الفصل الثاني

حل المعادلات غير الخطية ذات المتغير

Solving Nonlinear Equations

حل المعادلات غير الخطية ذات المتغير الواحد

Solving Nonlinear Equations With One Variable

يناقش هذا الفصل مسألة إيجاد حلول (جذور) المعادلات غير الخطية والتي تسمى أيضاً مسألة أصفار الدوال. لهذه المسألة أهمية كبيرة في حياتنا اليومية حيث إنها تنشأ في الكثير من التجارب العملية والهندسية.

ندرس في هذا الفصل بعض الطرائق العددية لحساب حلول تقريبية للمعادلة غير الخطية:

$$f(x) = 0 \tag{2.1}$$

إذا وُجِدَ عدد α بحيث إن $f(\alpha) = 0$ ، فإن α هو حل للمعادلة (2.1). أيضاً، تسمى α صفر أو جذر الدالة $f(x)$. بناء على ذلك، فإن الطرائق العددية التي سوف ندرسها تحسب قيم تقريبية للحل α. سوف يتضمن نقاشنا دراسة تحليلية للأخطاء المرافقة لهذه الطرائق، كما سوف ندرس معدل تقارب بعضها.

(٢,١) طريقة التنصيف

Bisection Method

إن من أقدم الطرائق المعروفة لإيجاد جذر المعادلة (2.1) هي طريقة التنصيف والتي تقوم بتحديد الحل في فترة معينة ومن ثم تعمل على تصغير هذه الفترة تدريجياً حتى ينحصر الحل في أصغر فترة ممكنة.

لاستخدام هذه الطريقة يتعين

ـ أولاً تحديد الثابتين a و b بحيث إن $f(a)f(b)<0$ ،

بافتراض أن f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ فإنه حسب نظرية القيمة المتوسطة يوجد عدد واحد على الأقل، وليكن α، في الفترة (a,b) بحيث إن $f(\alpha)=0$.

ـ نضع $a_1=a$ ، $b_1=b$ و $x_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$ (وهي نقطة الوسط للفترة $[a,b]$)

ثم نحسب قيمة $f(x_1)$ ، والتي تعطينا أحد الاحتمالات الثلاثة التالية:

١ - $f(x_1) = 0$ ، وهذا يعني أن $\alpha = x_1$ هو الحل المطلوب.

٢ - $f(a_1)f(x_1) < 0$ ، ومنــه تــستنتج أن الحــل α موجــود في الفــترة $[a_1, x_1]$.

٣ - $f(x_1)f(b_1) < 0$ ، أي أن $\alpha \in [x_1, b_1]$.

من الواضح أنه في حالة الحصول على الاحتمال الأول فإننا نوقف العمليات الحسابية لأننا نكون قد حصلنا على الحل المطلوب. أما بالنسبة للحالتين الثانية و الثالثة فإنه يستوجب متابعة الحساب.

– لنفترض أن $f(x_1) \neq 0$ وأن $f(a_1)f(x_1) < 0$ فإن الخطوة التالية في طريقة التنصيف تكون وضع $a_2 = a_1$ ، $b_2 = x_1$ و $x_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$ والذي بدوره يعطينا الاحتمالات الثلاثة آنفة الذكر بالنسبة لـ a_2 ، b_2 و x_2.

– لنفترض الآن أن $f(x_2) \neq 0$ وأن $f(x_2)f(b_2) < 0$ فإن هذا يعني أن الحل α موجود في الفترة $[x_2, b_2]$. ومن ثم نضع $a_3 = x_2$ ، $b_3 = b_2$ و $x_3 = \dfrac{a_3 + b_3}{2}$.

– تُكرر هذه الكيفية للحصول على متتالية من الأعداد x_1 ، x_2 ، ... ، x_n حيث إن:

$$n \geq 1 \qquad x_n = \frac{a_n + b_n}{2},$$ حتى يتم الحصول على $f(x_n) = 0$.

ملاحظة : عملياً مـن غـير المـرجّح أن تكـون قيمـة $f(x_n)$ مساوية للـصفر في الحاسـب الآلي وذلـك بـسبب أخطـاء التـدوير المرتبطـة بالعمليات الحسابية.

وبنـاء عـلى ذلـك، يمكن الـسماح بوضع $|f(x_n)| \leq \varepsilon$ حيث إن ε عدد حقيقي موجب صـغير

مثال (٢,١)

للمعادلة $x^2 - x - 2 = 0$ حل وحيد في الفترة $[1.5,3]$. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلا تقريبياً بدقة 5×10^{-3}.

- في البداية نلاحظ أن $f(x) = x^2 - x - 2$ ، $f(1.5) = -1.25 < 0$ و $f(3) = 4 > 0$ ، وبوضع $a_1 = 1.5$ و $b_1 = 3$ فيكون لدينا $x_1 = \frac{1.5+3}{2} = 2.25$.

- وحيث إن $f(x_1) = 0.81250 > 0$ فإن الحل يكون موجود في الفترة $[1.5,2.25]$ وبالتالي فإننا نضع $a_2 = 1.5$ و $b_1 = 2.25$.

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\frac{b_n - a_n}{2}$
1	1.50000	3.00000	2.25000	0.81250	0.75000
2	1.50000	2.25000	1.87500	−0.35938	0.37500
3	1.87500	2.25000	2.06250	0.19141	0.18750
4	1.87500	2.06250	1.96875	−0.09277	0.09375
5	1.96875	2.06250	2.01563	0.04712	0.04688
6	1.96875	2.01563	1.99219	−0.02338	0.02344
7	1.99219	2.01563	2.00391	0.01173	0.01172
8	1.99219	2.00391	1.99805	−0.00586	0.00586
9	1.99805	2.00391	2.00098	0.00293	0.00293

النتائج العددية مدرجة في الجـدول والذي يوضح تقارب متتالية الأعـداد إلى الحـل التقريبـي حيـث تـم إيقاف الحسابات عندما تحقق $|f(x_n)| \le 5\times10^{-3}$.

النظرية التالية توضح أن متتالية الأعداد التي تحسبها طريقة التنصيف تتقارب دائماً إلى الحل المضبوط للمعادلة غير الخطية $f(x)=0$

نظرية (٢,١)

لتكن f دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ بحيث إن $f(a)f(b)<0$.

فإن طريقة التنصيف تكوّن متتالية من الأعداد الحقيقية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تحقق المتباينة:

$$|x_n-\alpha|\le\frac{b-a}{2^n},\qquad n\ge 1 \tag{2.3}$$

البرهان:

بمـا أن الحل α موجود في الفترة $[a_n,b_n]$ من أجل $n\ge 1$، فإنه من (2.2) ينتج لدينا:

$$|x_n-\alpha|=\left|\frac{a_n+b_n}{2}-\alpha\right|\le\left|\frac{a_n+b_n}{2}-a_n\right|=\left|\frac{b_n-a_n}{2}\right| \tag{2.4}$$

أيضاً نلاحظ أن:

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2},$$
$$b_3 - a_3 = \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{b-a}{2^2},$$

وبشكل عام، يكون لدينا:

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

وبالتعويض عن ذلك في (2.4) نحصل على المتباينة (2.3).

مثال (٢,٢)

هنا سوف نحسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بالحل التقريبي x_6 في المثال (٢,١)، حيث إن:

$$|x_6 - \alpha| \leq \frac{3-1.5}{2^6} = \frac{1.5}{64} \approx 0.02344$$

نعلم أن الحل المضبوط للمعادلة الموجودة في المثال (٢,١) هو $\alpha = 2$ وبالتالي فإن الخطأ المضبوط المتعلق بالحل التقريبي x_6 هو $|x_6 - \alpha| = 0.00781$. وهو أقل من الحد الأعلى كما يجب أن يكون.

لنفترض الآن أننا نريد استخدام طريقة التنصيف لحساب حـلاً تقريبيـاً x_N بدقـــة $\varepsilon = 5\times10^{-t}$ حيــث إن $t \geq 1$ عـــدد صـــحيح، أي أنـــه يحقـــق الـــشرط $|x_N - \alpha| \leq \varepsilon$. فإنه يمكن استخدام نظرية (٢,١) لحساب عدد التكرارات اللازمـة للحصول على هذا الحل كما يلي: في البداية نلاحظ أن:

$$|x_N - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^N} \leq 5\times10^{-t}$$

و بالتالي يكون لدينا:

$$2^N \geq \frac{10^t(b-a)}{5}$$

وبأخذ ln الطرفين نحصل على: $N\ln 2 \geq \ln\{10^t(b-a)\} - \ln 5$

ومنه يكون لدينا: $N \geq \dfrac{\ln\{10^t(b-a)\} - \ln 5}{\ln 2}$

هذه المتباينة تعطينا حداً لعدد التكرارات المطلوبة.

مثال (٢,٣)

هنا نحسب عدد التكرارات اللازمة للحصول على حل تقريبي بدقة 10^{-3} للمسألة الموجودة في المثال (٢,١). بما أن $a = 1.5$ و $b = 3.5$ فإنه من المتباينة (2.6) نحصل على:

$$N \geq \frac{\ln[(1.5)(10^3)]}{\ln 2} \approx 10.55$$

مما يعني أنه للحصول على الحل التقريبي بالدقة المطلوبة قد نحتاج إلى ١١ تكراراً.

(٢,٣) معايير الوقوف

Stopping Criteria

- لإيجاد جذر المعادلة $f(x)=0$ ، فإننا نوجد متتالية من الأعداد $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ بحيث إن $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$، حيث α حل لهذه المعادلة.

- نحن نريد أن نحسب x_N بحيث يكون الفرق $|x_N-\alpha|$ أقل أو يساوي δ، (δ الدقة المطلوبة للحل التقريبي x_N)

- بما أن قيمة α تكون عادة غير معلومة فإنه لا يمكن إيجاد قيمة x_N

- إذن، فالسؤال الذي يطرح نفسه هنا هو؛ كيف يمكن التأكد من الحصول على الحل x_N أو بعبارة أخرى، متى يمكن وقف حساب عناصر المتتالية $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$؟

– يمكن استخدام أحد الشروط (المعايير) التالية لوقف العمليات الحسابية:

$$|f(x_N)| \le \varepsilon \tag{2.8}$$

$$|x_N - x_{N-1}| \le \varepsilon \tag{2.9}$$

$$\frac{|x_N - x_{N-1}|}{|x_N|} \le \varepsilon \tag{2.10}$$

حيث إن x_{N-1} و x_N هما الحلان التقريبيان عند التكراريين $N-1$ و N، بالترتيب، و $\varepsilon > 0$ هو التفاوت المسموح به. عادة نضع $\delta = \varepsilon$ لإيجاد x_N و بناء على ذلك فإننا نأمل أن تحقق المتباينة $|x_N - \alpha| \le \delta$.

يجدر الإشارة هنا إلى أن الشرط الثالث هو أفضل الشروط الثلاثة المدرجة سابقاً، حيث إنه قد تنشأ بعض المشاكل أثناء استخدام الشرطين الآخرين.

(٢,٤) طريقة تكرار النقطة الثابتة

Fixed-Point Iteration Method

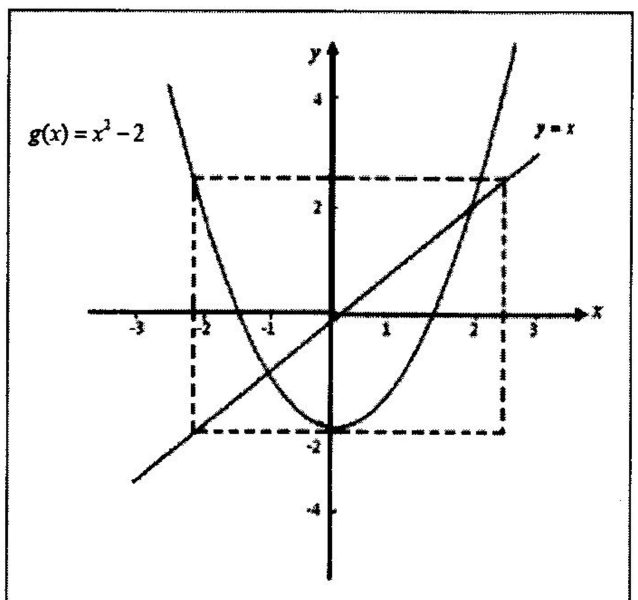
إن الفكرة الأساسية لطريقة النقطة الثابتة (أو ما تسمى بطريقة التكرار الدالي) لحل المعادلة غير الخطية (2.1) هي كتابة هذه المعادلة بالشكل المساوي:

$$x = g(x) \tag{2.12}$$

وبالتالي فإن أي حل للمعادلة (2.12) هو عبارة عن حل للمعادلة الأصلية (2.1). نشير هنا إلى أنه أي حل للمعادلة (2.12) يسمى عادة بالنقطة الثابتة للدالة g، وهو ما يعني بأن الحل لا يتأثر بتطبيق الدالة g.

مثال (٢,٧)

للدالة $g(x) = x^2 - 2$ نقطة ثابتة وحيدة في الفترة [0,2.5] بينما لها نقطتين ثابتتين في الفترة [−2,2]



مثال يمكن تحويل المعادلة غير الخطية $x^2-x-2=0$ إلى عدة أشكال مساوية من النوع $x=g(x)$، نختار منها

١- $x=g_1(x)=x^2-2$

٢- $x=g_2(x)=1+\dfrac{2}{x}$

٣- $x=g_3(x)=\sqrt{x+2}$

ملاحظة : يتضح مما سبق أن مسألة حل المعادلة (2.1) أصبحت إيجاد نقطة ثابتة للمعادلة (2.12). في الواقع هناك أكثر من وسيلة لكتابة المعادلة الأصلية (2.1) بالشكل المساوي (2.12)، وهذا يعني أن المشكلة الأساسية التي تواجهنا لحل المعادلة الأصلية على الفترة المغلقة $[a,b]$ باستخدام طريقة التكرار الدالي هي اختيار الدالة g المناسبة بحيث يوجد لها نقطة ثابتة وحيدة في هذه الفترة. النظرية التالية توضح لنا الشروط الكافية لوجود نقطة ثابتة وحيدة للدالة g.

نظرية (٢,٢)

لتكن $g \in C[a,b]$ و $g(x) \in [a,b]$ لكل $x \in [a,b]$، فإنه يوجد نقطة ثابتة للدالة g في الفترة $[a,b]$. إضافة إلى ذلك لتكن $|g'(x)| < 1$ لكل $x \in (a,b)$ فإن النقطة الثابتة تكون وحيدة.

البرهان:

إذا كان $g(a) = a$ أو $g(b) = b$، فإن وجود النقطة الثابتة يكون بديهياً. لنفترض أن هذا غير صحيح، إذن حسب المعطيات لابد أن يكون لدينا $g(a) > a$ و $g(b) < b$. لنعّرف الدالة $f(x) = g(x) - x$ وهي دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ وتحقق الشرطين $f(a) > 0$ و $f(b) < 0$. إذن فإنه حسب نظرية القيمة المتوسطة يوجد عدد α في الفترة (a,b) بحيث إن $f(\alpha) = 0$. وبناء على ذلك يكون لدينا $g(\alpha) - \alpha = 0$. أي أن $g(\alpha) = \alpha$، وهذا يعني أن α نقطة ثابتة للدالة g.

لإثبات أن α نقطة ثابتة وحيدة للدالة g، لنفترض أن α و β نقطتان ثابتتان للدالة g في الفترة $[a,b]$ بحيث إن $\alpha \neq \beta$. باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل والشرط $|g'(x)|<1$ لكل $x \in (a,b)$ فإننا نحصل على:

$$|\alpha-\beta|=|g(\alpha)-g(\beta)|=|g'(\eta)||\alpha-\beta|<|\alpha-\beta|$$

حيث إن $\eta \in (a,b)$. وهذا تناقض، نلاحظ أن هذا التناقض يأتي بسبب أن $\alpha \neq \beta$، إذن لابد أن يكون $\alpha=\beta$ وهذا يعني أن النقطة الثابتة وحيدة.

مثال (٢,٨)

للدالة $g(x)=\sqrt{x+2}$ نقطة ثابتة وحيدة في الفترة $[1.5,3]$، يمكن استخدام النظرية (٢,٢) لإثبات ذلك كما يلي:

نلاحظ أولا أن g دالة متصلة على الفترة $[1.5,3]$، وبالتالي يمكن تطبيق شروط النظرية. الآن بوضع $x = 1.5$ نحصل على $g(1.5) = \sqrt{3.5} \in [1.5,3]$. أيضاً إذا كان $x = 3$ فإن $g(3) = \sqrt{5} \in [1.5,3]$ وبما أن $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0$ لكل $x \in [1.5,3]$ فإن الدالة g تكون تزايدية على الفترة $[1.5,3]$. وبما أن قيمها القصوى على الفترة $[1.5,3]$ هي $\sqrt{3.5}$ و $\sqrt{5}$ فإنها تحقق الشرط $g(x) \in [1.5,3]$ لكل $x \in [1.5,3]$ وحسب نظرية (٢,٢) فإن هذا يعني أن النقطة الثابتة موجودة. أيضاً بما أن $|g'(x)| = \left|\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}\right| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{3.5}} < 1$ لكل $x \in [1.5,3]$ فإن نظرية (٢,٢) تضمن وحدانية النقطة الثابتة في الفترة $[1.5,3]$.

ملاحظة : في الواقع تعتبر شروط نظرية (٢,٢) شروط كافية وليست ضرورية لوجود نقطة ثابتة وحيدة في الفترة $[a,b]$. أي أنه إذا تحققت الشروط فإن وجود النقطة الثابتة الوحيدة يكون مضمون، وإذا لم تتحقق فإنه لا يمكن الجزم بعدم وجودها.

مثال (٢,١٠)

الدالة $g(x)=\dfrac{5}{x}$ لا تحقق شروط نظرية (٢,٢) على الفترة $[2,3]$ و ذلك لأن $g(3)\notin[2,3]$ و $|g'(x)|\geq 1$ لبعض قيم x في الفترة $[2,3]$. ولكن لهذه الدالة نقطة ثابتة وحيدة α في الفترة $[2,3]$ والتي يمكن الحصول عليها كما يلي:

$$\alpha=g(\alpha)=\frac{5}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \alpha^2=5 \quad \Rightarrow \alpha=\pm\sqrt{5}$$

وحيث إن الجذر الموجب هو فقط الذي ينتمي للفترة $[2,3]$، فهذا يعني أن النقطة الثابتة وحيدة.

(١,٤,٢) أسلوب طريقة تكرار النقطة الثابتة

لحساب قيم تقريبية لنقطة ثابتة للمعادلة $x = g(x)$ ، فإننا نختار تقريب ابتدائي x_0 ونكوّن متتالية من الأعداد $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ وذلك باستخدام الصيغة التكرارية

$$x_n = g(x_{n-1}), \qquad n \geq 1 \tag{2.13}$$

وإذا كانت المتتالية $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب إلى النقطة الثابتة α وكانت الدالة g متصلة فإنه يكون لدينا:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} g(x_{n-1}) = g(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = g(\alpha)$$

تسمى هذه الطريقة أيضاً طريقة التكرار الدالي

مثال (٢,١١)

استخدم خوارزمية تكرار النقطة الثابتة لإيجاد حلاً تقريبياً بدقة $\varepsilon = 5\times10^{-4}$ للمعادلة غير الخطية $x^3 - x - 1 = 0$ و ذلك بوضع $g(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x}}$ و $x_0 = 1.5$.

نشير هنا إلى أن الصيغة التكرارية لهذا المثال تأخذ الشكل $x_n = \sqrt{1+\frac{1}{x_{n-1}}}$، من أجل $n \geq 1$. وبوضع $x_0 = 1.5$ نحصل على $x_1 = \sqrt{1+\frac{1}{x_0}} = \sqrt{1+\frac{1}{1.5}} = 1.29094$، وبمعرفة x_1 يمكن حساب x_2 حيث إن $x_2 = \sqrt{1+\frac{1}{x_1}} = 1.33214$ وهكذا يتم حساب عناصر المتتالية العددية $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. النتائج العددية التي تم الحصول عليها بحل هذا المثال مدرجة في الجدول

n	x_n	$\lvert f(x_n) \rvert$
0	1.5	0.87500
1	1.29099	0.13934
2	1.33214	0.03187
3	1.32313	0.00677
4	1.32506	0.00146
5	1.32464	0.00031

تم إيقاف الحسابات عندما تحقق الشرط $\lvert f(x_n) \rvert \le 5\times10^{-4}$.

مثال (٢,١٢)

هنا سنستخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لحساب حلاً تقريبياً بدقة $\varepsilon = 10^{-5}$ للمعادلة غير الخطية $x^2 - x - 2 = 0$ في الفترة $[1.5,3]$ وذلك بوضع $x_0 = 2.5$.

يمكن تحويل هذه المعادلة إلى عدة أشكال مساوية من النوع $x = g(x)$، نختار منها ما يلي:

١- $x = g_1(x) = x^2 - 2$

٢- $x = g_2(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$

٣- $x = g_3(x) = \sqrt{x+2}$

وبوضع $x_0 = 2.5$ واستخدام الصيغ التكرارية $x_n = g_i(x_{n-1})$، $n \ge 1$، من أجل $i = 1,2,3$ حصلنا على النتائج الموجودة في الجدول

	x_n		
n	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$
1	4.250000	1.800000	2.121320
2	16.06250	2.111111	2.030104
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
6	1.84×10^{19}	2.006711	2.000117
7	خرجت عن نطاق القدرة	1.996656	2.000029
8	الحسابية للجهاز	2.001675	2.000007
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
15	تتباعد	1.999987	2.000000
16		2.000007	2.000000

نلاحظ من الجدول رقم (٢,٤) أن الصيغتين التكراريتين (٢) و(٣) تتقاربان إلى الحل الفعلي $\alpha = 2$ ولكن بسرعات متفاوتة حيث إن الصيغة الثالثة هي الأسرع وذلك لأنه قد تم الوصول إلى الحل التقريبي المطلوب بعد ثمانية تكرارات فقط بينما استغرق ذلك ستة عشر تكراراً بالنسبة للصيغة الثانية. من ناحية أخرى، نلاحظ من الجدول أن الصيغة التكرارية للاختيار الأول تنشئ متتالية متباعدة.

يتضح من المثال (٢,١٢) مدى الحاجة إلى أسلوب أو مقياس يساعدنا على اختيار الدالة g المناسبة والتي تُكون متتالية تتقارب إلى الحل α بأسرع ما يمكن. النظريتان التاليتان تتضمنان ذلك.

نظرية (٢,٣) (نظرية النقطة الثابتة)

لتكن g دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ و أن $g(x) \in [a,b]$ لكل $x \in [a,b]$. إضافة إلى ذلك، لنفترض أن g' موجودة على الفترة $[a,b]$ بحيث إن $|g'(x)| \leq \lambda < 1$ لكل $x \in (a,b)$. إذا كانت x_0 أي عدد في الفترة $[a,b]$ فإن المتتالية المعرفة بـ $x_n = g(x_{n-1})$ ، $n \geq 1$ ، تتقارب إلى النقطة الثابتة الوحيدة α في الفترة $[a,b]$.

نظرية (٢,٤)

إذا كانت g تحقق شروط نظرية النقطة الثابتة و أن $x_0 \in [a,b]$ ، فإن المتتالية المعرفة بـ $x_n = g(x_{n-1})$ ، $n \geq 1$ تحقق المتباينة:

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_1 - x_0|, \qquad n \geq 1 \qquad (2.17)$$

ملاحظة :

نلاحظ من النظريتين (٢,٣) و(٢,٤) أن هناك علاقة بين العدد الحقيقي الموجب λ وسرعة تقارب المتتالية $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$، حيث إنه كلما قلت قيمة λ كان التقارب أسرع. بناء على ذلك، فإنه يمكن تلخيص ما يستفاد من هاتين النظريتين بالتالي: لضمان تقارب المتتالية المعرفة في المعادلة (2.13) يجب اختيار الدالة g التي تحقق شرطي نظرية النقطة الثابتة. وللحصول على تقارب أسرع لابد من مراعاة أن تكون قيمة λ أقرب ما يمكن إلى الصفر.

باستخدام النظريتين السابقتين، يمكننا الآن مناقشة الصيغ التكرارية الموجودة في المثال (٢,١٢) من حيث التقارب وسرعته.

مثال (٢,١٣)

بالنسبة للاختيار الأول $g(x) = x^2 - 2$ فإننا نلاحظ أن $g(1) = -1$ والعدد -1 لا ينتمي إلى الفترة $[1.5,3]$. وهذا يعني أن الشرط الأول لنظرية النقطة الثابتة غير متحقق. إضافة إلى ذلك فإن $g'(x) = 2x > 1$ لكل $x \in [1.5,3]$، وبالتالي فإن الشرط الآخر للنظرية غير متحقق أيضاً. إذن، تقارب المتتالية المعرفة بـ $g(x_n) = x_{n-1}^2 - 2$، $n \geq 1$ يكون غير مضمون. في الواقع العملي، كما هو موضح في الجدول رقم (٢,٤)، فإن هذه المتتالية متباعدة.

أما بالنسبة للاختيارين الثاني والثالـث $g(x)=1+\dfrac{2}{x}$ و $g(x)=\sqrt{x+2}$ ،

فإنه يمكـن إثبـات أنهـما يحققـان شرطـي النظريـة (انظـر مثـال ٢,٨)،

وبالتــالي فــإن المتتــابعتين المعــرفتين بـــ $g(x_n)=1+\dfrac{2}{x_{n-1}}$ و $g(x_n)=\sqrt{x_{n-1}+2}$

تتقاربـان إلى النقطـة الثابتة $\alpha = 2$.

وهذا ما حصل فعلاً حسب النتائج العددية الموجودة في الجدول

ومن هذه النتائج نلاحظ أن تقارب الصيغة التكرارية المقرونة بالاختيار الثالث أسرع من تقارب تلك المعتمدة على الاختيار الثاني، وذلك لأن قيمة λ بالنسبة للصيغة التكرارية $g(x_n)=\sqrt{x_{n-1}+2}$ هي تقريباً 0.27 بينما قيمة λ المرافقة للصيغة التكرارية $g(x_n)=1+\frac{2}{x_{n-1}}$ هي تقريباً 0.89. وبالتالي فإنه حسب النظريتين (٢,٣) و(٢,٤) يكون تقارب الصيغة الثالثة أسرع من تقارب الصيغة الثانية. بناء على ذلك فإن الاختيار الثالث هو الأفضل.

نظرية (٢,٥)

لنفترض أن $g(x)$ و $g'(x)$ دالتان متصلتان من أجل $c < x < d$ و أن الفترة (c,d) تحتوي على النقطة الثابتة α. إضافة، لنفترض أن:

$$|g'(\alpha)| < 1 \tag{2.18}$$

فإنه يوجد فترة $[a,b]$ حول النقطة الثابتة α والتي عليها تتحقق شروط نظرية النقطة الثابتة (٢,٣)، أي أن المتتالية المعرفة بـ $x_n = g(x_{n-1})$، $n \geq 1$ تتقارب إلى النقطة الثابتة α. من ناحية أخرى، إذا كان $|g'(\alpha)| > 1$ فإن هذه المتتالية تتباعد.

ملاحظة :

نشير إلى أنه إذا كان $|g'(\alpha)| = 1$ فلا يمكن تحديد فيما إذا كانت المتتالية متقاربة أم متباعدة.

في الواقع، حتى إذا كان التقارب موجود في هذه الحالة فإنه يكون بطيء جدا

مثال (٢,١٥)

في البداية نحن نعلم أن النقطة الثابتة هي $\alpha = 2$. إذن بالنسبة للحالة الأولى $g(x) = x^2 - 2$ يكون لدينا $|g'(2)| = 2 > 1$ مما يعني أن المتتالية المعرفة بـ $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ ، $n \geq 1$ تكون متباعدة. أما بالنسبة للحالتين الثانية $g(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$ و الثالثة $g(x) = \sqrt{x+2}$ فإنه يكون لدينا $|g'(2)| = \dfrac{1}{2} < 1$ و $|g'(2)| = \dfrac{1}{4} < 1$ وبالتالي فإنهما تكونان متتابعتين متقاربتين وأن الصيغة الثالثة تعطينا تقارب أسرع.
لاحظ هنا أنه حسب قيم $|g'(2)|$ للصيغتين فإن سرعة تقارب الصيغة الثالثة هو ضعف سرعة تقارب الصيغة الثانية، وبالرجوع إلى النتائج العددية الموجودة في الجدول رقم (٢,٤) نجد أنها تتوافق مع هذا الاستنتاج.

مثال (٢,١٦)

بالنسبة للاختيار الثالث في المثال (٢,١٢) احسب ما يلي:

١ – حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب x_4 .

٢ – عـدد التكـرارات اللازمـة للحـصول عـلى حـل تقريبـي x_N بدقـة $\varepsilon = 5\times 10^{-5}$

الحل:

لحساب الحد الأعلى للخطأ المتعلق بالتقريب x_4 فإنه يكون لدينا:

$$|\alpha - x_4| \le \frac{\lambda^4}{1-\lambda}|x_1 - x_0| = \frac{(0.26)^4}{1-0.26}|2.12132 - 2.5| \approx 0.002338$$

نشير هنا إلى أن الخطأ المضبوط هو $|x_4 - \alpha| = 0.001877$ وهو أصغر من الحد الأعلى كما ينبغي.

أما بالنسبة لحساب عدد التكرارات اللازمة، فإنه يكون لدينا:

$$|\alpha - x_N| \le \frac{\lambda^N}{1-\lambda}|x_1 - x_0| \le 5\times10^{-5}$$

ومنه نحصل على:

$$\frac{(0.26)^N}{1-0.26}|2.12132 - 2.5| \le 5\times10^{-5}$$

وبأخذ log الطرفين نجد أن:

$$N\log 0.26 \le \log 9.771\times10^{-5}$$

ومنه نحصل على $N \ge 6.8545$ وبالتالي فإن $N = 7$. أي أننا قد نحتاج إلى سبعة تكرارات للحصول على الحل التقريبي المطلوب.

(٢,٥) طريقة نيوتن- رافسون

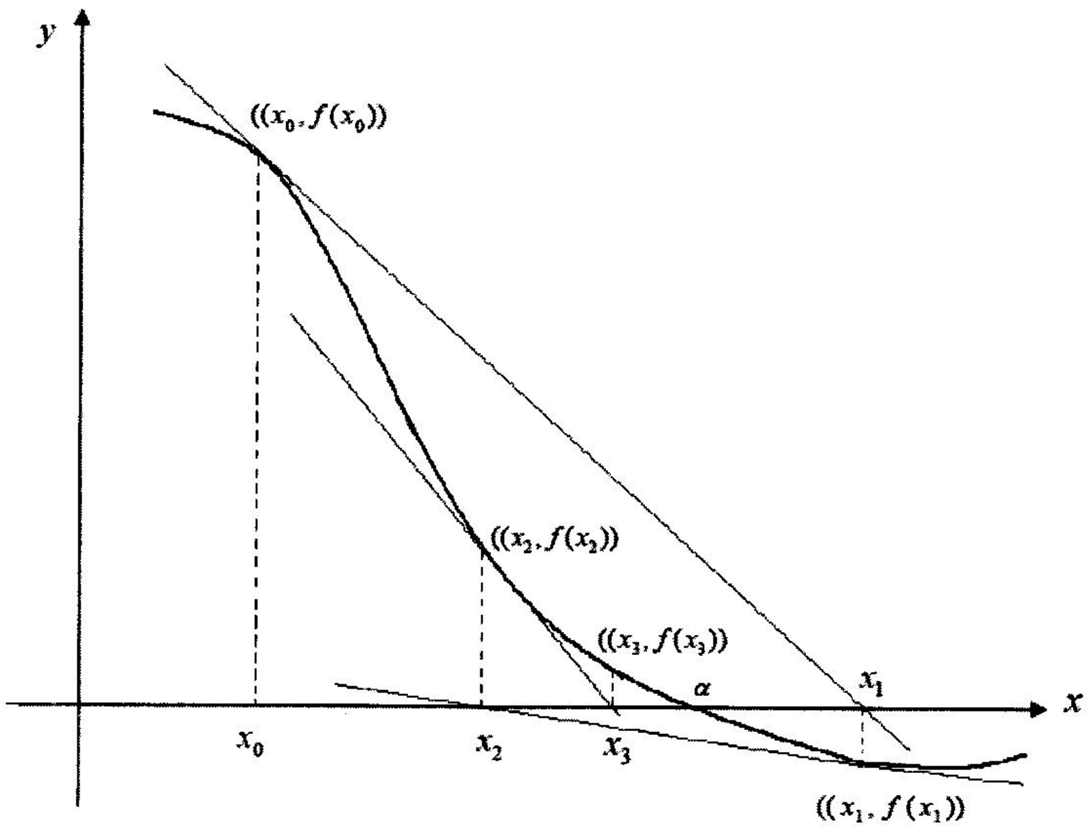
Newton-Raphson Method

تعد طريقة نيوتن- رافسون (أو كما تسمى عادة طريقة نيوتن) من أشهر الطرائق العددية المعروفة لحل المعادلة (2.1) وذلك لسهولة استخدامها و سرعة تقاربها. كما أنها عبارة عن حالة خاصة من طريقة تكرار النقطة الثابتة والتي درسناها في البند السابق.

يمكن استنتاج الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن- رافسون باستخدام عدة أساليب سنناقش هنا أسلوبين فقط

الاسلوب الاول:

ليكن للدالة f جذر α في الفترة $[a,b]$، ولنبدأ بتقريب ابتدائي x_0 للجذر α. ثم نرسم المستقيم المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ ونرمز لنقطة تقاطع هذا المستقيم مع محور x بالرمز x_1، انظر الشكل رقم (٢,٩).



- يمكن كتابة معادلة المستقيم المماس الذي يمر بالنقطة $(x_0, f(x_0))$ وميله هو $f'(x_0)$ بالشكل: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

- الآن بما أن المستقيم المماس يقطع محور x عند النقطة $(x_1, 0)$، فإنه يكون لدينا المعادلة: $0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$

- و بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ x_1 نحصل على: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

وهو تقريب أفضل من x_0 للجذر α بشرط أن يكون $f'(x_0) \neq 0$. بالمثل، من معادلة المستقيم المماس عند النقطة $(x_1, f(x_1))$ والذي يقطع محور x عند النقطة $(x_2, 0)$ يمكن الحصول على: $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

- وبالاستمرار بنفس الأسلوب نحصل على: $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ ، $n \geq 1$ (2.19)

المعادلة (2.19) هي الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن- رافسون.

الاسلوب الثاني:

الأسلوب الآخر لاستنتاج طريقة نيوتن يرتكز على كثيرة الحدود تايلور والمعرفة في نظرية (١,٦) في الفصل الأول. لنفترض أن $f \in C^2[a,b]$ وأن $\bar{x}$ حل تقريبي للمعادلة غير الخطية (2.1) بحيث إن $f'(\bar{x}) \neq 0$ و $|\bar{x}-\alpha|$ عدد صغير. إذن يمكن كتابة كثيرة الحدود تايلور ذات الرتبة الأولى للدالة f حول العدد $\bar{x}$ بالشكل:

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x-\bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x-\bar{x})^2}{2!} f''(\eta(x))$$

حيث إن $\eta(x)$ تقع بين x و $\bar{x}$. بوضع $x=\alpha$ واستخدام الحقيقة أن $f(\alpha)=0$ نحصل على:

$$f(\bar{x}) + (\alpha-\bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(\alpha-\bar{x})^2}{2!} f''(\eta) = 0$$

حيث إن η تقع بين α و $\bar{x}$. الآن باعتبار أن الفرق $|\bar{x}-\alpha|$ صغير بحيث يمكن إهمال الحد الذي يحتوي على $(\alpha-\bar{x})^2$ فإنه يكون لدينا:

$$f(\bar{x})+(\alpha-\bar{x})f'(\bar{x})\approx 0$$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة لـ α نحصل على:

$$\alpha\approx\bar{x}-\frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

يعد الحد الموجود في الطرف الأيمن للمعادلة (2.20) تقريب أفضل من $\bar{x}$ للحل α. تضع هذه المعادلة حجر الأساس لطريقة نيوتن- رافسون والتي تبدأ بالتقريب x_0 لتنشأ المتتالية $\{x_x\}_{n=0}^{\infty}$ والمعرفة بالمعادلة (2.19).

ملاحظة :

كما سبق أن ذكرنا في بداية هذا البند، تعد طريقة نيوتن- رافسون حالة خاصة من طريقة التكرار الدالي والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$x_n = g(x_{n-1}), \qquad n \geq 1$$

حيث إن:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (2.21)$$

بناء على ذلك، فإن خوارزمية طريقة نيوتن- رافسون هي خوارزمية تكرار النقطة الثابتة

مثال (٢,١٧)

ابتداء من الحل التقريبي $x_0 = 2.5$ استخدم طريقة نيوتن- رافسون لحساب حلاً تقريبياً بدقة 10^{-5} للمعادلة غير الخطية $x^2 - x - 2 = 0$.

الحل :

ابتداء من الحل التقريبي $x_0 = 2.5$ استخدم طريقة نيوتن- رافسون لحساب حلاً تقريبياً بدقة 10^{-5} للمعادلة غير الخطية $x^2 - x - 2 = 0$.

بوضع $f(x) = x^2 - x - 2$ يكون لدينا $f'(x) = 2x - 1$ وبالتالي فإن الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن- رافسون لحل هذه المسألة تأخذ الشكل:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - x_n - 2}{2x_n - 1}$$

من أجل $n \geq 0$. و بوضع $x_0 = 2.5$ حصلنا على النتائج العددية

n	x_n	$\lvert f(x_n) \rvert$
1	2.0652000	0.1914063
2	2.0012500	0.0037516
3	2.0000005	0.0000015

نظرية (٢,٦)

لتكن $f \in C^2[a,b]$ و $\alpha \in [a,b]$ بحيث إن $f(\alpha)=0$ و $f'(\alpha) \neq 0$ ، فإنه يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث إن طريقة نيوتن- رافسون تكوّن متتالية $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب إلى α لأي اختيار ابتدائي x_0 يقع في الفترة $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$.

ملاحظة :

مما سبق يتضح أن وجود تفاضل الدالة f في مقام حاصل القسمة الموجود في الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن- رافسون يؤدي إلى معظم سلبيات الطريقة. وبالتالي، فإن التخلص من وجود f' يعني القضاء على هذه السلبيات. أحد الطرائق المستخدمة لعمل ذلك هي طريقة القاطع والتي ترتكز على تقريب تفاضل الدالة f عند التكرار x_n بدلاً من القيمة الفعلية للتفاضل. هذا ما سنناقشه في البند التالي.

(٢,٦) طريقة القاطع

The Secant Method

مما سبق نعلم أن الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن- رافسون يمكن كتابتها بالشكل:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n \geq 0$$

والتي من أهم سلبيات استخدامها وجود الحد $f'(x_n)$. للتغلب على هذه المشكلة لنفترض أن x_{x-1} و x_n قيمتان تقريبيتان (جيدتان) للحل α ولنُقرّب هذا التفاضل بـ:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \tag{2.23}$$

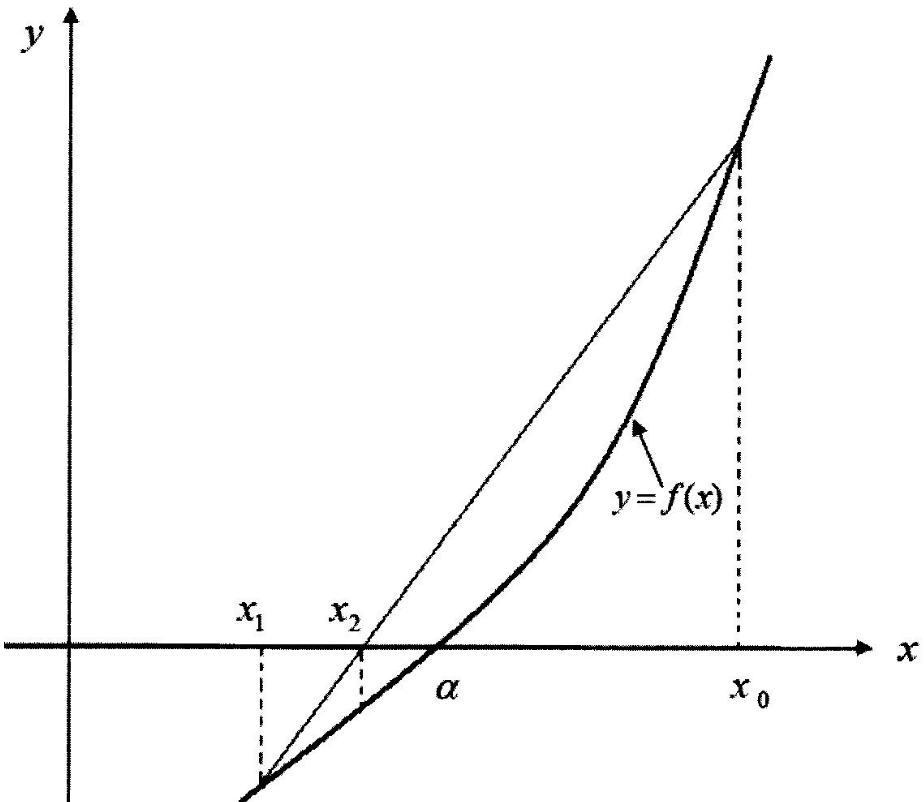
وبالتعويض عن هذا التقريب في الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن- رافسون نحصل على:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \qquad n \geq 1 \qquad (2.24)$$

وهي الصيغة التكرارية لطريقة القاطع.

ملاحظة :

التمثيل الهندسي لطريقة القاطع يشبه ذلك لطريقة نيوتن- رافسون عدا أنه في هذه الحالة نستبدل المستقيم المماس بالمستقيم القاطع



مثال (٢,١٨)

لنستخدم طريقة القاطع لإيجاد حلا تقريبياً بدقـة $\varepsilon = 10^{-6}$ للمعادلـة غـير الخطية $x^2 - x - 2 = 0$ وذلك ابتداء من القيمتين التقريبيتين $x_0 = 1.5$ و $x_1 = 2.5$.

بوضع $f(x) = x^2 - x - 2$ تكون الصيغة التكرارية لطريقة القاطع بالشكل:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n^2 - x_n - 2)(x_n - x_{n-1})}{x_n^2 - x_n - x_{n-1}^2 + x_{n-1}}, \qquad n \geq 1$$

النتائج العددية لهذا المثال

n	x_n	$\lvert f(x_n) \rvert$
2	1.9166667	0.2430556
3	1.9878049	0.0364367
4	2.0003499	0.0010545
5	1.9999986	0.0000047

(٢,٧) تحليل الخطأ ومعدل التقارب

Error Analysis and Rate of Convergence

سوف نناقش في هذا البند تحليل الخطأ للطرائق التكرارية بصورة عامة

نعني بالخطأ هو المقدار $e_n = x_n - \alpha$ لكل $n \geq 0$، حيث x_n هو الحل التقريبي للمعادلة غير الخطية $f(x) = 0$ و α هو حلها المضبوط.

تعريف (٢,١)

إذا كانت المتتالية $\{x_n\}$ تتقارب إلى α ويوجد ثابتين موجبين r و s بحيث إن:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_n - \alpha|}{|x_{n-1} - \alpha|^r} = s \qquad (2.30)$$

فإن المتتالية $\{x_n\}$ تتقارب إلى α بمعدل تقاربي r وثابت خطأ تقريبي s.

يقال إن الصيغة التكرارية $x_n = g(x_{n-1})$ ، $n \geq 1$ ذات رتبة تقاربية r إذا كانت متتالية الأعداد $\{x_n\}$ التي تكونها هذه الصيغة تتقارب إلى الحل $\alpha = g(\alpha)$ بمعدل تقاربي r. من البديهي أنه كلما زادت قيمة معدل التقارب r حصلنا على تقارب أسرع. من ناحية أخرى، ثابت التقارب s لا يؤثر على رتبة التقارب ولكن له تأثير محدود على سرعة التقارب.نشير هنا إلى أنه إذا كانت $r = 1$ فإن معدل التقارب يسمى خطياً، وإذا كانت $r = 2$ فإنه يكون تربيعياً وهكذا.

نظرية (٢,٧)

لتكن $g \in C[a,b]$ وأنها تحقق شروط نظرية النقطة الثابتة. إذا كانت g' دالة متصلة على الفترة (a,b) و $g'(\alpha) \neq 0$، فإن المتتالية المعرفة بـ $x_n = g(x_{n-1})$، $n \geq 1$ تتقارب خطياً إلى النقطة الثابتة الوحيدة $\alpha = g(\alpha)$ في $[a,b]$ لأي اختيار ابتدائي $x_0 \in [a,b]$.

البرهان:

بما أن الدالة g تحقق شروط نظرية النقطة الثابتة فإن المتتالية تتقارب إلى α.

وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل نجد أن:

$$x_n - \alpha = g(x_{n-1}) - g(\alpha) = g'(\xi_{n-1})(x_{n-1} - \alpha)$$

حيث إن ξ_{n-1} تقع بين x_{n-1} و α. الآن بما أن المتتالية $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب إلى α فإن المتتالية $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب أيضاً إلى α. وبما أن g' دالة متصلة على الفترة (a,b) فإنه يكون لدينا: $\lim_{n\to\infty} g'(\xi_{n-1}) = g'(\lim_{n\to\infty} \xi_{n-1}) = g'(\alpha)$

وبناء على ذلك فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-\alpha}{x_{n-1}-\alpha}=\lim_{n\to\infty}g'(\xi_{n-1})=g'(\alpha)$$

ومنه نحصل على:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_n-\alpha|}{|x_{n-1}-\alpha|}=|g'(\alpha)|$$

وبما أن $g'(\alpha)\neq 0$ فإنه حسب التعريف (٢,١) يكون معدل التقارب خطياً.

يمكن أن نستنتج من نظرية (٢,٧) أن معدل التقارب للطريقة التكرارية يكون أسرع من خطي فيما إذا كان $g'(\alpha)=0$، وهذا ما تنص عليه النظرية التالية.

نظرية (٢,٨)

لتكن g دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ و تحقق شروط نظرية النقطة الثابتة على هذه الفترة. إضافة لذلك ، لتكن g'' دالة متصلة على الفترة المفتوحة (a,b). إذا كانت $g'(\alpha)=0$ حيث $\alpha=g(\alpha)$، فإنه لأي اختيار ابتدائي $x_0\in[a,b]$ تتقارب المتتالية المعرفة بـ $x_n=g(x_{n-1})$ ، $n\geq 1$ إلى النقطة الثابتة الوحيدة α في $[a,b]$ بمعدل تقاربي تربيعي على الأقل.

البرهان:

بما أن الدالة g تحقق شروط نظرية النقطة الثابتة فإن المتتالية تتقارب إلى α.

بنشر كثيرة الحدود تايلور ذات الدرجة الأولى للدالة g حول العدد α فإننا نحصل على:

$$g(x)=g(\alpha)+g'(\alpha)(x-\alpha)+\frac{g''(\xi)}{2}(x-\alpha)^2$$

حيث إن ξ تقع بين x و α.

الآن بما أن $\alpha = g(\alpha)$ و $g'(\alpha) = 0$ فإنه يكون لدينا: $g(x) = \alpha + \frac{g''(\xi)}{2}(x-\alpha)^2$

وبوضع $x = x_{n-1}$ نجد أن: $x_n = \alpha + \frac{g''(\xi_{n-1})}{2}(x_{n-1}-\alpha)^2$

حيث إن ξ_{n-1} تقع بين x_{n-1} و α. الآن بما أن المتتالية $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب إلى α فإن المتتالية $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب أيضاً إلى α. وبما أن g'' دالة متصلة على الفترة (a,b) فإنه يكون لدينا: $\lim_{n\to\infty} g''(\xi_{n-1}) = g''(\lim_{n\to\infty}\xi_{n-1}) = g''(\alpha)$

وبناء على فإنه يكون لدينا: $\lim_{n\to\infty}\frac{|x_n-\alpha|}{|x_{n-1}-\alpha|^2} = \frac{1}{2}|g''(\alpha)|$

وبالتالي، وحسب التعريف (٢,١)، فإن معدل التقارب يكون تربيعياً إذا كان $g''(\alpha) \neq 0$.

ملاحظة :

في الواقع يمكن تعميم نظرية (٢,٧) لأي معدل تقاربي $r \geq 2$. فبفرض أن $\alpha = g(\alpha)$، $g'(\alpha) = g''(\alpha) = \cdots = g^{(r-1)}(\alpha) = 0$ و $g^{(r)}$ دالة متصلة على الفترة المفتوحة التي تحتوي على النقطة الثابتة α فإنه يمكن إثبات أن:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_n - \alpha|}{|x_{n-1} - \alpha|^r} = \frac{1}{r!}|g^{(r)}(\alpha)| \tag{2.41}$$

ومنه نستنتج أن معدل التقارب يكون r إذا كان $g^{(r)}(\alpha) \neq 0$.

مثال (٢,٢٠)

نعلم من مثال سابق أن المتتالية $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ المعرفة بـ $x_n = 1 + \frac{2}{x_{n-1}}$، $n \geq 1$ تتقارب إلى $\alpha = 2$. هنا الدالة g تكتب بالشكل $g(x) = 1 + \frac{2}{x}$ حيث $g(2) = 1 + \frac{2}{2} = 2$، ونلاحظ أن $g'(x) = \frac{-2}{x^2}$، ومنه نحصل على $g'(2) = -0.5$ وحسب نظرية (٢,٧) فإن معدل التقارب يكون خطياً و ذلك لأن $g'(2) \neq 0$.

مثال (٢,٢١)

لإيجاد معدل التقارب للمتتالية $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ المعرفة بـ $x_n = \dfrac{x_{n-1}^2+2}{2x_{n-1}-1}$ ، $n \geq 1$ والتي تتقارب إلى $\alpha = 2$ نلاحظ أن $g(x) = \dfrac{x^2+2}{2x-1}$ حيث إن $g(2) = 2$ ، و $g'(x) = \dfrac{2x^2-2x-4}{(2x-1)^2}$ وبالتالي فإن $g'(2) = 0$ ، وعليه فإن معدل التقارب يكون أسرع من خطي. في مثل هذه الحالة نضطر لحساب التفاضل الثاني للدالة g وذلك من أجل الحصول عل معدل التقارب. في الواقع، $g''(2) = \dfrac{2}{3} \neq 0$ وحسب نظرية (٢,٧) فإن معدل التقارب يكون تربيعياً.

ملاحظة : نشير هنا إلى أنه إذا كانت قيمة التفاضل الثاني للدالة g عند النقطة الثابتة مساوياً للصفر فإننا نحسب التفاضل الثالث للدالة... وهكذا حتى نحصل على التفاضل الذي لا تكون قيمته عند النقطة الثابتة مساوية للصفر فيكون معدل التقارب هو درجة هذا التفاضل

الجذر المكرر

لقد اعتبرنا في مناقشاتنا السابقة أن $f'(\alpha)\neq 0$ حيث α هو حل (جذر) للمعادلة غير الخطية $f(x)=0$. كما أنه من خلال تعريف طريقة نيوتن- رافسون نلاحظ أنه قد تنشأ بعض الصعوبات إذا كانت $f'(x_n)$ تؤول إلى الصفر عندما $f(x_n)$ تؤول إلى الصفر. وبشكل خاص، إذا كان $f'(\alpha)=0$. التعريف التالي يساعدنا على دراسة هذه الصعوبات واستدراج الأساليب الكفيلة للتغلب عليها.

تعريف (٢,٢)

نقول إن α جذر مكرر m مرة للمعادلة $f(x)=0$ ، إذا أمكن كتابة $f(x)$ بالشكل: $f(x)=(x-\alpha)^m q(x)$ حيث إن: $q(\alpha)\neq 0$.

مثال (٢,٢٢) يعد $x=1$ جذر مكرر مرتين للمعادلة $x^3-x^2-x+1=0$ وذلك لأنه يمكن كتابتها بالشكل $(x-1)^2(x+1)=0$. لاحظ هنا أن $q(x)=x+1$ وأن $q(1)=2\neq 0$.

نظرية (٢,٩)

لتكن $f \in C^m[a,b]$ ، يقال إن α جذر مكرر m مرة للمعادلة $f(x)=0$ إذا وفقط إذا كان $f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots=f^{(m-1)}(\alpha)=0$ ولكن $f^{(m)}(\alpha)\neq 0$.

ملاحظة :

لقد أثبتنا فيما سبق أن طريقة نيوتن- رافسون تكون تربيعية التقارب إذا كان $f(\alpha)=0$ و $f'(\alpha)\neq 0$ ، أي أنه إذا كان α جذر بسيط للدالة f . أما إذا كان الحل غير بسيط فإنه بوضع $f(x)=(x-\alpha)^m q(x)$ يمكن إثبات أنه بالنسبة للصيغة التكرارية لطريقة نيوتن- رافسون يكون لدينا:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-\alpha}{x_{n-1}-\alpha}=1-\frac{1}{m} \tag{2.44}$$

وبالتالي فإن طريقة نيوتن- رافسون تكون خطية التقارب في حالة الجذور المكررة

مثال (٢,٢٣)

العدد $x = 7$ جذراً مكرراً مرتين للمعادلة $x^3 - 13x^2 + 35x + 49 = 0$ وذلك لأن $f(7) = f'(7) = 0$ و $f''(7) \neq 0$. باستخدام طريقة نيوتن- رافسون حصلنا على النتائج العددية الموجودة في الجدول رقم (٢,٨) وذلك ابتداء من القيمة الابتدائية $x_0 = 9$. يتضح من الجدول رقم (٢,٨) أن معدل التقارب ليس تربيعياً وإنما خطياً على أفضل الأحوال.

n	x_n	$\lvert x_n - \alpha \rvert$
1	8.0909095	1.0909095
2	7.5763293	0.5763293
3	7.2975327	0.2975327
....	....	....
15	7.0000753	0.0000753
16	7.0000377	0.0000377

إذا عُلم مسبقاً أن الجذر مكرر m مرة فإنه يمكن استخدام طريقة نيوتن-رافسون المعدلة:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{mf(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \qquad n \geq 1 \tag{2.45}$$

لحساب هذا الجذر. الصيغة التكرارية (2.45) تتقارب تربيعياً إلى الحل كما يوضحه المثال

مثال (٢,٢٤)

ليكن α جذر مكرر m مرة للمعادلة غير الخطية $f(x)=0$. أثبت أن معدل التقارب للصيغة التكرارية (2.45) يكون تربيعياً.

الإثبات:

إذا كان α جذر مكرر m مرة للدالة $f(x)$ فإنه حسب تعريف (٢,٢) يمكن كتابتها بالشكل $f(x)=(x-\alpha)^m q(x)$ ، حيث إن $q(\alpha)\neq 0$. وحيث إن $g(x) = x - \frac{mf(x)}{f'(x)}$ فإنه يكون لدينا:

$$g(x)=x-\frac{m(x-\alpha)^m q(x)}{(x-\alpha)^m q'(x)+m(x-\alpha)^{m-1}q(x)}=x-\frac{m(x-\alpha)q(x)}{(x-\alpha)q'(x)+mq(x)}$$

وبوضع $z(x)=\dfrac{q(x)}{(x-\alpha)q'(x)+mq(x)}$ يكون لدينا $g(x)=x-m(x-\alpha)z(x)$.

ومنه نحصل بسهولة على $g'(\alpha)=0$ و $g''(\alpha)\neq 0$ وبالتالي فإنه حسب نظرية (٢,٧)

يكون معدل تقارب الصيغة التكرارية (2.43) تربيعياً.

بالمقابل إذا كانت m غير معروفة فإننا نستطيع استخدام طريقة نيوتن المعدلة

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}, \qquad n \geq 0 \qquad (2.46)$$

والتي يمكن الحصول عليها بتطبيق طريقة نيوتن- رافسون على الدالة:

$$h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (2.47)$$

وحيث إن الجذر α يكون دائماً جذراً بسيطاً للدالة $h(x)$ فإن الصيغة التكرارية (2.46) تكون تربيعية التقارب

مثال (٢,٢٥)

مـــن المثـــال (٢,٢٣) نعلـــم أن $\alpha = 7$ جـــذر مكـــرر للمعادلـــة $x^3 - 13x^2 + 35x + 49 = 0$. باســـتخدام الـــصيغتين التكـــراريتين (2.45) و (2.46) وانطلاقاً من $x_0 = 9$ حصلنا على النتائج العددية

	نيوتن المعدلة الاولى		نيوتن المعدلة الثانية	
n	x_n	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	x_n	$\lvert x_n - \alpha \rvert$
1	7.1818182	1.818×10^{-1}	6.8431373	1.569×10^{-1}
2	7.0019980	1.998×10^{-3}	6.9984003	1.600×10^{-3}
3	7.0000002	2.494×10^{-7}	6.9999998	1.610×10^{-7}

حيث يتضح أن التقارب تربيعي لكلا الطريقتين.

(٢,٦) طريقة ايتكن- Δ^2

Atiken's Δ^2-method

سوف نناقش في هذا البند زيادة سرعة تقارب المتتابعات البطيئة للصيغ التكرارية. الأسلوب الذي سنتبعه يُنسب إلى العالم الرياضي ايتكن (Aitken).

لتكن المتتالية $\{x_n\}$ تتقارب خطياً إلى الجذر α، فإنه حسب التعريف (٢,٢) يكون لدينا:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}=s$$

وبالتالي إذا كانت n كبيرة نحصل على:

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}\approx s$$

بناء على ذلك فإنه عند التكرار التالي يكون لدينا:

$$\frac{x_{n+2}-\alpha}{x_{n+1}-\alpha}\approx s$$

وبناء عليه:

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}\approx\frac{x_{n+2}-\alpha}{x_{n+1}-\alpha}$$

وبحل المعادلة الأخيرة بالنسبة لـ α نحصل على:

$$\alpha \approx \frac{x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2}{x_{n+2} + x_n - 2x_{n+1}} \tag{2.50}$$

و منه يكون لدينا:

$$\alpha \approx x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} \tag{2.51}$$

تعريف (٢,٣)

يكتب الفرق الأمامي للمتتالية $\{x_n\}$ بالشكل: $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n \qquad n = 0,1,2,\cdots$.

باستخدام التعريف (٢,٣) يمكننا كتابة:

$$\begin{aligned} \Delta^2 x_n &= \Delta(\Delta x_n) = \Delta(x_{n+1} - x_n) \\ &= x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n \end{aligned}$$

وبالتالي يمكن كتابة المعادلة (2.51) بالشكل: $\alpha \approx x_n - \dfrac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$

وباستخدام المعادلة (2.52) يمكن تكوين متتالية عددية جديدة $\{\widehat{x}_n\}$ معرفة بالشكل:

$$\widehat{x}_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} \qquad (2.53)$$

وبالتالي إذا كان لدينا المتتالية $\{x_n\}$ التي تتقارب خطياً إلى α فإنه يمكن استخدام الصيغة التكرارية (2.53) لتكوين المتتالية $\{\widehat{x}_n\}$ والتي أيضاً تتقارب إلى α.

مثال (٢,٢٦)

لتكن $x_{n+1} = 1 + \frac{2}{x_n}$، $n \geq 0$ و $x_0 = 2.5$. استخدم طريقة ايتكن لتكوين متتالية عددية $\{\widehat{x}_n\}$ والتي تتقارب إلى $\alpha = 2$ بشكل أسرع من تقارب المتتالية $\{x_n\}$.

الحل : نعلم أن: $\widehat{x}_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$

إذن لا بد أن يكون لدينا ثلاثة عناصر من المتتالية $\{x_n\}$ قبل البدء في حساب عناصر المتتالية $\{\widehat{x}_n\}$.

عندما $n=1$ يكون لدينا:

$$\hat{x}_1 = x_1 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{x_3 - 2x_2 + x_1} = 1.8 - \frac{(2.1111111 - 1.8)^2}{1.947368 - 2(2.1111111) + 1.8} = 2.0038314$$

وإذا كانت $n=2$ نحصل على:

$$\hat{x}_2 = x_2 - \frac{(x_3 - x_2)^2}{x_4 - 2x_3 + x_2} = 2.11111 - \frac{(1.947368 - 2.111111)^2}{2.027027 - 2(1.947368) + 2.111111} = 2.0009569$$

n	x_n	$\hat{x}_n$
1	1.8000000	2.003831
2	2.111111	2.000957
3	1.947368	2.000239
⋮	⋮	⋮
7	1.996656	2.000001
8	2.001675	2.000000
⋮	⋮	
15	1.999987	
16	2.000007	

حل أنظمة المعادلات غير الخطية

Solving Systems of Nonlinear Equations

في هذا الفصل سنهتم بإيجاد الحل العددي للنظام غير الخطي

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= 0 \\ &\vdots \\ f_N(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= 0 \end{aligned} \tag{7.1}$$

بالنسبة للمجاهيل x_i، من أجل $i = 1,2,\ldots,N$. إذا كانت القيم r_i، $i = 1,2,\ldots,N$ موجودة بحيث أن

$$\begin{aligned} f_1(r_1, r_2, \ldots, r_N) &= 0 \\ f_2(r_1, r_2, \ldots, r_N) &= 0 \\ &\vdots \\ f(r_1, r_2, \ldots, r_N) &= 0 \end{aligned} \tag{7.2}$$

فإن هذه القيم تشكل حلاً للنظام غير الخطي (7.1).

يمكن كتابة النظام غير الخطي (7.1) بالشكل المتجهي

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{7.3}$$

حيث

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_N(\mathbf{x})]^T$$

و $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_N]^T$. بناء عليه فإن الحل يمكن كتابته بالشكل $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \ldots, r_N]^T$.

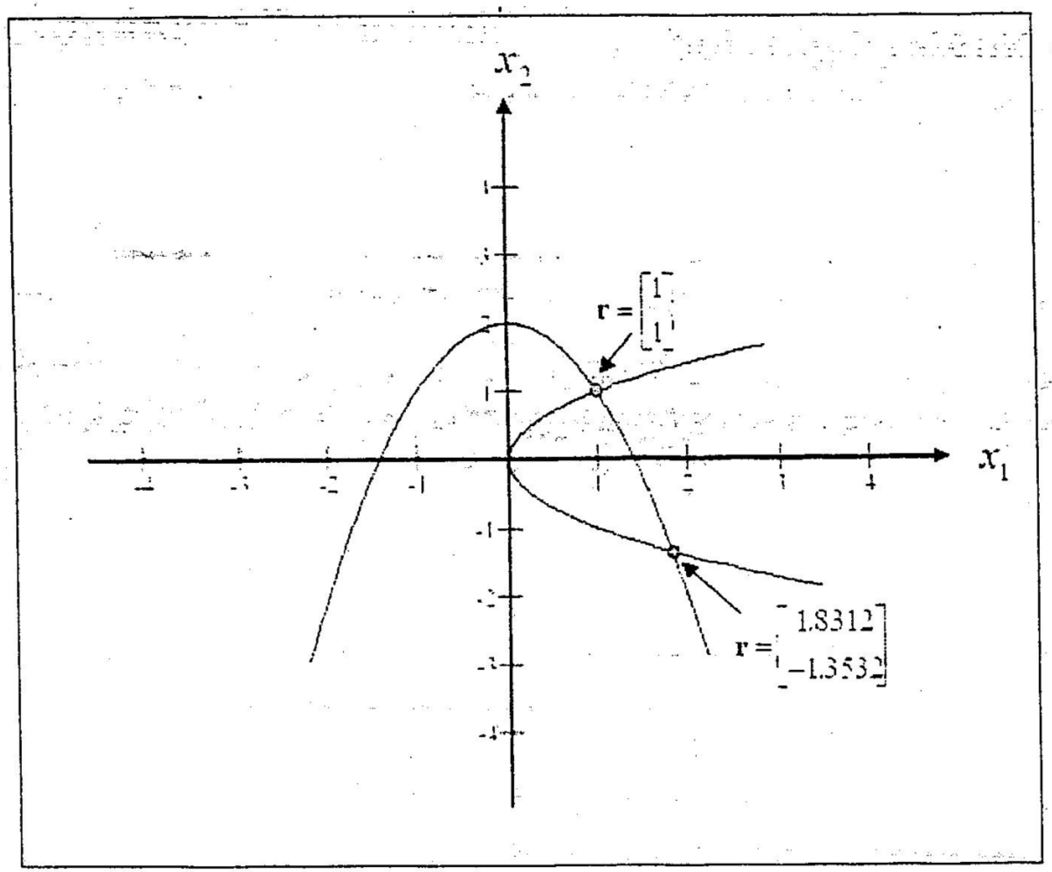
ملاحظة: في هذا الفصل سوف نعرّف الدالة $\mathbf{F(x)}$ على المجموعة D في الفضاء $\Re^N$. وسوف نفترض دائماً أن للنظام غير الخطي (7.3) حل وحيد $\mathbf{r}$ في المجموعة D.

مثال ٧-١

المتجه $\mathbf{r}=[1,1]^T$ هو حل للنظام غير الخطي

$$\begin{aligned} x_1 - x_2^2 &= 0 \\ x_1^2 + x_2 - 2 &= 0 \end{aligned} \qquad (7.4)$$

وذلك لأن $1-1^2=1-1=0$ و $1^2+1-2=1+1-2=0$. أيضاً يتضح من الشكل ٧-١ أن منحنيا المعادلتين يتقاطعان عند النقطتين $[1,1]^T$ و $[1.8312,-1.3532]^T$ وبالتالي يكون المتجه $\mathbf{r}=[1.8312,-1.3532]^T$ حلاً آخر للنظام (7.4).



شكل ٧-١ : حلول النظام غير الخطي (7.4).

٧-٢ طريقة نيوتن

The Newton's Method

نحن نعلم أن الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن لحل المعادلة غير الخطية ذات المتغير الواحد $f(x)=0$ يمكن كتابتها بالشكل $x_{n+1}=g(x_n)$ ، من أجل $n \ge 0$ حيث $g(x)=x-f(x)/f'(x)$. يمكن استنتاج طريقة نيوتن لحل نظام المعادلات غير الخطية (7.3) باعتبارها طريقة تكرارية كما يلي:

$$\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}-[\mathbf{J}_F(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$ من أجل $k \ge 0$.

حيث $\mathbf{J}_F(\mathbf{x})$ مصفوفة جاكوبي للدالة $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ومعرفة بالتالي

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

الآن من المعادلة (7.20) نستطيع إثبات أن

$$\mathbf{J}_G(\mathbf{x}) = \mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{J}_F(\mathbf{x}) \tag{7.22}$$

حيث $\mathbf{I}$ مصفوفة الوحدة من النوع $N \times N$، $\mathbf{J}_G(\mathbf{x})$ كما هي معرفة سابقاً و $\mathbf{J}_F(\mathbf{x})$ مصفوفة جاكوبي للدالة $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ومعرفة بالتالي

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{bmatrix} \tag{7.23}$$

مثال

نريد استخدام طريقة نيوتن لحل النظام غير الخطي

$$\begin{aligned} x^3 + 3y^2 &= 21 \\ x^2 + 2y &= -2 \end{aligned}$$

وذلك بوضع $\mathbf{x}^{(0)} = [\ 1, -1\ ]^T$ بداية بوضع

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^3 + 3y^2 - 21, & f_1(1,-1) &= -17, \\ f_2(x,y) &= x^2 + 2y + 2, & f_2(1,-1) &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{1x} = 3x^2,\quad f_{1y} = 6y \qquad & f_{1x} = 3,\quad f_{1y} = -6 \\ f_{2x} = 2x,\quad f_{2y} = 2. \qquad & f_{2x} = 2,\quad f_{2y} = 2 \end{aligned}$$

تكون مصفوفة جاكوبى $\mathbf{J}_F(\mathbf{x})$ بالشكل

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

وبالتالي

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{x})^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

وبوضع $k = 0$ فإن الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن لهذه المسألة تأخذ الشكل

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -17 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5556 \\ -3.0556 \end{pmatrix}$$

نلاحظ من الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن أنه يجب حساب معكوس المصفوفة $\mathbf{J}_F(\mathbf{x}^{(k)})$ عند كل تكرار k، وفي ذلك جهد حسابي كبير جداً. ولكن عملياً لا يتم حساب هذا المعكوس عند كل تكرار، حيث أنه بوضع $\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$ تصبح الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن بالشكل

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_F(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{y}^{(k)} &= -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{y}^{(k)} \end{aligned} \tag{7.27}$$

من أجل $k \geq 0$. بناء عليه، فإنه بدلاً من حساب معكوس المصفوفة عند كل تكرار يتم حل نظاماً خطياً لحساب المتجه $\mathbf{y}^{(k)}$. المثال التالي يستعرض كيفية استخدام طريقة نيوتن كما هي معرفة بصيغتها التكرارية.

مثال ٧-٤

نريد استخدام طريقة نيوتن لحل النظام غير الخطي

$$x_1 - 2x_2^2 + 1 = 0$$
$$x_1^4 - x_2 = 0$$

وذلك بوضع $\mathbf{x}^{(0)} = [1.3, 1.5]^T$. بداية بوضع $f_1(\mathbf{x}) = x_1 - 2x_2^2 + 1$ و $f_2(\mathbf{x}) = x_1^4 - x_2$ تكون مصفوفة جاكوبي $\mathbf{J}_F(\mathbf{x})$ بالشكل

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -4x_2 \\ 4x_1^3 & -1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن لهذه المسألة تأخذ الشكل

$$\begin{bmatrix} 1 & -4x_2^{(k)} \\ 4(x_2^{(k)})^3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x_1^{(k)} - 2(x_2^{(k)})^2 + 1 \\ (x_1^{(k)})^4 - x_2^{(k)} \end{bmatrix}, \qquad k \geq 0$$

وبوضع $k = 0$ و $\mathbf{x}^{(0)} = [1.3, 1.5]^T$ يكون لدينا

$$\begin{bmatrix} 1 & -4(1.5) \\ 4(1.3)^3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1.3 - 2(1.5)^2 + 1 \\ (1.3)^4 - 1.5 \end{bmatrix}$$

ومنه نحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 8.788 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -2.2 \\ 1.3561 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة الحذف الجاوسي حصلنا على $\mathbf{y}^{(0)} = [-0.199826,-0.399971]^T$
وبالتالي يكون لدينا

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{y}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.100174 \\ 1.100029 \end{bmatrix}$$

وهكذا يمكن تكرار ذلك حيث حصلنا على النتائج العددية الموضحة في الجدول ٧-٢. نذكر هنا أننا أوقفنا الحسابات عندما تحقق الشرط $\| \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \| \leq 5 \times 10^{-6}$.

k	x_1	x_2	$\|f_1\|$	$\|f_2\|$
0	1.300000	1.500000	2.200000	1.356100
1	1.100174	1.100029	0.319954	0.399971
2	1.014336	1.007806	0.017010	0.050783
3	1.000328	1.000112	0.000120	0.001201
4	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000

جدول ٧-٢: النتائج العددية للمثال ٧-٤.