)\equiv(p\wedge t)\vee(p\wedge q)$

(2) $\equiv p\wedge(t\vee q)$

(3) $\equiv p\wedge t$

(4) $\equiv p$

السبب

(١) قانون المحايد

(٢) قانون التوزيع

(٣) قانون المحايد

(٤) قانون المحايد

(ب) التكافؤ

Equivalence

(1) $\sim(p\vee q)\vee(\sim p\wedge q)\equiv(\sim p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge q)$

(2) $\equiv\sim p\wedge(\sim q\vee q)$

(3) $\equiv\sim p\wedge t$

(4) $\equiv\sim p$

السبب

(١) قانون دى مورجان

(٢) قانون التوزيع

(٣) قانون المكمل

(٤) قانون المحايد .

النفى

٤ ـ ١١ اثبت قانونى دى مورجان : (أ) $\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$ ، (ب) $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$

فى كل حالة كون جداول الصواب المطلوبة :

(أ)

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

(ب)

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

٤ - ١٢ حقق : $\sim\sim p \equiv p$

p	$\sim p$	$\sim\sim p$
T	F	T
F	T	F

٤ - ١٣ باستخدام نتائج المسألتين ٤ - ١١ ، ٤ - ١٢ بسط كلا من التقارير التالية :

(أ) ليس صحيحاً أن والدته انجليزية أو والده فرنسى .

(ب) ليس صحيحاً أنه يدرس الفيزياء ولكن ليس الرياضيات .

(جـ) ليس صحيحاً أن المبيعات تنقص والأسعار ترتفع .

(د) ليس صحيحاً أن الجو ليس بارداً أو أنها تمطر .

(أ) افرض أن p هو « والدته انجليزية » و q هو « والده فرنسى » ، فيكون التقرير المعطى هو $\sim(p \vee q)$ ولكن $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ وبالتالى فان التقرير المعطى يكافىء منطقيا التقرير « والدته ليست انجليزية ووالده ليس فرنسياً » .

(ب) افرض أن p هو « هو يدرس الفيزياء » و q هو يدرس الرياضيات فيكون التقرير المعطى هو $\sim(p \wedge \sim q)$ ولكن $\sim(p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee \sim\sim q \equiv \sim p \vee q$. وبالتالى التقرير المعطى يكافىء منطقيا التقرير « هو لايدرس الفيزياء أو يدرس الرياضيات » .

(جـ) حيث أن $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ فان التقرير المعطى يكافىء منطقيا التقرير « المبيعات تزيد أو الأسعار تقل » .

(د) حيث أن $\sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$ فان التقرير المعطى يكافىء منطقيا التقرير « الجو بارد وهى لاتمطر » .

التقارير المشروطة والتقارير ثنائية الشروط

٤ - ١٤ أعد كتابة التقارير التالية بدون استخدام الشرط .

(أ) اذا كان الجو باردا فانه يلبس قبعة .

(ب) اذا زاد الانتاج فان الأجور ترتفع .

تذكر أن « اذا كان p فان q » يكافىء « ليس p أو q » ، أى أن $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

(أ) الجو ليس بارداً أو هو يلبس قبعة .

(ب) الانتاج لايزيد أو الأجور ترتفع .

٤ - ١٥ (أ) وضح أن p تحتم q و q تحتم p يكافىء منطقيا التقرير ثنائى الشروط p إذا وفقط إذا كان q ، أى أن $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv p \leftrightarrow q$.

(ب) وضح أن التقرير الثنائى الشروط $p \leftrightarrow q$ يمكن كتابته بدلالة الروابط الثلاثة الأصلية $\sim$ ، $\wedge$ ، $\vee$.

(أ)

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

(ب) الآن $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ و $q \rightarrow p \equiv \sim q \vee p$ ، وبالتالى من (أ)

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$$

٤ - ١٦ اثبت أن $p \leftrightarrow q \equiv (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ (أ) بمقارنة جداول الصواب ، (ب) باستخدام جبر القضايا .

(أ)

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	F	T

(ب)

التكافؤ

(1)	$p \leftrightarrow q \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$	(١) المسألة ٤ - ١٥ (ب)
(2)	$\equiv [(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \vee [(\sim p \vee q) \wedge p]$	(٢) قانون التوزيع
(3)	$\equiv [(\sim q \wedge q) \vee (\sim q \wedge \sim p)] \vee [(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim p)]$	(٣) قانونا الابدال والتوزيع
(4)	$\equiv [f \vee (\sim q \wedge \sim p)] \vee [(p \wedge q) \vee f]$	(٤) قانون السكمل
(5)	$\equiv (\sim q \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)$	(٥) قانون المحايد
(6)	$\equiv [\sim(p \vee q)] \vee (p \wedge q)$	(٦) قانون دى مورجان
(7)	$\equiv (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$	(٧) البند ٤ - ٨

٤ - ١٧ كون جداول الصواب لـ (أ) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q)$ ، (ب) $(p \rightarrow q) \vee \sim(p \leftrightarrow \sim q)$

(أ)

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	F
F	F	T	F	F

(ب)

p	q	(p	$\to$	q)	$\vee$	$\sim$	(p	$\leftrightarrow$	$\sim$	q)
T	T	T	T	T	T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	F	F	T	T	T	F
F	T	F	T	T	T	F	F	T	F	T
F	F	F	T	F	T	T	F	F	T	F
خطوة		1	2	1	5	4	1	3	2	1

٤ - ١٨ اكتب مقلوب المعكوس لكل تقرير .

(أ) إذا كان جون شاعراً ، فانه فقير .

(ب) فقط إذا ذاكر مارك جيداً فانه سوف يجتاز الاختبار .

(جـ) من الضرورى أن يكون هناك جليد لكى يتزحلق اريك .

(د) إذا كانت x أصغر من الصفر ، فان x غير موجبة .

(أ) مقلوب المعكوس لـ $p \to q$ هو $(\sim q \to \sim p)$ ، وبالتالى فان مقلوب المعكوس لـ (أ) هو

اذا كان جون ليس فقيراً ، فانه ليس شاعراً

(ب) التقرير المعطى يكافىء « اذا اجتاز مارك الاختبار فانه قد ذاكر » . وبالتالى مقلوب المعكوس لـ (ب) هو

اذا لم يذاكر مارك ، فانه لن يجتاز الاختبار .

(جـ) التقرير المعطى يكافىء التقرير « اذا كان اريك يتزحلق ، فان هناك جليد . وبالتالى مقلوب المعكوس لـ (جـ) هو

إذا لم يكن هناك جليد ، فان اريك لن يتزحلق .

(د) مقلوب المعكوس لـ $p \to \sim q$ هو $\sim\sim q \to \sim p \equiv q \to \sim p$ وبالتالى مقلوب المعكوس لـ (د) هو

اذا كانت x موجبة ، فان x ليست أصغر من الصفر .

القياس ، والحتمية المنطقية

٤ - ١٩ اثبت أن القياس التالى صحيح : $p \leftrightarrow q,\ q \vdash p$

الطريقة ١ :

كون جدول الصواب ، على اليسار ، $p \leftrightarrow q$, صواب فى الحالتين (السطرين) $1,4$ و q صواب فى الحالتين $1,3$ ، وبالتالى $p \leftrightarrow q,\ q$ صواب فى نفس الوقت فقط فى الحالة 1 حيث p أيضا صواب . واذن القياس $p \leftrightarrow q,\ q \vdash p$ صحيح .

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

الطريقة ٢ :

كون جداول الصواب لـ $[(p \leftrightarrow q) \wedge q] \to p$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \wedge q$	$[(p \leftrightarrow q) \wedge q] \to p$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

حيث أن $[(p \leftrightarrow q) \wedge q] \to p$ صيغة تأكيد ، فان القياس صحيح .

٤ - ٢٠ اختبر صحة القياس التالى :

اذا انا ذاكرت ، فاننى سوف لا أرسب فى الرياضيات .

اذا أنا لم ألعب كرة السلة ، فاننى اذاكر .

ولكننى رسبت فى الرياضيات .

....

واذن ، أنا لعبت كرة السلة .

أولا نترجم القياس إلى الصورة الرمزية . نفرض أن p « أنا أذاكر » ، q هو « أنا رسبت فى الرياضيات » و r هو « أنا ألعب كرة السلة » . فيكون القياس كما يلى :

$$p \to \sim q,\ \sim r \to p,\ q \vdash r$$

لاختبار صحة القياس ، نكون جداول الصواب للقضايا المعطاه $p \to \sim q$ ، $r, q, \sim r \to p$.

p	q	r	$\sim q$	$p \to \sim q$	$\sim r$	$\sim r \to p$
T	T	T	F	F	F	T
T	T	F	F	F	T	T
T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	F	T
F	T	F	F	T	T	F
F	F	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	F

المقدمات $p \to \sim q,\ \sim r \to p, q$ جميعها صواب فى نفس الوقت فقط فى الحالة (السطر) 5 ، وفى هذه الحالة الاستنتاج r أيضاً صواب ، وبالتالى القياس صحيح .

٤ - ٢١ اثبت أن $p \leftrightarrow q$ تحتم منطقيا $p \to q$.

الطريقة ١ :

نكون جداول الصواب لـ $p \to q$ ، $p \leftrightarrow q$:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	T	T

$p \leftrightarrow q$ صواب فى السطرين $1,4$ وفى هاتين الحالتين $p \to q$ أيضا صواب . واذن $p \leftrightarrow q$ يحتم منطقيا $p \to q$.

الطريقة ٢ :

نكون جدول الصواب لـ $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ سوف يكون صيغة تأكيد ، واذن من نظرية ٤ ـ ٣ $p \leftrightarrow q$ يحتم منطقيا $p \rightarrow q$.

الطريقة ٣ :

نستخدم المسألة ٤ ـ ١٥ (أ) وجبر قضايا المناقشة .

$$
\begin{aligned}
(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q) &\equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \rightarrow (p \rightarrow q) \\
&\equiv \sim[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \vee (p \rightarrow q) \\
&\equiv [\sim(p \rightarrow q) \vee \sim(q \rightarrow p)] \vee (p \rightarrow q) \\
&\equiv t \vee \sim(q \rightarrow p) \\
&\equiv t
\end{aligned}
$$

(كان فى الامكان تطبيق هذه الطريقة أيضاً فى المسألتين ٤ ـ ١٩ و ٤ ـ ٢٠)

٤ ـ ٢٢ اثبت أن $p \leftrightarrow \sim q$ لايحتم منطقياً $p \rightarrow q$.

الطريقة ١ :

نكون جداول الصواب لـ $p \leftrightarrow \sim q$ و $p \rightarrow q$:

p	q	$\sim q$	$p \leftrightarrow \sim q$	$p \rightarrow q$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	T	T
F	F	T	F	T

نذكر أن $p \leftrightarrow \sim q$ يحتم منطقياً $p \rightarrow q$ اذا كان $p \rightarrow q$ صوابا طالما كان $p \leftrightarrow \sim q$ صوابا . ولكن $p \leftrightarrow \sim q$ صواب فى الحالة (السطر) 2 من الجدول السابق ، وفى هذه الحالة $p \rightarrow q$ خطأ . واذن $p \leftrightarrow \sim q$ لايحتم منطقيا $p \rightarrow q$

الطريقة ٢ :

نكون جدول الصواب للقضية $(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ لن يكون صيغة تأكيد ، واذن من نظرية ٤ ـ ٣ $p \leftrightarrow \sim q$ لايحتم منطقياً $p \rightarrow q$.

مسائل إضافية

التقارير والتقارير المركبة

٤ ـ ٢٣ إذا كان p هو « مارك غنى » و q هو « مارك سعيد » . اكتب ما يأتى فى الصورة الرمزية :

(أ) مارك فقير ولكن سعيد .

(ب) مارك ليس غنياً ولاسعيد .

(جـ) مارك إما غنى أو غير سعيد .

(د) مارك فقير وإلا غنى وغير سعيد .

٤ ـ ٢٤ إذا كان p هو « طارق يقرأ مجلة آخر ساعة » و q هو « طارق يقرأ المصور » و r هو « طارق يقرأ الأهرام الاقتصادى » ، فاكتب مايلى فى الصورة الرمزية .

(أ) طارق يقرأ آخر ساعة أو المصور ولكن ليس الاقتصادى .

(ب) طارق يقرأ آخر ساعة والمصور أو هو لايقرأ آخر ساعة والاقتصادى .

(جـ) ليس صحيحاً أن طارق يقرأ آخر ساعة ولايقرأ الاقتصادى .

(د) ليس صحيحاً أن طارق يقرأ الاقتصادى أو المصور ولكن لايقرأ آخر ساعة .

٤ ـ ٢٥ اذا كان p هو « مارى تتحدث الفرنسية » و q هو « مارى تتحدث الدنمركية » ، فاكتب الجمل المبسطة التى توصف مايلى :

(أ) $p \vee q$ ، (ب) $p \wedge q$ ، (جـ) $p \wedge \sim q$ (د) $\sim p \vee \sim q$ (هـ) $\sim\sim p$ ، (و) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

جداول الصواب والتكافؤ المنطقى

٤ ـ ٢٦ أوجد جدول الصواب لكل قضية :

(أ) $p \vee \sim q$, ، (ب) $\sim p \wedge \sim q$ ، (جـ) $\sim(\sim p \wedge q)$ ، (د) $\sim(\sim p \vee \sim q)$

٤ ـ ٢٧ أوجد جدول الصواب لكل قضية :

(أ) $(p \wedge \sim q) \vee r$ ، (ب) $\sim p \vee (q \wedge \sim r)$, ، (جـ) $(p \vee \sim r) \wedge (q \vee \sim r)$

٤ ـ ٢٨ اثبت أن العطف يتبع قانون التوزيع على التخيير $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

٤ ـ ٢٩ اثبت أن $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ بتكوين جداول الصواب المعنية .

٤ ـ ٣٠ اثبت أن $\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$ بتكوين جداول الصواب المعنية .

٤ ـ ٣١ (أ) عبر عن $\vee$ بدلالة $\wedge$ و $\sim$.

(ب) عبر عن $\wedge$ بدلالة $\vee$ و $\sim$.

٤ ـ ٣٢ اثبت التكافؤات الآتية باستخدام قوانين جبر القضايا المدرجة بالجدول ٤ ـ ١ .

(أ) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$, ، (ب) $(p \wedge q) \vee \sim p \equiv \sim p \vee q$ ، (جـ) $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

النفى

٤ ـ ٣٣ بسط : (أ) $(p \wedge \sim q)$ ، (ب) $\sim(\sim p \vee q)$ ، (جـ) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$.

٤ ـ ٣٤ اكتب نفى كل تقرير ممايلى فى أبسط صورة ممكنة .

(أ) هو طويل ولكن وسيم .

(ب) شعره فاتح اللون أو عيناه زرقاوتان .

(جـ) هو ليس غنياً ولاسعيداً .

(د) هو فقد وظيفته أو لم يذهب لعمله اليوم .

(هـ) لامارك ولااريك غير سعداء .

(و) مارى تتحدث العربية أو الفرنسية ولكن لاتتحدث الالمانية .

التقارير المشروطة والتقارير ثنائية الشروط

٤ - ٣٥ أوجد جدول الصواب لكل قضية (أ) $(\sim p \vee q) \to p$ ، (ب) $q \leftrightarrow (\sim q \wedge p)$.

٤ - ٣٦ أوجد جدول الصواب لكل قضية (أ) $(p \leftrightarrow \sim q) \to (\sim p \wedge q)$ ، (ب) $(q \to \sim p) \leftrightarrow (\sim q \vee p)$.

٤ - ٣٧ اثبت أن (أ) $(p \wedge q) \to r \equiv (p \not\to r) \vee (q \to r)$ ، (ب) $p \to (q \to r) \equiv (p \wedge \sim r) \to \sim q$.

٤ - ٣٨ أوجد مقلوب المعكوس لكل تقرير :

(أ) إذا كان شجاعاً فانه سيربح (ب) فقط إذا لم يتعب فانه سيربح .

٤ - ٣٩ اوجد :

(أ) مقلوب المعكوس لـ $p \to \sim q$ (جـ) مقلوب المعكوس لمقلوب $p \to \sim q$

(ب) مقلوب المعكوس لـ $\sim p \to q$ (د) معكوس مقلوب المعكوس $\sim p \to \sim q$

القياس والحتمية المنطقية

٤ - ٤٠ اختبر صحة كل قياس (أ) $\sim p \to q,\ p \vdash \sim q$ ، (ب) $\sim p \to q,\ q \vdash p$

٤ - ٤١ اختبر صحة كل قياس (أ) $p \to q,\ r \to \sim q \vdash r \to \sim p$ ، (ب) $p \to \sim q,\ \sim r \to \sim q\ r\ p \to \sim r$

٤ - ٤٢ ترجم الى الصورة الرمزية واختبر صحة كل قياس :

(أ) إذا كانت 6 عدداً زوجياً ، فان 2 لاتقسم 7 .
أما 5 ليست عددا اوليا أو 2 تقسم 7 .
لكن 5 عدد اولى .

(جـ) اذا عملت ، لااستطيع المذاكرة .
أما اعمل ، أو اجتاز الرياضيات .
أنا اجتزت الرياضيات .

بالتالى ، 6 عدد فردى (ليس زوجيا) . بالتالى ، أنا ذاكرت .

(ب) الورد احمر .
الورد أزرق .
اذن ، الورد احمر اذا وفقط اذا كان الورد ازرق .

(د) اذا عملت ، لاأستطيع المذاكرة .
أما اذاكر او اجتاز الرياضيات .
أنا عملت .
h¿k , hkh hpj.j hgvxhøxhj

$p \wedge q$)'('k hwfj 34 æ 4 يحتم منطقيا p (ب) $p \vee q$ لايحتم منطقيا p .

٤ - ٤٤ اثبت أن (أ) q يحتم منطقيا $p \to q$ (ب) $\sim p$ يحتم منطقيا $p \to q$

٤ - ٤٥ أوجد القضايا التى تحتم منطقيا (أ) صيغة تأكيد (ب) صيغة تناقض .

أجوبة المسائل الاضافية

٤ - ٢٣ (أ) $\sim p \wedge q$ ، (ب) $\sim p \wedge \sim q$ ، (جـ) $p \vee \sim q$ ، (د) $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$

٤ - ٢٤ (أ) $(p \vee q) \wedge \sim r$ ، (ب) $(p \wedge q) \vee \sim (p \wedge r)$ ، (جـ) $\sim (p \wedge \sim r)$ ، (د) $\sim [(r \vee q) \wedge \sim p]$.

٤ - ٢٥ (أ) مارى تتحدث الفرنسية أو الدنمركية .

(ب) مارى تتحدث الفرنسية والدنمركية .

(جـ) مارى تتحدث الفرنسية ولكن لا تتحدث الدنمركية .

(د) مارى لاتتحدث الفرنسية أو لا تتحدث الدنمركية .

(هـ) ليس صحيحاً أن مارى لاتتحدث الفرنسية .

(و) ليس صحيحاً أن مارى لاتتحدث الفرنسية ولاالدنمركية .

٤ - ٢٦

p	q	$p \vee \sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim(\sim p \wedge q)$	$\sim(\sim p \vee \sim q)$
T	T	T	F	T	T
T	F	T	F	T	F
F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	T	F

٤ - ٢٧

p	q	r	(a)	(b)	(c)
T	T	T	T	F	T
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	F
T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	F
F	F	F	F	T	T

٤ - ٣١ (أ) $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$ ، (ب) $p \wedge q \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$.

٤ - ٣٣ (أ) $\sim p \vee q$ ، (ب) $p \wedge \sim q$ ، (جـ) $p \vee q$.

٤ - ٣٤ (جـ) هو غنى أو سعيد . (و) مارى تتحدث الالمانية ولكن ليس العربية ولا الفرنسية .

٤ - ٣٥ (أ) TTFF (ب) FFFT

٤ - ٣٦ (أ) TFTT (ب) FTFT

٤ - ٣٧ (ارشاد : كون جداول الصواب المعنية)

٤ - ٣٨ (أ) إذا لم يربح ، فليس لديه شجاعة ، (ب) اذا تعب ، فلن يربح .

٤ - ٣٩ (أ) $q \to \sim p$ ، (ب) $\sim q \to p$ ، (جـ) $\sim p \to q$ ، (د) $p \to q$

٤ - ٤٠ (أ) مغالطه (ب) صحيح .

٤ - ٤١ (أ) صحيح (ب) مغالطة .

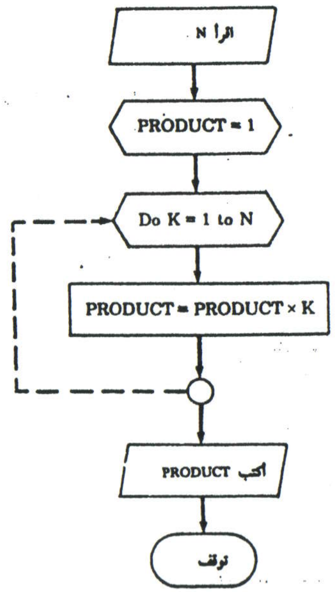
٤ - ٤٢ (أ) $p \to \sim q,\ \sim r \vee q, r \vdash \sim p$ صحيح (جـ) $p \to \sim q,\ p \vee r, r \vdash q$ مغالطة

(ب) $p, q \vdash p \leftrightarrow q;$ صحيح (د) $p \to \sim q,\ q \vee r,\ p \vdash r$ سحيح

٤ - ٤٥ (أ) كل قضية تحتم منطقياً صيغة تأكيد .

(ب) فقط صيغة تناقض تحتم منطقياً صيغة تناقض .

٥ ـ ٤٨ انظر الشكل ٥ ـ ٣٠ . لاحظ اننا اعطينا قيمة مبدئية 1 لـ PRODUCT



شكل ٥ ـ ٣٠

٥ ـ ٤٩ (أ) سبع مرات ، لـ K= 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 . (ب) ثلاث مرات ، لـ K= 4,6,8 . (جـ) اما مرة واحدة ، لـ K=7 أو ولا مرة ، اعتمادا على المترجم . (د) ثلاث مرات ، لـ K= 15,13,11, .

الفصل السادس

الفئات والعلامات

٦ ـ ١ مقدمة

مفهوم الفئة يظهر فى جميع فروع الرياضيات . كما سنرى ، فان خواص الفئات تكون شديدة الشبه بخواص قضايا النقاش (الفصل الرابع) وبخواص الدوائر الكهربية المنطقية (والفصل السابع) . وسيشتمل هذا الفصل فى آخره على شرح للعلاقات ؟ بصفة خاصة ، علاقات التكافؤ والدوال .

٦ ـ ٢ الفئات والعناصر

الفئة يمكن اعتبارها تجمعا من الأشياء ، هى عناصر الفئة . وسوف نستخدم ، عادة الحروف الكبيرة : ... $A, B, X, Y,$ للدلالة على الفئات ، والحروف الصغيرة ، ... $a, b, x, y,$ للدلالة على عناصر الفئة . التقرير p عنصر من عناصر A ، أو التقرير المكافىء p تنتمى الى A . يكتب

$$p \in A$$

نفى أن $P \in A$ يكتب $P \notin A$

الحقيقة أن الفئة تحدد تماما بتحديد عناصرها يصاغ فى صورة مبدأ الاحتواء .

مبدأ الاحتواء : الفئتان A,B متساويتان اذا وفقط اذا كان كل منهما تحوى نفس العناصر .

كالمعتاد ، نكتب $A=B$ اذا كانت الفئتان A,B متساويتين ، ونكتب $A \neq B$ اذا لم تكون متساويتين .

توجد طريقتان أساسيتان لتعريف فئة معينة . احدى الطرق ، هى سرد عناصر هذه الفئة . إن أمكن . فمثلا

$$A = \{ a, e, i, o, u \}$$

ترمز للفئة A التى عناصرها هى الحروف a, e, i, o, u . لاحظ أن العناصر يفصل بينها فواصل وتكون داخل قوسين { } . الطريقة الثانية هى كتابة صفة مميزة لعناصر الفئة . فمثلا

$$B = \{x : x \text{ عدد صحيح}, x > 0 \}$$

وتقرأ B هى فئة x حيث x عدد صحيح و x أكبر من 0 ، ترمز للفئة B التى عناصرها الأعداد الصحيحة الموجبة . عادة الحرف x يستخدم للدلالة على العنصر العام للفئة ، : تقرأ «حيث» والفاصلة تقرأ «و» .

مثال ٦ ـ ١

(أ) الفئة A السابقة يمكن كتابتها أيضا فى الصورة

$$A = \{x : x \text{ حرف من حروف الهجاء الانجليزية و } x \text{ حرف متحرك} \}$$

لاحظ أن $b \notin A$, $e \in A$ و $P \notin A$