الفصل الثالث

حلول أنظمة المعادلات الخطية

Solving Linear Systems

في هذا الفصل سوف ندرس بعض الطرائق العددية لحل أنظمة المعادلات الخطية من الشكل:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\;\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

بالنسبة للمجاهيل x_i ، $i = 1,2,\ldots,n$ ، حيث إن a_{ij} و b_i من أجل $i, j = 1,2,\ldots,n$ أعداداً حقيقية.

باستخدام رموز المصفوفات يمكن كتابة النظام الخطي (3.1) بالشكل المصفوفي:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

حيث إن:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ ، } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} .$$

والذي يساعدنا على إيجاد الحل $\mathbf{x}$ كما سوف نرى في البنود اللاحقة. نشير هنا إلى أن المصفوفة $\mathbf{A}$ تسمى مصفوفة المعاملات.

(٣,٢) طريقة الحذف الجاوسي

Gauss Elimination

الفكرة الرئيسة لطريقة الحذف الجاوسي لحل النظام الخطي (3.1) هي استخدام بعض العمليات المسموح بها لكتابته بالشكل المثلثي المساوي: $\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$ (3.15)

حيث إن: $\hat{\mathbf{A}}$ مصفوفة مثلثية عليا

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \cdots\cdots\cdots & \hat{a}_{1n} \\ 0 & \hat{a}_{22} & \cdots\cdots\cdots & \hat{a}_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 & \hat{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{b}_n \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

والذي يمكن حله بسهولة باستخدام التعويض الخلفي:

$$x_n = \frac{\hat{b}_n}{\hat{a}_{nn}} \tag{3.16}$$

$$x_i = \frac{1}{\hat{a}_{ii}}[\hat{b}_i - \sum_{j=i+1}^{n} \hat{a}_{ij} x_j]$$

من أجل $i = n-1, n-2, \ldots, 2,1$ وذلك إذا كان $\hat{a}_{ii} \neq 0$ لكل $i = 1,2,\ldots,n$.

مثال (٣,٧)

هنا سنستخدم طريقة الحذف الجاوسي لحل النظام الخطي:

$$\begin{aligned} E_1 &: \quad x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ E_2 &: \quad 2x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 9 \\ E_3 &: \quad -3x_1 - 10x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ E_4 &: \quad 2x_1 + 12x_2 + x_3 + x_4 = 15 \end{aligned} \tag{3.17}$$

الهدف هو حذف معاملات العناصر التي تحت القطر حتى نحصل على نظـام خطـي يسهل حلـه.

كبدايـة، لنحـذف المتغـير x_1 مـن المعـادلات E_j، مـن أجـل $j = 2,3,4$ وذلـــك بـــإجراء العمليـــات التاليـــة $(E_2 - 2E_1) \to E_2$، $(E_3 + 3E_1) \to E_3$ و $(E_4 - 2E_1) \to E_4$، على الترتيب، حيث نحصل على:

$$
\begin{aligned}
E_1 &: \quad x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\
E_2 &: \quad 4x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\
E_3 &: \quad -4x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 4 \\
E_4 &: \quad 8x_2 + 3x_3 - x_4 = 11
\end{aligned}
$$

وبشكل مشابه يمكن حذف المتغير x_2 من المعادلتين E_j ، من أجل $j = 3,4$ ، وذلك باستخدام العمليات الحسابية $(E_3 + E_2) \to E_3$ و $(E_4 - 2E_2) \to E_4$ للحصول على:

$$\begin{aligned}
E_1 &: \quad x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\
E_2 &: \quad 4x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\
E_3 &: \quad -3x_3 + 3x_4 = 9 \\
E_4 &: \quad x_3 + x_4 = 1
\end{aligned}$$

وباستخدام العملية $(E_4 + \frac{1}{3}E_3) \to E_4$ يمكن حذف المتغير x_3 من المعادلة الرابعة للحصول على:

$$\begin{aligned}
E_1 &: \quad x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\
E_2 &: \quad 4x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\
E_3 &: \quad -3x_3 + 3x_4 = 9 \\
E_4 &: \quad 2x_4 = 4
\end{aligned}$$

وهذا نظاماً خطياً مصفوفة معاملاته عبارة عن مصفوفة مثلثية عليا وبالتالي يمكن استخدام التعويض الخلفي (3.16) لإيجاد الحل كما يلي:

$$x_4 = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_3 = -\frac{1}{3}[9 - 3x_4] = -\frac{1}{3}[9 - 3(2)] = -1$$

$$x_2 = \frac{1}{4}[5 - x_3 + x_4] = \frac{1}{4}[5 + 1 + 2] = 2$$

$$x_1 = [2 - 2x_2 + x_3 - x_4] = 2 - 4 - 1 - 2 = -5$$

وبالتالي فإن حل النظام الخطي (3.17) هو: $x_1 = -5$ ، $x_2 = 2$ ، $x_3 = -1$ و $x_4 = 2$.

نستأنف الآن مناقشة طريقة الحذف الجاوسي بشكلها العام لحل النظام الخطي (3.1). لعمل ذلك نكتب هذا النظام بالشكل المصفوفي $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ونستخدم ما تسمى بالمصفوفة الموسعة للنظام الخطي (3.1) والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$[\mathbf{A} : \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \tag{3.18}$$

والتي هي عبارة عن مصفوفة من النوع $n \times (n+1)$ حيث إن العمود $(n+1)$ هو عبارة عن متجه العمود $\mathbf{b}$.

كما سبق أن ذكرنا فإن هدف طريقة الحذف الجاوسي هو حذف العناصر التي تقع تحت قطر المصفوفة، بالتالي فإن المرحلة الأولى للطريقة هي حذف المتغير x_1 من المعادلات E_j ، من أجل $j = 2,3,\ldots,n$ وذلك بتنفيذ العمليات التالية:

$$(E_j - m_{j1}E_1) \to E_j \tag{3.19}$$

حيث إن $m_{j1} = \dfrac{a_{j1}}{a_{11}}$ ، من أجل $j = 2,3,\ldots,n$ ، وذلك بفرض أن $a_{11} \neq 0$ ، لنحصل على:

$$[\mathbf{A}^{(2)} : \mathbf{b}^{(2)}] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n}^{(1)} & : b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n}^{(2)} & : b_2^{(2)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots\cdots\cdots & a_{nn}^{(2)} & : b_n^{(2)} \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

- الرمز الموجود أعلى العناصر a_{1j}، $1 \le j \le n$ و b_1 للدلالة على أن هذه العناصر لم تتأثر بالعمليات الحسابية (3.19)، أي أن $a_{1j}^{(1)} = a_{1j}$، $1 \le j \le n$ و $b_1^{(1)} = b_1$.

- نشير هنا إلى أنه إذا لم يكن هناك تغيير للصفوف فإن عنصر الارتكاز (هنا a_{11}) ومعادلة الارتكاز (المعادلة الأولى) لا تتأثر بالعمليات الحسابية.

- الرمز (2) الموجود على باقي العناصر هو للإشارة إلى أن هذه العناصر قد تأثرت بالعمليات الحسابية (3.19).

- سنرمز بالرمز $a_{ij}^{(k+1)}$ للعناصر التي قد تأثرت بالعمليات الحسابية المرافقة للمرحلة k لكل $k = 1,2,\ldots,n-1$.

الآن إذا كان عنصر الارتكاز $a_{22}^{(2)} \neq 0$، فإنه يمكن حذف المتغير x_2 من المعادلات E_j، من أجل $j = 3,4,\ldots,n$ وذلك بتنفيذ العمليات:

$$(E_j - m_{j2}E_2) \to E_j$$

حيث إن $m_{j2} = \dfrac{a_{j2}}{a_{22}}$، من أجل $j = 3,4,\ldots,n$ للحصول على:

$$[\mathbf{A}^{(3)} : \mathbf{b}^{(3)}] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots\cdots & a_{1n}^{(1)} & :b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots\cdots & a_{2n}^{(2)} & :b_2^{(2)} \\ \vdots & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{3n}^{(3)} & :b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \; \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} \cdots\cdots & a_{nn}^{(3)} & :b_n^{(3)} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

وهكذا، فإنه بعد إنجاز المرحلة $(k-1)$ نكون حصلنا على

$$[\mathbf{A}^{(k)}:\mathbf{b}^{(k)}]=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots\cdots\cdots & & & a_{1n}^{(1)} & :b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots\cdots\cdots & & & a_{2n}^{(2)} & :b_2^{(2)} \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & a_{kk}^{(k)} & \cdots\cdots a_{kn}^{(k)} & :b_k^{(k)} \\ \vdots & & & 0 & \vdots & & \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots\cdots & & 0 & a_{nk}^{(k)} & a_{nn}^{(k)} & :b_n^{(k)} \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

إذا كان عنصر الارتكاز $a_{kk}^{(k)}$ لا يساوي الصفر فإنه يمكن إنجاز العمليات الحسابية:

$$(E_j - m_{jk}E_k) \to E_j \tag{3.23}$$

حيث إن $m_{jk}=\dfrac{a_{jk}}{a_{kk}}$، من أجل $j=k+1,k+2,\ldots,n$ لحذف x_k من المعادلات E_j، من أجل $j=k+1,k+2,\ldots,n$.

أما إذا كان $a_{kk}^{(k)} = 0$ فإنه لا يمكن إجراء العمليات الحسابية (3.23) وذلك لعدم التمكن من حساب m_{jk}. والأسلوب المتبع في هذه الحالة هو البحث عن عنصر في العمود k يقع تحت القطر ولا يساوي الصفر.

إذا كان $a_{pk}^{(k)} \neq 0$، حيث إن $k+1 \leq p \leq n$، فإننا ننجز تغيير مواقع الصفيين $E_k \leftrightarrow E_p$، ومن ثم نتابع الحذف كما سبق. أما إذا كان $a_{pk}^{(k)} = 0$ لكل $p = k, k+1, \ldots, n$، فإن هذا يعني أنه لا يوجد حل وحيد لهذا النظام الخطي وتتوقف العمليات الحسابية.

إذا تمت جميع عمليات الحذف الجاوسي بنجاح فإن المصفوفة الموسعة تأخذ الشكل:

$$[\mathbf{A}^{(n)} : \mathbf{b}^{(n)}] = \left[\begin{array}{cccccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots\cdots & & a_{1n}^{(1)} & : b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots\cdots & & a_{2n}^{(2)} & : b_2^{(2)} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots\cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} & : b_n^{(n)} \end{array}\right] \tag{3.24}$$

والتي تمثل نظام المعادلات الخطية:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ddots \qquad \vdots & & \vdots \\ \ddots \qquad \vdots & & \vdots \\ \ddots \qquad \vdots & & \vdots \\ a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \tag{3.25}$$

المساوي للنظام الخطي الأصلي (3.1).

يمكن استخدام التعويض الخلفي (3.16) لإيجاد الحل $\mathbf{x}=[x_1,x_2,\ldots,x_n]^T$.
نشير هنا إلى أننا لم نكتب الرموز الدالة على تغيير العناصر a_{ij} لعدم الحاجة لها في المعادلة (3.25).

أخيراً، نذكر أنه إذا كان $a_{nn}^{(n)}=0$، فإن هذا يعني أن طريقة الحذف قد تمت ولكن لا يوجد للنظام الخطي حل وحيد.

مثال (٣,٩)

استخدم طريقة الحذف الجاوسي لحل النظام الخطي:

$$
\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\
-x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\
3x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4 \\
x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5
\end{aligned}
$$

المصفوفة الموسعة لهذا النظام هي:

$$
\left[\begin{array}{rrrr:r}
1 & -3 & -1 & -1 & 1 \\
-1 & 3 & 3 & -1 & 1 \\
3 & -7 & 2 & 2 & 4 \\
1 & -1 & 2 & 1 & 5
\end{array}\right]
$$

وبإنجاز العمليات الحسابية $E_j \rightarrow (E_j - m_{j1}E_1)$، من أجل $j = 2,3,4$ ، حيث إن $m_{21} = -1$، $m_{31} = 3$ و $m_{41} = 1$ نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & : & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 5 & : & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & : & 4 \end{bmatrix}$$

وبما أن عنصر الارتكاز مساوياً للصفر ($a_{22} = 0$) فإنه لا يمكن متابعة العمليات الحسابية لطريقة الحذف الجاوسي. ولكننا نبحث عن العنصر $a_{p2} \neq 0$، $3 \leq p \leq 4$ حيث إننا نلاحظ أن $a_{32} = 2 \neq 0$. بناء على ذلك فإننا نجري عملية الاستبدال $E_2 \leftrightarrow E_3$ للحصول على:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 & : & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 5 & : & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & : & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & : & 4 \end{bmatrix}$$

وبمتابعة طريقة الحذف الجاوسي حصلنا على:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 & : & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 5 & : & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & : & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & : & 3 \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 & : & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 5 & : & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & : & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & : & 5 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن حل النظام الخطي هو $\mathbf{x} = [9,3,0,-1]^T$.

ملاحظة: في حالة فشل الخوارزمية (٣,١) يكون هناك احتمالين

- الاحتمال الأول هو وجود عدد لانهائي من الحلول للنظام الخطي المراد حله

مثال (٣,١٠)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 \quad &= 4 \end{aligned}$$

والذي مصفوفته الموسعة هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & : & 1 \\ 2 & -2 & 1 & : & 3 \\ 3 & -1 & 0 & : & 4 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة الحذف الجاوسى حصلنا على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & : & 1 \\ 0 & -4 & 3 & : & 1 \\ 0 & -4 & 3 & : & 1 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & : & 1 \\ 0 & -4 & 3 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}.$$

المصفوفة الأخيرة تمثل النظام الخطي المثلثي:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

وهذا يعني أنه لدينا معادلتين بثلاثة مجاهيل، من المعادلة الثانية نحصل على:

$$x_2 = -\frac{1}{4}[1-3x_3]$$

وبما أنه لا يمكن حساب قيمة معينة لـ x_3 وأنها يمكن أن تأخذ أي قيمة بين $-\infty$ و $+\infty$، فإنه يوجد عدد لا نهائي من الحلول للنظام الخطي.

- الاحتمال الثاني فهو عدم وجود حل على الإطلاق.

مثال (٣,١١)

لنعتبر النظام الخطي:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 &= 5 \end{aligned}$$

وبإنجاز العمليات الحسابية المتعلقة بالحذف الجاوسي حصلنا على النظام الخطي المثلثي:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

والذي منه يتضح أن المعادلة الثالثة غير منطقية، في مثل هذه الحالات لا يوجد لدينا أي حل للنظام الخطي.

(٣,٣) طريقة الحذف الجاوسي مع الارتكاز

Gauss Elimination with Pivoting

لقد ذكرنا في البند السابق أنه إذا كان عنصر الارتكاز $a_{kk}^{(k)}$ مساوياً للصفر فإنه لابد من تغيير مواقع الصفين $E_k \leftrightarrow E_l$ وذلك إذا كان $a_{lk}^{(k)} \neq 0$، حيث إن $k+1 \leq l \leq n$. مناقشتنا السابقة كانت ترتكز على الحقيقة أن العمليات الحسابية لحل النظام الخطي (3.1) قد نُفذت باستخدام أعداد ذات أرقام عشرية غير منتهية. ولكن، من الناحية التطبيقية، عادة تستخدم أعداد ذات أرقام عشرية منتهية. وفي مثل هذه الحالات ليس من الصعب إيجاد بعض الأمثلة التي توضح فشل طريقة الحذف الجاوسي وذلك بسبب سيطرة أخطاء التدوير على الحسابات. المثال التالي يوضح أحد هذه الحالات.

مثال (٣,١٢)

المتجه $\mathbf{x}=[10,1]^T$ هو الحل الوحيد للنظام الخطي:

$$\begin{bmatrix} 0.0003 & 1.566 \\ 0.3454 & -2.436 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.569 \\ 1.018 \end{bmatrix}$$

الآن إذا استخدمنا أعداد ذات أربعة أرقام عشرية معنوية لتنفيذ طريقة الحذف الجاوسي والتعويض الخلفي لحل هذا النظام فإنه يكون لدينا:

$$m_{21}=\frac{a_{21}}{a_{11}}=\frac{0.3454}{0.0003}=1151$$

وبإنجاز العملية $(E_2-m_{21}E_1)\rightarrow E_2$ نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 0.0003 & 1.566 \\ 0 & -1804 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.569 \\ -1805 \end{bmatrix}$$

ومنه نجد أن:

$$x_2 = \frac{-1805}{-1804} = 1.001$$

و

$$x_1 = \frac{1}{0.0003}[1.569 - (1.566)(1.001)] = 3.333$$

وبالتالي هناك فرق كبير بين الحل المضبوط والحل العددي $\tilde{\mathbf{x}} = [3.333,1.001]^T$ ،

يمكن تفسير سبب الخطأ الكبير (نسبياً) الذي حصل في هذا المثال كما يلي: نلاحظ أن عنصر الارتكاز $a_{11} = 0.0003$ صغير جداً وبما أنه، كما نعلم، أن الحسابات ستقف إذا كان عنصر الارتكاز مساوياً للصفر فإنه من الطبيعي أن تكون النتائج سيئة إذا كان عنصر الارتكاز قريب من الصفر واستخدام أعداد ذات أرقام عشرية منتهية والتي تترافق معها أخطاء التدوير.

يمكن التغلب على هذه المشكلة بإعادة ترتيب الصفوف بحيث تبقي القيمة المطلقة للمضروب أقل من واحد. الطريقة الكفيلة بعلاج هذه المشكلة هي طريقة الارتكاز الجزئي ويمكن طرحها كما يلي:

(٣,٣,١) أسلوب الارتكاز الجزئي

عند المرحلة k من طريقة الحذف الجاوسي نختار عنصر في العمود k وتحت القطر يكون ذا أكبر قيمة مطلقة، أي نبحث عن العدد الصحيح l، حيث إن $k \le l \le n$ بحيث إن:

$$|a_{lk}^{(k)}| = \max_{k \le i \le n} |a_{ik}^{(k)}| \tag{3.26}$$

إذا كان $l \ne k$ نجري عملية التغيير $E_k \leftrightarrow E_l$.

مثال: هنا نستخدم طريقة الحذف الجاوسي مع الارتكاز الجزئي لحل النظام الخطي الموجود **في المثال** السابق وذلك استناداً على أعداد ذات أربعة أرقام عشرية معنوية في حساباتنا.

نلاحظ أولاً أن $|a_{21}| = \max\{|a_{11}|, |a_{21}|\} = 0.3454$، وبالتالي نجري **العملية** $E_1 \leftrightarrow E_2$ للحصول على:

$$\begin{bmatrix} 0.3454 & -2.436 \\ 0.0003 & 1.566 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.018 \\ 1.1569 \end{bmatrix}$$

ولحذف x_1 من المعادلة الثانية نجد أن:

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{0.0003}{0.3454} = 0.0009$$

وبإجراء العملية $(E_2 - m_{21}E_1) \rightarrow E_2$ نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 0.3454 & -2.436 \\ 0 & 1.568 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.018 \\ 1.570 \end{bmatrix}$$

ومنه يكون لدينا:

$$x_2 = \frac{1.570}{1.568} = 1.001$$

و

$$x_1 = \frac{1}{0.3454}[1.569 + (2.436)(1.001)] = 10.01$$

أي أن الحل العددي الجديد هو $\tilde{\mathbf{x}} = [10.01, 1.001]^T$ وهو أفضل بكثير من **الحل** العددي الذي حصلنا عليه في المثال السابق.

مثال (٣,١٤)

لنستخدم طريقة الحذف الجاوسي مع الارتكاز الجزئي لحل النظام الخطي **الذي** مصفوفته الموسعة:

$$[\mathbf{A} : \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 : & 2 \\ 2 & -5 & 3 : & -1 \end{bmatrix}$$

نلاحظ هنا أن $|a_{21}| = \max\limits_{1 \le j \le 3} |a_{j1}|$ وبذلك نجري تغيير الصفوف $E_1 \leftrightarrow E_2$ **لنحصل** على:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 : & 1 \\ 1 & -1 & -1 : & 1 \\ 2 & -5 & 3 : & -1 \end{bmatrix}$$

وبإجراء العمليتين $(E_2 - \frac{1}{3}E_1) \to E_2$ ، $(E_3 - \frac{1}{2}E_1) \to E_3$ نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & : & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & : & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} & : & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

وبما أن $|a_{22}| < |a_{32}|$ نجري العملية $E_2 \leftrightarrow E_3$ لنحصل على:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & : & 1 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} & : & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & : & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

وبإنجاز العملية $E_3 \rightarrow (E_3 + \frac{1}{7}E_2)$ يكون لدينا:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & : & 1 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} & : & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -1 & : & 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام التعويض الخلفي حصلنا على الحل $\mathbf{x} = [2,1,0]^T$.

(٣,٤) التحليل المثلثي للمصفوفات

LU Factorization

في هذا البند سوف نناقش تحليل المصفوفة $\mathbf{A}$ من النوع $n\times n$ إلى حاصل ضرب المصفوفتين $\mathbf{A}=\mathbf{LU}$ ، حيث إن $\mathbf{L}$ مصفوفة مثلثية دنيا و $\mathbf{U}$ مصفوفة مثلثية عليا، كلاهما من النوع $n\times n$.

يمكن إثبات أن طريقة الحذف الجاوسي هي عبارة عن أسلوب معين لإيجاد تحليل للمصفوفة بالشكل $\mathbf{A}=\mathbf{LU}$ ، وذلك إذا لم يكن هناك أي تغيير لصفوف المصفوفة أثناء عملية الحذف. النظرية التالية تتضمن ذلك.

نظرية (٣,٩)

لتكن $\mathbf{A}$ مصفوفة من النوع $n \times n$، وأنه قد تم تنفيذ طريقة الحذف الجاوسي على النظام الخطي $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ بدون تغيير لمواضع الصفوف، فإن هذا يعني أن المصفوفة $\mathbf{A}$ قد تم تحليلها إلى حاصل ضرب مصفوفة مثلثية دنيا $\mathbf{L}$ ومصفوفة مثلثية عليا $\mathbf{U}$، أي أن:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

حيث إن:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots\cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots\cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots \quad \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots\cdots\ 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & & 0 \\ m_{21} & 1 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \quad \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots \quad \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ m_{nk} & 1 \end{bmatrix}$$

مثال (٣,١٦)

لنحلل المصفوفة:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 8 & -1 & 1\\ -3 & -10 & -1 & 1\\ 2 & 12 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

إلى حاصل الضرب $\mathbf{A}=\mathbf{LU}$ ، وذلك بوضع $l_{ii}=1$، من أجل $i=1,2,3,4$.

من الواضح أن التحليل يأخذ الشكل:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 8 & -1 & 1\\ -3 & -10 & -1 & 1\\ 2 & 12 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ l_{21} & 1 & 0 & 0\\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0\\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14}\\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24}\\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34}\\ 0 & 0 & 0 & u_{44}\end{bmatrix}=\mathbf{LU}$$

١- بما أن $l_{11}=1$ فإنه يمكن إيجاد قيم عناصر الصف الأول في **U** وذلك بضرب الصف الأول من **L** في الصف الأول لـ **U** وبمساواة كل حاصل ضرب بالعناصر التي توافقه من المصفوفة **A** نحصل على: $u_{1j}=\dfrac{a_{1j}}{l_{11}} \Rightarrow a_{1j}=l_{11}u_{1j}$ ، $j=1,2,3,4$.
ومنه يكون لدينا $u_{11}=1$ ، $u_{12}=2$ ، $u_{13}=-1$ و $u_{14}=1$ وهي عناصر الصف الأول في **U** .

٢- الآن بما أن u_{11} أصبحت معروفة فإنه يمكن إيجاد عناصر العمود الأول للمصفوفة **L** وذلك بضرب الصفوف الثلاثة الأخيرة من **L** في العمود الأول من **U** وبمساواة حاصل الضرب بالعناصر التي توافقها في المصفوفة **A** ليكون لدينا:

$$l_{i1}=\frac{a_{i1}}{u_{11}} \Rightarrow a_{i1}=l_{i1}u_{11}$$ من أجل $i=2,3,4$ ،

ومنه نحصل على العمود الأول لـ **L** : $l_{21}=2$ ، $l_{31}=-3$ و $l_{41}=2$.

٣- وبعد ذلك يتم إيجاد عناصر الصف الثاني لـ **U** وذلك بضرب الصف الثاني من **L** بالأعمدة الثلاثة الأخيرة من **U** والمساواة للحصول على:

$$a_{2j} = l_{21}u_{1j} + l_{22}u_{2j} \quad \Rightarrow \quad u_{2j} = \frac{1}{l_{22}}[a_{2j} - l_{21}u_{1j}]$$ من أجل $j = 2,3,4$ ،

ومنه يكون لدينا عناصر الصف الثاني لـ **U** وهي: $u_{22} = \mathbf{4}$ ، $u_{23} = 1$ و $u_{24} = -1$.

٤- بمعرفة الصف الثاني من **U** يمكننا إيجاد العمود **الثاني** في **L** وذلك بضرب الصفين الثالث والرابع من **L** في العمود الثاني من **U** **ومساواتها** بما يوافقها من المصفوفة **A**

$$a_{i2} = l_{i1}u_{12} + l_{i2}u_{22} \quad \Rightarrow \quad l_{i2} = \frac{1}{u_{22}}[a_{i2} - l_{i1}u_{12}]$$ **من** أجل $i = 3,4$ ،

وبالتالي نحصل على $l_{32} = -1$ و $l_{42} = 2$.

٥- وبعد ذلك نوجد **عناصر** الصف الثالث للمصفوفة **U** وذلك بضرب الصف الثالث للمصفوفة **L** **بالعمودين** الثالث والرابع للمصفوفة **U** ومن ثم مساواتها بما يوافقها من **A** **للحصول** على:

$$a_{3j} = l_{31}u_{1j} + l_{32}u_{2j} + l_{33}u_{3j} \qquad \Rightarrow \qquad u_{3j} = \frac{1}{l}[a_{3j} - l_{31}u_{1j} - l_{32}u_{2j}]$$

من أجل $j = 3,4$ ، ومنه يكون لدينا $u_{33} = -3$ و $u_{34} = 3$.

٦- الآن نحسب عناصر **العمود** الثالث لـ **L** وهنا هو العنصر l_{43} فقط، وذلك بضرب الصف الرابع من **L** في العمود الثالث من **U** ومساواة حاصل الضرب بما يوافقه في المصفوفة **A** حيث يكون لدينا:

$${}_{43} = l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{43}u_{33} \qquad \Rightarrow \qquad l_{43} = \frac{1}{u_{33}}[a_{43} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23}] = -\frac{1}{3}$$

٧- وأخيراً، نحسب الصف الرابع لـ **U** وهو يتكون من العنصر u_{44} فقط، وذلك بضرب الصف الرابع من **L** في العمود الرابع من **U** للحصول على:

$$a_{44} = l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34} + l_{44}u_{44} \quad \Rightarrow \quad u_{44} = \frac{1}{l_{44}}[a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34}] = 2$$

إذن تحليل المصفوفة **A** يأخذ الشكل:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 8 & -1 & 1 \\ -3 & -10 & -1 & 1 \\ 2 & 12 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

حل النظام الخطي باستعمال طريقة التحليل المثلثي

إذا كان لدينا التحليل $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ فإنه يمكن كتابة النظام الخطي $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ بالشكل $\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$ وبوضع $\mathbf{z} = \mathbf{Ux}$ يكون لدينا النظامين الخطيين:

$$\mathbf{Lz} = \mathbf{b} \tag{3.35}$$

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{z} \tag{3.36}$$

ومن ثم يمكن حل النظام الخطي (3.35) باستخدام التعويض الأمامي:

$$z_1 = \frac{b_1}{l_{11}} \quad , \quad z_i = \frac{1}{l_{ii}}[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} z_j] \quad , \quad i = 2,3,\ldots,n \tag{3.37}$$

وبمعرفة المتجه $\mathbf{z}$ يمكن حل النظام الخطي (3.36) باستخدام التعويض الخلفي للحصول على الحل $\mathbf{x}$.

مثال ٣,١٧ هنا نستعرض استخدام التحليل $\mathbf{A = LU}$ لحل النظام الخطي $\mathbf{Ax = b}$ حيث إن $\mathbf{A}$ هي المصفوفة الموجودة في المثال (٣,١٦) و $\mathbf{b} = [2,9,-2,15]$.

بداية من المثال السابق يكون لدينا:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -2 \\ 15 \end{bmatrix}$$

وبوضع $\mathbf{Ux = z}$ يكون لدينا:

$$\mathbf{Lz} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -2 \\ 15 \end{bmatrix}$$

وباستخدام التعويض الأمامي (3.37) نجد أن:

$$
\begin{aligned}
&z_1 = 2 \\
&2z_1 + z_2 = 9 \quad \Rightarrow \quad z_2 = 9 - 2z_1 = 5 \\
&-3z_1 - z_2 + z_3 = -2 \quad \Rightarrow \quad z_3 = -2 + 3z_1 + z_2 = 9 \\
&2z_1 + 2z_2 - \frac{1}{3}z_3 + z_4 = 15 \quad \Rightarrow \quad z_4 = 15 - 2z_1 - 2z_2 + \frac{1}{3}z_3 = 4
\end{aligned}
$$

ومن ثم يكون لدينا النظام الخطي $\mathbf{Ux} = \mathbf{z}$:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}
$$

وباستخدام التعويض الخلفي (3.16) نحصل على الحل $\mathbf{x} = [-5,2,-1,2]^T$.

(٣,٥) المعايير المتجهية والمصفوفية

Vector and Matrix Norms

نحن نعلم أن القيمة المطلقة لعدد ما هي الأسلوب الأمثل لقياس مقدار (حجم) هذا العدد. أما بالنسبة لقياس حجم المتجه $\mathbf{x}$ ذو البعد n أو المصفوفة $\mathbf{A}$ ذات النوع $n \times n$ فهناك معايير معينة سوف نستعرضها في هذا البند.

تعريف (٣,١١)

المعيار المتجهي على مجموعة المتجهات $\Re^n$ هو عبارة عن دالة حقيقية من $\Re^n$ إلى $\Re$ ويرمز له بالرمز $\|.\|$ ويحقق الخواص التالية:

١- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ لكل $\mathbf{x} \in \Re^n$.

٢- $\|\mathbf{x}\| = 0$ إذا كان وكان فقط $\mathbf{x} = [0,0,\ldots,0]^t$.

٣- $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$ لكل $\alpha \in \Re$ و $\mathbf{x} \in \Re^n$.

٤- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ لكل $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^n$.

هناك عدة معايير متجهية لقياس حجم المتجه $\mathbf{x}$ ، التعريف التالي يتضمن معيار القيم العظمى $\|.\|_\infty$ والمعيار الإقليدي $\|.\|_2$ وهي أشهر المعايير استخداماً.

تعريف (٣,١٢)

ليكن $\mathbf{x} \in \Re^{\mathbf{n}}$ فإن المعيارين $\|.\|_\infty$ و $\|.\|_2$ للمتجه $\mathbf{x} \in \Re^{\mathbf{n}}$ معرفة كما يلي:

$$\| \mathbf{x} \|_\infty = \max_{1 \le i \le n} | x_i | \tag{3.38}$$

و

$$\| \mathbf{x} \|_2 = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{3.39}$$

نشير إلى أنه يرمز لمعيار القيم العظمى بالرمز l_∞ وللمعيار الإقليدي بالرمز l_2.

تعريف (٣,١٣)

ليكن لدينا $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^n$ ، فإن المسافة بين المتجهين $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ بالنسبة للمعيارين l_∞ و l_2 معرفة كما يلي:

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|_\infty = \max_{1 \le i \le n} | x_i - y_i | \qquad (3.40)$$

و

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \qquad (3.41)$$

مثال (٣,١٩)

اعتبر المتجهين $\mathbf{x} = [1.2, 3.1, 2]^T$ و $\mathbf{y} = [1, 2.85, 2.1]^T$. بما أن:

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = [1.2, 3.1, 2]^T - [1, 2.85, 2.1]^T = [0.2, 0.25, -0.1]^T$$

فإن:

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|_\infty = \max\{| 0.2 |, | 0.25 |, | -0.1 |\} = 0.25$$

و

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|_2 = \sqrt{(0.2)^2 + (0.25)^2 + (-0.1)^2} = 0.3354$$

تعريف (٣,١٥)

المعيار المصفوفي على مجموعة المصفوفات ذات النوع $n\times n$ ($\Re^{n\times n}$) هو عبارة عن دالة حقيقية، يرمز لها بالرمز $\|.\|$، من $\Re^{n\times n}$ إلى $\Re$ وتحقق الخواص التالية:

١- $\|\mathbf{A}\|\geq 0$ لكل $\mathbf{A}\in\Re^{n\times n}$.

٢- $\|\mathbf{A}\|=0$ إذا كان وكان فقط $\mathbf{A}=\mathbf{0}$ (المصفوفة الصفرية)

٣- $\|\alpha\mathbf{A}\|=|\alpha|\,\|\mathbf{A}\|$ لكل $\alpha\in\Re$ و $\mathbf{A}\in\Re^{n\times n}$.

٤- $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|\leq\|\mathbf{A}\|+\|\mathbf{B}\|$ لكل $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\Re^{n\times n}$.

٥- $\|\mathbf{AB}\|\leq\|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|$ لكل $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\Re^{n\times n}$.

مع ملاحظة أن الخاصية الخامسة تكون صحيحة طالما كانت عملية الضرب ممكنة، حتى إذا كان حاصل الضرب عبارة عن ضرب مصفوفة بمتجه.

نظرية (٣,١٢)

إذا كان $\|.\|$ أي معيار متجهي على $\Re^n$، فإن:

$$\| \mathbf{A} \| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \| \mathbf{Ax} \|$$

عبارة عن معيار مصفوفي.

تعريف (٣,١٦)

لتكن $\mathbf{A} = (a_{ij})$ مصفوفة من النوع $n \times n$، فإن l_∞ للمصفوفة $\mathbf{A}$ معرّف بالتالي:

$$\| \mathbf{A} \|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \qquad (3.42)$$

مثال (٣,٢١)

لحساب $\| \mathbf{A} \|_\infty$ للمصفوفة:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 8 & -3 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{3} | a_{1j} | = | 2 | + | 3 | + | -1 | = 6$$

$$\sum_{j=1}^{3} | a_{2j} | = | 4 | + | 8 | + | -3 | = 15$$

$$\sum_{j=1}^{3} | a_{3j} | = | -3 | + | 3 | + | -1 | = 7$$

وبناء عليه يكون لدينا $\| \mathbf{A} \|_\infty = \max\{6,15,7\} = 15$.

(٣,٦) تحليل الخطأ للحلول العددية

Error Analysis for the Numerical Solutions

بسبب أخطاء التدوير المرافقة للحسابات فإن أي حل عددي $\tilde{\mathbf{x}}$ للنظام الخطي (3.1)يعتبر حلاً تقريبياً له. في هذا البند سنناقش الصعوبة التي قد تنشأ في تقدير الخطأ المتعلق بالحل التقريبي $\tilde{\mathbf{x}}$ وذلك باعتبار أن الحل المضبوط غير معروف.

إذا كان $\tilde{\mathbf{x}}$ حلاً تقريبياً للنظام الخطي (3.1) فإننا سنعرّف الخطأ المتعلق بهذا التقريب بالشكل:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \tag{3.43}$$

عادة لا يكون الخطأ $\mathbf{e}$ معروفاً وذلك لعدم معرفة الحل المضبوط $\mathbf{x}$. من ناحية أخرى، يمكن دراسة الخطأ بحساب ما يسمى بمتجه الترسب (الباقي) والمعرّف في التعريف التالي:

تعريف (٣,١٧)

ليكن $\tilde{\mathbf{x}}$ حلاً تقريبياً للنظام الخطي (3.1)، يمكن كتابة متجه الترسب المتعلق بهذا التقريب كما يلي:

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \tag{3.44}$$

ملاحظة:

من التعريف (٣,١٧) يتضح أن المتجه $\mathbf{r}$ يحدد فيما إذا كان الحل التقريبي $\tilde{\mathbf{x}}$ قريب من الحل المضبوط $\mathbf{x}$. إذا كان $\mathbf{r}$ يساوي المتجه الصفري فإن هذا يعني أن $\tilde{\mathbf{x}}$ هو الحل المضبوط. وعليه فإن المتجه $\mathbf{e}$ يساوي المتجه الصفري أيضاً.

بناء على ذلك فإنه من المتوقع أنه إذا كانت قيم عناصر المتجه $\mathbf{r}$ قريبة من الصفر فإن هذا يعني أن الحل التقريبي $\tilde{\mathbf{x}}$ يكون تقريب جيد للحل المضبوط. في الواقع، ليس بالضرورة أن يكون هذا صحيحاً كما يوضحه المثال التالي.

مثال (٣,٢٢)

المتجه $\mathbf{x} = [1,1]^T$ هو الحل الوحيد للنظام الخطي:

$$\begin{bmatrix} 2.5 & 3 \\ 2.5005 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.5 \\ 5.5005 \end{bmatrix}$$

اعتبر الحل التقريبي $\tilde{\mathbf{x}} = [2.2,0]^T$. متجه الترسب $\mathbf{r}$ لهذا التقريب بالنسبة للنظام الخطي هو:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 5.5 \\ 5.5005 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.5 & 3 \\ 2.5005 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0006 \end{bmatrix}$$

وعليه فإن $\|\mathbf{r}\|_\infty = 0.0006$ وهو صغير جداً مقارنة بالخطأ المضبوط $\|\mathbf{e}\|_\infty = 1.2$.

وهذا يدل على أن متجه الترسب $\mathbf{r}$ لم يعطينا معلومات صحيحة فيما يتعلق بالفرق بين الحلين التقريبي والمضبوط. وبالتالي لا يمكن اعتباره كمقياس لبعد أو قرب الحل التقريبي $\tilde{\mathbf{x}}$ من الحل المضبوط $\mathbf{x}$.

ملاحظة: المناقشة السابقة تثير التساؤل التالي: كيف لنا أن نعرف فيما إذا كان المتجه $\mathbf{r}$ سوف يعطينا المعلومات الصحيحة عن الحل التقريبي؟. النظرية التالية تجيب على هذا التساؤل.

نظرية (٣,١٣)

ليكن لدينا النظام الخطي $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ حيث إن $\mathbf{A}$ مصفوفة غير شاذة من النوع $n\times n$. إذا كان $\tilde{\mathbf{x}}\in\Re^n$ حلاً تقريبياً لهذا النظام فإنه لأي معيار طبيعي تكون المتباينات التالية متحققة:

$$\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|\le\|\mathbf{r}\|\|\mathbf{A}^{-1}\| \tag{3.45}$$

$$\frac{\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|}\le\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|},\qquad \|\mathbf{b}\|\ne 0 \tag{3.46}$$

حيث إن $\mathbf{r}$ هو متجه الراسب المتعلق بالتقريب $\tilde{\mathbf{x}}$ بالنسبة لهذا النظام.

البرهان:

بداية نلاحظ أن: $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})$

وبما أن $\mathbf{A}$ مصفوفة غير شاذة فإنه يكون لدينا: $\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}$

ومنه نحصل على: $\| \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \| = \| \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r} \| \le \| \mathbf{A}^{-1} \| \| \mathbf{r} \|$

وهي المتباينة (3.45).

الآن لإثبات المتباينة الأخرى نلاحظ أولاً أن $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ يؤدي إلى أن $\| \mathbf{b} \| \le \| \mathbf{A} \| \| \mathbf{x} \|$.

وبقسمة طرفي المتباينة (3.45) على $\| \mathbf{x} \| \ge \dfrac{\| \mathbf{b} \|}{\| \mathbf{A} \|}$ يكون لدينا:

$$\frac{\| \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \|}{\| \mathbf{x} \|} \le \frac{\| \mathbf{A}^{-1} \| \| \mathbf{r} \|}{\| \mathbf{b} \| / \| \mathbf{A} \|} \le \| \mathbf{A} \| \| \mathbf{A}^{-1} \| \frac{\| \mathbf{r} \|}{\| \mathbf{b} \|}$$

وهو المطلوب.

ملاحظة:

من النظرية (٣,١٣) يتضح أنه توجد علاقة بين القيم $\| \mathbf{A}^{-1} \|$ و $\| \mathbf{A}^{-1} \| \| \mathbf{A} \|$ ، متجه الترسب والحل التقريبي. في الواقع صيغة الخطأ النسبي (3.46) هي الأكثر استخداماً وهي محدودة بمقدار يحتوي على ما يسمى بعدد الشرط للمصفوفة $\mathbf{A}$ وهو:

$$\chi(\mathbf{A}) = \| \mathbf{A} \| \| \mathbf{A}^{-1} \| \tag{3.47}$$

باستخدام رمز عدد الشرط للمصفوفة يمكن كتابة المتباينتين (3.45) و(3.46) بالشكل:

$$\| \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \| \leq \chi(\mathbf{A}) \frac{\| \mathbf{r} \|}{\| \mathbf{A} \|} \tag{3.48}$$

$$\frac{\| \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \|}{\| \mathbf{x} \|} \leq \chi(\mathbf{A}) \frac{\| \mathbf{r} \|}{\| \mathbf{b} \|}, \qquad \| \mathbf{b} \| \neq 0 \tag{3.49}$$

نظرية (٣,١٤)

لتكن $\mathbf{A}$ مصفوفة من النوع $n\times n$ وغير شاذة، فإنه لأي معيار $\|.\|$ فإن عدد الشرط لهذه المصفوفة يحقق $\chi(\mathbf{A})\geq 1$.

البرهان:

باستخدام خواص المعيار المصفوفي يكون لدينا:

$$\chi(\mathbf{A})=\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|\geq\|\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\|=\|\mathbf{I}\|=1$$

حيث إن $\mathbf{I}$ هي مصفوفة الوحدة من النوع $n\times n$.

ملاحظة: نشير هنا إلى أنه إذا كانت قيمة عدد الشرط للمصفوفة $\mathbf{A}$ قريبة من الواحد فإنه يقال إن $\mathbf{A}$ مصفوفة حسنة التصرف. أما إذا كانت قيمة عدد الشرط بعيدة عن الواحد فإنها تسمى سيئة التصرف.

مثال (٣,٢٣)

بداية نلاحظ أن مصفوفة المعاملات في المثال السابق هي $\begin{bmatrix} 2.5 & 3 \\ 2.5005 & 3 \end{bmatrix}$

وبالتالي فإن $\| \mathbf{A} \| = 5.5005$. كما أن معكوسها هو:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2000 & 2000 \\ 1667 & -1666.66667 \end{bmatrix}$$

ومنه يكون لدينا $\| \mathbf{A}^{-1} \| = 4000$. وبالتالي فإن عدد الشرط يكون:

$$\chi(\mathbf{A}) = \| \mathbf{A} \| \| \mathbf{A}^{-1} \| = (5.5005)(4000) = 22002 >> 1$$

وهو كبير جداً، وبناء عليه لا يمكن الاعتماد على المعلومات التي يوفرها لنا متجه الترسب لاختبار دقة الحل العددي. وهذا ما حصل بالفعل في المثال السابق حيث إن $\| \mathbf{r} \| = 6\times10^{-4}$ وهي قيمة قريبة من الصفر بينما الخطأ المضبوط $\| \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \|_\infty = 1.2$ وهو كبير جداً (نسبياً، أي نسبة إلى حجم الحل المضبوط $\| \mathbf{x} \| = 1$).

في الواقع يمكن حساب حداً أعلى للخطأ المطلق حيث نحصل على:

$$\| \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \| \le \| \mathbf{r} \| \| \mathbf{A}^{-1} \| = 6 \times 10^{-4} (4000) = 2.4$$

وهو أكبر من الخطأ المضبوط كما يجب أن يكون. وكذلك يمكن حساب الحد الأعلى للخطأ النسبي وهو:

$$\frac{\| \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \|}{\| \mathbf{x} \|} \le \chi(\mathbf{A}) \frac{\| \mathbf{r} \|}{\| \mathbf{b} \|} = (22002) \frac{6 \times 10^{-4}}{5.5005} = 2.4$$

من هاتين النتيجتين نستنتج أن القيم $\| \mathbf{A}^{-1} \|$ و $\| \mathbf{A}^{-1} \| \| \mathbf{A} \|$ تلعب دوراً أساسياً في حساب الحد الأعلى للخطأ.

(٣,٧) الطرائق التكرارية لحل أنظمة المعادلات الخطية

Iterative Methods for Solving Linear Systems

الأنظمة الخطية التي تنشأ في الكثير من التطبيقات الهندسية والعلمية تكون مصفوفة معاملاتها عبارة عن مصفوفة هشة، أي المصفوفة التي تكون معظم عناصرها أصفاراً وذات سعة كبيرة. وإذا تم استخدام الطرائق المباشرة لحل مثل هذه الأنظمة فسوف يتطلب ذلك جهد حسابي كبير (وناتج معظمه أصفاراً)، وتحتاج إلى سعة كبيرة (غير ضرورية) في ذاكرة الحاسوب والتي قد لا يمكن توفرها. لهذا السبب فإن الكثير من الباحثين الذين تواجههم مثل هذه المسائل يلجئون إلى استخدام ما يسمى "الطرائق التكرارية" لحل هذه الأنظمة.

تعد الطرائق التكرارية طرائق تقريبية أي أنها لا تحسب الحل مباشرة وإنما تبدأ من حل تقريبي ، وليكن $\mathbf{x}^{(0)}$ ،
وتحسب متتالية من المتجهات $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ والتي يُتأمل أن تتقارب إلى الحل المضبوط $\mathbf{x}$.

الفكرة الرئيسة لهذه الطرائق هي كتابة النظام الخطي $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ، حيث إن $\mathbf{A}$ مصفوفة مربعة من النوع $n \times n$ ، بالشكل المساوي:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Tx} + \mathbf{c} \qquad (3.53)$$

حيث إن $\mathbf{T}$ مصفوفة مربعة من النوع $n \times n$ و $\mathbf{c}$ متجه عمود ذو البعد n .
بعد اختيار $\mathbf{x}^{(0)}$ ، نحسب متتالية المتجهات $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ باستخدام الصيغة التكرارية:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{Tx}^{(k-1)} + \mathbf{c} \qquad (3.54)$$

من أجل $k \geq 1$.

هناك عدة أساليب لكتابة المصفوفة $\mathbf{T}$ ، سوف ندرس هنا طرائق جاكوبي و جاوس- سيدال

(٣,٧,١) طريقة جاكوبي التكرارية

بداية نكتب النظام الخطي $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ بالشكل (3.1) أي أننا نكتبه بالشكل التالي:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{aligned}$$

نحل المعادلة i بالنسبة للمجهول x_i **لكل** $i = 1,2,\ldots,n$ لنحصل على:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{1}{a_{11}}[a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - b_1] \\
x_2 &= -\frac{1}{a_{22}}[a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n - b_2] \\
&\vdots \\
x_n &= -\frac{1}{a_{nn}}[a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1} - b_n]
\end{aligned} \tag{3.55}$$

حيث يكون لدينا:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{T}_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots\cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots\cdots & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

الآن باستخدام العلاقة (3.55) يمكن كتابة الصيغة التكرارية لطريقة جاكوبي بالشكل التالي:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}] \quad \text{من أجل } i = 1,2,\ldots,n \text{ و } k \geq 1 \quad \mathbf{(3.57)}$$

وكذلك يمكن كتابتها بالشكل المصفوفي كالتالي:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{T}_J \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c} \qquad k \geq 1$$

نشير هنا إلى أنه يمكن استنتاج الشكل المصفوفي لطريقة جاكوبي التكرارية كما يلي:

أولاً نوزع المصفوفة $\mathbf{A}$ إلى حاصل جمع المصفوفات:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \cdots\cdots & & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \cdots\cdots & & 0 \\ -a_{21} & 0 \cdots\cdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & a_{n2} & \cdots -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots\cdots & -a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U} \qquad (3.59)$$

وبذلك يمكن تحويل النظام الخطي $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ إلى الشكل المساوي: $(\mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b}$

والذي منه نحصل على:

$$\mathbf{Dx} - (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{Dx} = (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

وبالتالي يكون لدينا الصيغة التكرارية لطريقة جاكوبي (3.58) حيث إن:

$$\mathbf{T}_J = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) \text{ و } \mathbf{c} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}\ .$$

ملاحظة: يتضح من (3.55) أنه يجب أن يكون $a_{ii} \neq 0$ من أجل $i = 1,2,\ldots,n$، لذلك إذا كانت المصفوفة $\mathbf{A}$ غير شاذة وأحد عناصر قطرها يكون مساوياً للصفر فإنه يجب إعادة ترتيب المعادلات بحيث يكون كل عناصر القطر لا تساوي الصفر.

مثال (٣,٢٦)

هنا نستخدم طريقة جاكوبي التكرارية لإيجاد حلاً تقريبياً للنظام الخطي:

$$
\begin{aligned}
4x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\
x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\
x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

بدقة $\epsilon = 5\times10^{-4}$ وذلك ابتداء من المتجه الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)} = [1,0,0]^T$.

بداية لنكتب صيغة جاكوبي التكرارية (3.57) لهذا النظام والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= \frac{1}{4}x_2^{(k-1)} - \frac{1}{4}x_3^{(k-1)} + \frac{1}{4} \\
x_2^{(k)} &= -\frac{1}{3}x_1^{(k-1)} - \frac{1}{3}x_3^{(k-1)} + \frac{4}{3} \\
x_3^{(k)} &= -\frac{1}{5}x_1^{(k-1)} - \frac{2}{5}x_2^{(k-1)} + \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

من أجل $k \geq 1$.

وبوضع $k=1$ تأخذ هذه الصيغة الشكل:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}x_2^{(0)} - \frac{1}{4}x_3^{(0)} + \frac{1}{4}$$

$$x_2^{(1)} = -\frac{1}{3}x_1^{(0)} - \frac{1}{3}x_3^{(0)} + \frac{4}{3}$$

$$x_3^{(1)} = -\frac{1}{5}x_1^{(0)} - \frac{2}{5}x_2^{(0)} + \frac{2}{5}$$

وبالتعويض عن $x_1^{(0)} = 1$ ، $x_2^{(0)} = 0$ و $x_3^{(0)} = 0$ نحصل على:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(0) - \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$x_2^{(1)} = -\frac{1}{3}(1) - \frac{1}{3}(0) + \frac{4}{3} = 1$$

$$x_3^{(1)} = -\frac{1}{5}(1) - \frac{2}{5}(0) + \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

إذن التكرار (التقريب) الأول هو $\mathbf{x}^{(1)}=[\frac{1}{4},1,\frac{1}{5}]^T$. بعد ذلك نضع $k=2$ ونعوض عن قيم عناصر المتجه $\mathbf{x}^{(1)}$ لنحصل على:

$$x_1^{(2)}=\frac{1}{4}x_2^{(1)}-\frac{1}{4}x_3^{(1)}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(1)-\frac{1}{4}(\frac{1}{5})+\frac{1}{4}=0.45$$
$$x_2^{(2)}=-\frac{1}{3}x_1^{(1)}-\frac{1}{3}x_3^{(1)}+\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}(\frac{1}{4})-\frac{1}{3}(\frac{1}{5})+\frac{4}{3}=1.18333$$
$$x_3^{(2)}=-\frac{1}{5}x_1^{(1)}-\frac{2}{5}x_2^{(1)}+\frac{2}{5}=-\frac{1}{5}(\frac{1}{4})-\frac{2}{5}(1)+\frac{2}{5}=-0.05$$

وبالتالي فإن التكرار الثاني هو $\mathbf{x}^{(2)}=[0.45,1.18333,-0.05]^T$. وهكذا نستمر حتى نحصل على الحل التقريبي المطلوب. النتائج العددية لحل هذه المسألة موجودة في الجدول رقم (٣,١)

الجدول رقم (٣,١). النتائج العددية للمثال (٣,٢٦).

k	1	2	3	4	5	6
$x_1^{(k)}$	0.25000	0.45000	0.55833	0.59083	0.59833	0.599**78**
$x_2^{(k)}$	1.00000	1.18333	1.20000	1.20167	1.20028	1.200**17**
$x_3^{(k)}$	0.20000	-0.05000	-0.16333	-0.19167	-0.19883	-0.199**78**

نشير هنا إلى أننا أوقفنا العمليات الحسابية عندما حصلنا على الحل التقريبي الذي يحقق الدقة **المطلوبة**. $\|\mathbf{x}^{(7)}-\mathbf{x}^{(6)}\| = 2.4\times10^{-4} < 5\times10^{-4}$

(٣,٧,٢) طريقة جاوس- سيدال التكرارية

كما هو واضح من الصيغة التكرارية لطريقة جاكوبي (3.57) فإننا نحسب العنصر $x_i^{(k)}$، $i = 1,2,\ldots,n$، باستخدام العناصر $x_j^{(k-1)}$ من أجل $1 \le j \le n$ حيث إن $j \ne i$. ولكن لو استخدمنا العناصر $x_j^{(k)}$ من أجل $1 \le j \le i-1$ والعناصر $x_j^{(k-1)}$ من أجل $i+1 \le j \le n$ لحصلنا على تقريب أفضل وذلك لأن العناصر $x_j^{(k)}$، $1 \le j \le i-1$ هي تقريب أفضل للعناصر التي توافقها في الحل المضبوط من العناصر $x_j^{(k-1)}$، $1 \le j \le i-1$. هذا هو مبدأ طريقة جاوس- سيدال التكرارية والتي يمكن كتابة صيغتها التكرارية بالشكل:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}] \qquad (3.63)$$

من أجل $i = 1,2,\ldots,n$ و $k \ge 1$.

الآن لكتابة الصيغة التكرارية لهذه الطريقة بالشكل المصفوفي، فإنه من العلاقة (3.60) يكون لدينا

$$(\mathbf{D}-\mathbf{L})\mathbf{x}-\mathbf{U}\mathbf{x}=\mathbf{b} \;\Rightarrow\; (\mathbf{D}-\mathbf{L})\mathbf{x}=\mathbf{U}\mathbf{x}+\mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{x}=(\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}+(\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$$

ومنه يكون لدينا الصيغة التكرارية لطريقة جاوس- سيدال

$$\mathbf{x}^{(k)}=\mathbf{T}_{GS}\mathbf{x}^{(k-1)}+\mathbf{c} \tag{3.64}$$

من أجل $k\geq 1$، حيث إن $\mathbf{T}_{GS}=(\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$ و $\mathbf{c}=(\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$.

مثال (٣,٢٧)

استخدم طريقة جاوس- سيدال التكرارية لحساب حلاً تقريبياً بدقة $\epsilon = 5\times 10^{-4}$ للنظام الخطي الموجود في المثال (٣,٢٦) وذلك بوضع $\mathbf{x}^{(0)} = [1,0,0]^T$.

صيغة جاوس- سيدال التكرارية (3.63) لهذا النظام تكتب بالشكل:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= \frac{1}{4}x_2^{(k-1)} - \frac{1}{4}x_3^{(k-1)} + \frac{1}{4} \\
x_2^{(k)} &= -\frac{1}{3}x_1^{(k)} - \frac{1}{3}x_3^{(k-1)} + \frac{4}{3} \\
x_3^{(k)} &= -\frac{1}{5}x_1^{(k)} - \frac{2}{5}x_2^{(k)} + \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

من أجل $k \geq 1$.

وبوضع $k=1$ تأخذ هذه الصيغة الشكل:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}x_2^{(0)} - \frac{1}{4}x_3^{(0)} + \frac{1}{4}$$

$$x_2^{(1)} = -\frac{1}{3}x_1^{(1)} - \frac{1}{3}x_3^{(0)} + \frac{4}{3}$$

$$x_3^{(1)} = -\frac{1}{5}x_1^{(1)} - \frac{2}{5}x_2^{(1)} + \frac{2}{5}$$

وبالتعويض عن $x_2^{(0)} = 0$ و $x_3^{(0)} = 0$ في المعادلة الأولى من هذه الصيغة نحصل على:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(0) - \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

وبالتعويض عن $x_1^{(1)} = \frac{1}{4}$ و $x_3^{(0)} = 0$ في المعادلة الثانية يكون لدينا:

$$x_2^{(1)} = -\frac{1}{3}(\frac{1}{4}) - \frac{1}{3}(0) + \frac{4}{3} = 1.25$$

وبالتعويض عن $x_1^{(1)} = 0.25$ و $x_1^{(2)} = 1.25$ في المعادلة الثالثة نجد أن:

$$x_3^{(1)} = -\frac{1}{5}(0.25) - \frac{2}{5}(1.25) + \frac{4}{3} = -0.15$$

إذن التكرار (التقريب) الأول هو $\mathbf{x}^{(1)} = [0.25, 1.25, -0.15]^T$. وهكذا نستمر حتى نحصل على الحل التقريبي المطلوب. النتائج العددية لحل هذه المسألة موجودة في الجدول رقم (٣,٢) حيث يتضح أن $\mathbf{x}^{(5)}$ هو الحل التقريبي المطلوب.

k	1	2	3	4	5
$x_1^{(k)}$	0.25000	0.60000	0.59417	0.59961	0.59988
$x_2^{(k)}$	1.25000	1.18333	1.19972	1.19970	1.19998
$x_3^{(k)}$	-0.15000	-0.19333	-0.19872	-0.19980	-0.19997

أوقفنا العمليات الحسابية عندما حصلنا على $\| \mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{x}^{(4)} \| = 2.7\times10^{-4} < 5\times10^{-4}$

وهذا يحقق الدقة المطلوبة.

ملاحظة:

بمقارنة النتائج العددية الموجودة في الجدولين رقمي (٣,١) و(٣,٢) نلاحظ أننا حصلنا على الحل التقريبي المطلوب عند التكرار السابع عندما استخدمنا طريقة جاكوبي بينما حصلنا عليه عند التكرار الخامس باستخدام طريقة جاوس- سيدال، مما يدل على أن معدل تقارب طريقة جاوس- سيدال أسرع من ذلك لطريقة جاكوبي. سوف نثبت في مثال لاحق أنه بالنسبة للنظام الخطي الذي تم حله في المثالين السابقين أن معدل تقارب طريقة جاوس- سيدال أسرع من طريقة جاكوبي. في الواقع، يمكن أثبات أنه لأي نظام خطي تكون مصفوفة معاملاته غير شاذة يكون معدل تقارب طريقة جاوس- سيدال أسرع أو يساوي طريقة جاكوبي.

نظرية (٣,١٥)

إذا كـــان $\|\mathbf{T}\|<1$ فـــإن متتاليـــة المتجهـــات $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ المعرفـــة بـــ $\mathbf{x}^{(k)}=\mathbf{T}\mathbf{x}^{(k-1)}+\mathbf{c}$ ، $k\geq 1$ و $\mathbf{c}\neq\mathbf{0}$ ، تتقـارب إلى الحـل الوحيـد $\mathbf{x}\in\Re^{n}$ للنظـام الخطي $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ لأي اختيار ابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}\in\Re^{n}$.

البرهان:

لنكتب النظام الخطي $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ بالشكل المساوي $\mathbf{x}=\mathbf{T}\mathbf{x}+\mathbf{c}$ ، وبطرح هذا الأخير من $\mathbf{x}^{(k)}=\mathbf{T}\mathbf{x}^{(k-1)}+\mathbf{c}$ نحصل على:

$$\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}=\mathbf{T}\mathbf{x}^{(k-1)}-\mathbf{T}\mathbf{x}=\mathbf{T}(\mathbf{x}^{(k-1)}-\mathbf{x})$$

وبأخذ معيار الطرفين يكون لدينا

$$\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}\|=\|\mathbf{T}(\mathbf{x}^{(k-1)}-\mathbf{x})\|\leq\|\mathbf{T}\|\|\mathbf{x}^{(k-1)}-\mathbf{x}\| \qquad (3.67)$$

وبتطبيق المتباينة (3.67) استدلالياً نحصل على:

(3.68)

$$\| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x} \| \le \| \mathbf{T} \| \| \mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x} \| \le \| \mathbf{T} \|^2 \| \mathbf{x}^{(k-2)} - \mathbf{x} \| \le \cdots \le \| \mathbf{T} \|^k \| \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x} \|$$

وبأخذ نهاية طرفي المتباينة (3.68) عندما k يؤول إلى ما لانهاية نحصل على:

$$\lim_{k\to\infty} \| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x} \| \le \lim_{k\to\infty} \| \mathbf{T} \|^k \| \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x} \| \qquad (3.69)$$

وبما أن $\| \mathbf{T} \| < 1$ فإن $\lim_{k\to\infty} \| \mathbf{T} \|^k = 0$ ، وبناء عليه فإنه من المتباينة (3.69) يكون لدينا:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$$

وهو المطلوب.

نظرية (٣,١٦)

إذا كان $\| \mathbf{T} \| < 1$ فإن متتالية المتجهات $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ المعرفة في المعادلة (3.54) تتقارب إلى $\mathbf{x} \in \Re^n$ لأي اختيار ابتدائي $\mathbf{x}^{(0)} \in \Re^n$ وتحقق المتباينة التالية:

$$\| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x} \| \le \frac{\| \mathbf{T} \|^k}{1 - \| \mathbf{T} \|} \| \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} \| \qquad (3.70)$$

من أجل $k \ge 1$.

ملاحظة: من النظريتين السابقتين يتضح أنه بالنسبة للطرائق التكرارية جاكوبي، جاوس- سيدال تكون متقاربة إذا كان $\|\mathbf{T}_J\| < 1$ ، $\|\mathbf{T}_{GS}\| < 1$

مثال (٣,٢٩)

لقد تم في المثالين (٣,٢٦) و(٣,٢٧) التأكد، من الناحية الحسابية، من تقارب الطريقتين التكراريتين جاكوبي وجاوس- سيدال إلى الحل الوحيد للنظام الخطي الموجود في المثال (٣,٢٦). هنا سوف نثبت أن التقارب لهاتين الطريقتين يكون مضموناً وذلك بتطبيق النظرية (٣,١٥) ومن ثم نوجد حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي تم الحصول عليه باستخدام طريقة جاكوبي. أما الحد الأعلى للحل التقريبي الذي تم الحصول عليه باستخدام الطريقة الأخرى فيمكن حسابه بشكل مشابه.

بداية نلاحظ أنه يمكن توزيع مصفوفة المعاملات بالشكل:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$$

حيث إن:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي بالنسبة لطريقة جاكوبي يكون لدينا:

$$\mathbf{T}_J = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

وبناء على ذلك فإنه يكون لدينا $\|\mathbf{T}_J\| = \frac{2}{3} < 1$ وحسب النظرية (٣,١٥) فإن تقارب طريقة جاكوبي للنظام الخطي الموجود في المثال (٣,٢٦) يكون مضموناً.

كذلك الحال بالنسبة لطريقة جاوس- سيدال، حيث إننا نحصل على $\|\mathbf{T}_{GS}\| = \frac{1}{2} < 1$. وبما أن $\|\mathbf{T}_{GS}\| < \|\mathbf{T}_J\| < 1$ فإن معدل تقارب طريقة جاوس- سيدال يكون أسرع من جاكوبي، وهذا يوافق النتائج العددية التي حصلنا عليها في المثالين (٣,٢٦) و(٣,٢٧).

الآن لنحسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب $\mathbf{x}^{(7)}$ والذي تم الحصول عليه باستخدام طريقة جاكوبي حيث إنه بالتعويض عن $k=7$ ، $\|\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^{(0)}\|=1$ و $\|\mathbf{T}_J\|=\dfrac{2}{3}$ في المتباينة (3.70) نحصل على:

$$\|\mathbf{x}^{(7)}-\mathbf{x}\|\leq\frac{\|\mathbf{T}\|^{7}}{1-\|\mathbf{T}\|}\|\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^{(0)}\|=\frac{(2/3)^{7}}{1-1/3}(1)=0.08779$$

نشير هنا إلى أنه يمكن استخدام المتباينة (3.70) لحساب عدد التكرارات اللازمة للحصول على حل تقريبي بدقة معينة $\epsilon=5\times10^{-t}$، $t\geq1$ حيث يكون لدينا:

$$\|\mathbf{x}^{(K)}-\mathbf{x}\|\leq\frac{\|\mathbf{T}\|^{K}}{1-\|\mathbf{T}\|}\|\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^{(0)}\|\leq5\times10^{-t}$$

والذي يمكن الحصول عليه بالاستعانة بالدالة اللوغارتمية log.

تعريف (٣,٩)

يقال إن المصفوفة $\mathbf{A} = (a_{ij})$ من النوع $n \times n$ مصفوفة قطعية السيطرة إذا كان:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \tag{3.13}$$

من أجل $i = 1,2,\ldots,n$.

مثال (٣,٦)

المصفوفة:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

مصفوفة قطعية السيطرة حيث إن:

$|4| > |-1| + |1|$ ، $|3| > |2| + |0|$ و $|6| > |-2| + |-3|$.

نختتم هذا البند بطرح النظرية التي تساعدنا في التحقق من ضمان تقارب الصيغ التكرارية إذا كانت المصفوفة $\mathbf{A}$ قطعية السيطرة

نظرية (٣,١٧)

إذا كانت $\mathbf{A}$ مصفوفة قطعية السيطرة فإن كل من طريقتي جاكوبي وجاوس- سيدال تكونان متتالية من المتجهات $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ تتقارب إلى الحل الوحيد $\mathbf{x} \in \Re^n$ للنظام الخطي $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ لأي اختيار ابتدائي $\mathbf{x}^{(0)} \in \Re^n$.

تمرين: ليكن نظام المعاددلات التالي

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -14 \end{array}$$

1) اثبت ان طريقتي جاكوبي تتقارب
2) اوجد التقريب الثاني للحل $X^{(2)}$ باستخدام $X^{(0)} = [4,3,-3]$
3) احسب الحد الاعلى للخطا
4) كم يلزم من تكرار للحصول على دقة 10^{-4}

الحل:

1)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= L + U + D.$$

طريقة جاكوبي

$$T_J = -D^{-1}(L+U),$$

$$T_J = -\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\|T_J\|_\infty = \max\left\{\frac{2}{4}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}\right\} = \frac{2}{3} < 1.$$

يوجد تقارب

(2

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left[12 \quad + \quad x_2^{(k)} \quad - \quad x_3^{(k)}\right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}\left[1 \quad + \quad x_1^{(k)} \quad - \quad x_3^{(k)}\right]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left[-14 \quad - \quad x_1^{(k)} \quad - \quad x_2^{(k)}\right]$$

$x_1^{(0)} = 4, x_2^{(0)} = 3, x_3^{(0)} = -3,$

ل $k = 0, 1,$ نتحصل على

$$\mathbf{x}^{(1)} = [4.5, 2.6667, -4.2]^T \quad and \quad \mathbf{x}^{(2)} = [4.7167, 3.2333, -4.2333]^T.$$

(3 باستعمال قانون الخطا

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(2)}\| \le \frac{(2/3)^2}{1 - 2/3} \left\| \begin{pmatrix} 4.5 \\ 2.6667 \\ -4.2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| \le \frac{4}{3}(1.2) = 1.6.$$

(4

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\| \le \frac{\|T_J\|^k}{1 - \|T_J\|}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\| \le 10^{-4}.$$

$$\frac{(2/3)^k}{1/3}(1.2) \le 10^{-4}, \quad or \quad (2/3)^k \le \frac{10^{-4}}{3.6}.$$

$$k\ln(2/3) \le \ln\left(\frac{10^{-4}}{3.6}\right), \Rightarrow \quad k \ge 25.8789, \Rightarrow \quad k = 26,$$