الفصل الخامس

التفاضل والتكامل العددي

Numerical Differentiation and Integration

مقدمة:

من المعلوم أن التفاضل والتكامل من المواضيع الأساسية في التحليل، كما أن الكثير من المسائل الرياضية التي تنشأ في المجالات التطبيقية تتطلب إيجاد تفاضل دالة معينة أو تكاملها على فترة محدودة أو غير محدودة.

- فمثلاً، التكامل المحدود $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ ، حيث إن $x > 0$ محدودة، يظهر كثيرا في مسائل الإحصاء، توزيع الحرارة على قضيب، سرعة تدفق سائل لزج وغيرها من التطبيقات.

وبما أنه ليس لـ e^{-t^2} دالة أصلية فإننا لا نستطيع استخدام الطرائق المعروفة، والتي عادة ما يتم دراستها في مقررات الحسبان، لإيجاد التكامل المشار إليه.

- ومن ناحية أخرى، في الكثير من التطبيقات تكون الدالة معرفة بقيم مجدولة فقط.

نشير إلى أنه في مثل هذه الحالات نلجأ إلى الطرائق العددية لإيجاد قيمة تقريبية بالدقة المطلوبة لهذا التكامل.

(٥,١) صيغ عددية للتفاضل الأول

Numerical Methods for the First Derivative

- ليكن لدينا $f \in C^{n+1}(I)$ ، حيث إن I فترة مفتوحة تحتوي على الأعداد المختلفة $x_0, x_1, \cdots, x_n$ والتي عددها $n+1$ بحيث إن المسافات فيما بينها تكون متساوية

- ولتكن $h = x_{i+1} - x_i$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n-1$ وأن هذه الأعداد معرفة كالتالي: $x_i = x_0 + ih$ ، من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$ حيث إن $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$.

إذن فإنه حسب النظرية (٤,٢) يوجد كثيرة الحدود لاغرانج الاستكمالية $p(x)$ ذات الدرجة n على الأكثر والتي تستكمل الدالة $f(x)$ عند الأعداد المذكورة، وأن:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x) f(x_j) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta(x)) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \qquad (5.1)$$

حيث إن $L_j(x)$ هي حاصل القسمة المعرفة في المعادلة (4.8) و $\eta(x)$ تنتمي للفترة I .

الآن بتفاضل طرفي المعادلة (5.1) نحصل على:

$$f'(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j'(x) f(x_j) + \frac{1}{(n+1)!} \frac{d}{dx} [f^{(n+1)}(\eta(x)) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)] \qquad (5.2)$$

الحد الأول في الطرف الأيمن للمعادلة (5.2) يعطينا تقريب لـ $f'(x)$ من أجل قيم عشوائية للمتغير x، أما الحد الثاني فهو الخطأ المقطوع المتعلق بهذا التقريب.

نلاحظ هنا أنه عندما يكون $x = x_k$، $k = 0,1,2,\ldots,n$ فإن معامل المقدار $\frac{d}{dx} f^{(n+1)}(\eta(x))$ يكون مساوياً للصفر، وبالتالي فإن المعادلة (5.2) تصبح بالشكل:

$$f'(x_k) = \sum_{j=0}^{n} L_j'(x_k) f(x_j) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta_k) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i)] \qquad (5.3)$$

تسمى المعادلة (5.3) صيغة النقاط $(n+1)$ لحساب التفاضل الأول للدالة f عند x_k.

القيمة التقريبية لهذا التفاضل هي:

$$f'(x_k) \approx D_h(f(x_k)) = \sum_{j=0}^{n} L'_j(x_k) f(x_j) \qquad (5.4)$$

في الواقع تزداد دقة التفاضل التقريبي (5.4) بازدياد العدد الصحيح n (أي عدد نقاط الاستكمال)، ويترتب على ذلك ازدياد في عدد الدوال التي يجب حسابها.

(٥,١,١) صيغ النقطتين

عندما $n=1$ يكون لدينا العددين x_0 و $x_1 = x_0 + h$ وتصبح المعادلة (5.3) بالشكل:

$$f'(x_k) = L_0'(x_k) f(x_0) + L_1'(x_k) f(x_1) + \frac{1}{2} f''(\eta_k) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{1} (x_k - x_i) \quad (5.5)$$

، $k = 0,1$.

بما أن $L_0'(x_k) = -L_1'(x_k) = \dfrac{1}{x_0 - x_1}$ و $h = x_1 - x_0$،

وبوضع $x_k = x_0$ نحصل على:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}[f(x_0 + h) - f(x_0)] - \frac{h}{2} f''(\eta_0) \quad (5.6)$$

حيث إن η_0 تقع بين x_0 و x_1 .

تسمى المعادلة (5.6) صيغة النقطتين الأمامية إذا كانت $h > 0$ والخلفية إذا كانت $h < 0$

وهي ذات رتبة تقاربية أولى وذلك لأن أُس الثابت h الموجود في حد الخطأ هو الواحد.

- نشير هنا إلى أنه عادة يستخدم الرمز $O(h)$ للدلالة على أن رتبة التقارب لصيغة التفاضل العددي هي الأولى. بشكل عام، الرمز $O(h^m)$ يستخدم للدلالة على أن رتبة التقارب (الدقة) للصيغة العددية تكون m ، حيث إن $m \geq 1$ عدد صحيح موجب.

- يتضح من المعادلة (5.6) أنه كلما صغرت قيمة h تقل قيمة حد الخطأ وبالتالي نحصل على تقريب أفضل لـ $f(x_0)$ المثال التالي يوضح ذلك.

مثال (٥,١)

اعتبر الدالة $f(x)=\sin x$ ، نريد حساب قيم تقريبية لـ $f'(1)$ وذلك باستخدام الصيغة (5.6) وقيم مختلفة لـ h.

عندما $h=0.1$ يكون لدينا:

$$f'(1)\approx D_{0.1}(f(1))=\frac{1}{0.1}[\sin(1+0.1)-\sin(1)]=0.49736$$

وبما أن $f'(1)=\cos(1)=0.54030$ فإن الخطأ المضبوط المرافق لهذا التقريب هو $|f'(1)-D_{0.1}(f(1))|=0.04294$.

من ناحية أخرى، عندما $h=0.2$ يكون لدينا:

$$f'(1)\approx D_{0.2}[f(1)]=\frac{1}{0.2}[\sin(1+0.2)-\sin(1)]=0.45284$$

والخطأ المرافق $|f'(1)-D_{0.2}(f(1))|=0.08746$، وهو ضعف الخطأ المرافق للتقريب $D_{0.1}(f(1))$.

وبما أن قيمة الخطأ في الحالة الثانية هي ضعف تلك في الحالة الأولى فإن هذا يدل على أن الرتبة التقاربية للطريقة هي الأولى وهذا يتوافق مع الاستنتاج التحليلي.

يمكن حساب حداً أعلى للخطأ المتعلق بأي من القيم التقريبية، فمثلاً لحساب حداً أعلى للخطأ للحالة التي يكون فيها $h = 0.1$ فإننا نلاحظ أن:

$$| f'(1) - D_{0.1}(f(1)) | \leq \frac{0.1}{2} \max_{1 \leq x \leq 1.1} | f''(x) |$$

وبما أن $\max_{1 \leq x \leq 1.1} | f''(x) | = \max_{1 \leq x \leq 1.1} | \sin x | = 0.89210$ فإنه يكون لدينا:

$$| f'(1) - D_{0.1}(f(1)) | \leq \frac{0.1}{2} (0.89210) = 0.04456$$

وهو أكبر من الخطأ الفعلي كما ينبغي أن يكون.

(٥,١,٢) صيغ الثلاث النقاط

هنا تكون $n = 2$ ويكون لدينا الأعداد الثلاثة x_0 ، $x_1 = x_0 + h$ و $x_2 = x_0 + 2h$ والمعادلة (5.3) تصبح بالشكل:

(5.7)

$$f'(x_k) = L_0'(x_k)f(x_0) + L_1'(x_k)f(x_1) + L'(x_k)f(x_2) + \frac{1}{6}f'''(\eta_k)\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{2}(x_k - x_i)$$

من أجل $k = 0,1,2$ ، حيث إن:

$$L_0'(x_k) = \frac{2x_k - x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1'(x_k) = \frac{2x_k - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \qquad (5.8)$$

$$L_2'(x_k) = \frac{2x_k - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

من المعادلة (5.7) يمكن استنتاج عدة صيغ عددية لحساب قيم تقريبية لتفاضل الدالة f كما يلي:

الصيغة الأولى: هنا نضع $x_k = x_0$ في المعادلة (5.7) لتصبح بالشكل:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= L_0'(x_0)f(x_0) + L_1'(x_0)f(x_1) + L'(x_0)f(x_2) \\ &\quad + \frac{1}{6}f'''(\eta_0)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \end{aligned} \tag{5.9}$$

حيث إن η_0 تقع بين x_0 و x_2. وبالتعويض عن $x_k = x_0$، $x_1 = x_0 + h$ و $x_2 = x_0 + 2h$ في (5.8) يكون لدينا:

$$L_0'(x_0) = \frac{2x_0 - x_0 - h - x_0 - 2h}{(x_0 - x_0 - h)(x_0 - x_0 - 2h)} = -\frac{3h}{2h^2} = -\frac{3}{2h}$$

$$L_1'(x_0) = \frac{2x_0 - x_0 - x_0 - 2h}{(x_0 + h - x_0)(x_0 + h - x_0 - 2h)} = \frac{2h}{h^2} = \frac{2}{h}$$

$$L_2'(x_0) = \frac{2x_0 - x_0 - x_0 - h}{(x_0 + 2h - x_0)(x_0 + 2h - x_0 - h)} = -\frac{h}{2h^2} = -\frac{1}{2h}$$

وبالتعويض عن ذلك في المعادلة (5.9) نحصل على:

$$f'(x_0) = -\frac{3}{h} f(x_0) + \frac{2}{h} f(x_0 + h) - \frac{1}{2h} f(x_2) + \frac{1}{6} f'''(\eta_0)(x_0 - x_0 - h)(x_0 - x_0 - 2h)$$

ومنه يكون لدينا:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^2}{3} f'''(\eta_0) \quad (5.10)$$

إذا كان $h > 0$ فإن المعادلة (5.10) تسمى صيغة الثلاث نقاط الأمامية لحساب التفاضل العددي،

أما إذا كان $h < 0$ فإنها تسمى صيغة الثلاث نقاط الخلفية.

يتضح من حد الخطأ الموجود في الصيغة العددية (5.10) أنها تربيعية التقارب،

أي أنها ذات رتبة تقاربية ثانية $O(h^2)$.

الصيغة الثانية: بوضع $x_k = x_1$ في المعادلة (5.7) نحصل على:

$$f'(x_1) = L_0'(x_1) f(x_0) + L_1'(x_1) f(x_1) + L'(x_1) f(x_2) + \frac{1}{6} f'''(\eta_0)(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \tag{5.11}$$

حيث إن η_0 تقع بين x_0 و x_2 . وبوضع $x_k = x_1$ في المعادلات (5.8) واستخدام الحقيقة أن $x_1 = x_0 + h$ و $x_2 = x_0 + 2h$ نحصل على:

$$L_0'(x_1) = \frac{2x_0 + 2h - x_0 - h - x_0 - 2h}{(x_0 - x_0 - h)(x_0 - x_0 - 2h)} = -\frac{h}{2h^2} = -\frac{1}{2h}$$

$$L_1'(x_1) = \frac{2x_0 + 2h - x_0 - x_0 - 2h}{(x_0 + h - x_0)(x_0 + h - x_0 - 2h)} = \frac{0}{h^2} = 0$$

$$L_2'(x_1) = \frac{2x_0 + 2h - x_0 - x_0 - h}{(x_0 + 2h - x_0)(x_0 + 2h - x_0 - h)} = \frac{h}{2h^2} = \frac{1}{2h}$$

وبما أن $(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) = (x_0 + h - x_0)(x_0 + h - x_0 - 2h) = -h^2$ فإن المعادلة (5.11) تأخذ الشكل:

$$f'(x_0 + h) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + 2h) - f(x_0)] - \frac{h^2}{6} f'''(\eta_0) \qquad (5.12)$$

وباستبدال $x_0 + h$ بـ x_0 في المعادلة (5.12) يكون لدينا:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6} f'''(\eta_1) \qquad (5.13)$$

حيث إن η_1 تقع بين $x_0 - h$ و $x_0 + h$.

تسمى المعادلة (5.13) صيغة الفروق المركزية لحساب القيمة التقريبية لـ $f'(x_0)$ وهي ذات رتبة تقاربية ثانية.

نشير هنا إلى أن الخطأ المتعلق بالصيغة (5.13) هو $-\frac{h^2}{6} f'''(\eta_1)$ وبالتالي فهو نصف مقدار الخطأ المرافق للصيغة الأمامية (5.10).

الــــصيغة الثالثـــة: أخــــيراً بوضـــع $x_k = x_2$ والتعـــويض عــــن $x_1 = x_0 + h$ و $x_2 = x_0 + 2h$ في (5.7) و (5.8) نحصل على الصيغة العددية:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0)] + \frac{h^2}{3}f'''(\eta_0) \qquad (5.14)$$

حيث إن η_0 تقع بين x_0 و $x_0 - 2h$. نترك استنتاج هذه الصيغة للمناقشة في التمارين.

نشير هنا إلى أنه باستبدال h بـ $-h$ في المعادلة (5.14) نحصل على الصيغة (5.10)؛ وعليه فإن هاتين الصيغتين متكافئتان.

ملاحظة:

كما سبق أن ذكرنا فإن الخطأ المرافق للصيغة المركزية (5.13) هو نصف ذلك المتعلق بالصيغة (5.10) وبالتالي تكون أفضلية الاستخدام للصيغة المركزية، ولكن عندما يكون التفاضل المراد إيجاده عند عدد يقع على طرفي الفترة فإنه لا يمكن استخدام الصيغة المركزية. بالمقابل إذا كان التفاضل الذي نريد إيجاده عند عدد غير موجود في جدول المعلومات فإننا نستطيع فقط تقريب التفاضل باستخدام الصيغة المركزية حيث إنها لا تتطلب معرفة قيمة الدالة عند العدد المراد إيجاد التفاضل عنده.

مثال (٥,٢)

اعتبر المعلومات التالية:

x	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$f(x)$	0.26336	0.33647	0.40547	0.47000	0.53063

سوف نستخدم صيغ الثلاث نقاط لحساب قيم تقريبية لـ $f'(0.5)$ ونقارن بينها.

بداية نستخدم الصيغة (5.10) في الحالات الممكن استخدامها وهي:

١- عندما $h = 0.1$ يكون لدينا:

$$f'(0.5) \approx D_{0.1}(f(0.5)) = \frac{1}{2(0.1)}[-3f(0.5)+4f(0.6)-f(0.7)] = 0.66496$$

٢- وعندما $h = -0.1$ نحصل على:

$$f'(0.5) \approx D_{-0.1}(f(0.5)) = \frac{1}{2(-0.1)}[-3f(0.5)+4f(0.4)-f(0.3)] = 0.66435$$

ومن ناحية أخرى، فإنه يمكن استخدام الصيغة المركزية (5.13) في الحالات التالية:

١- عندما $h = 0.1$ حيث نحصل على:

$$f'(0.5) \approx D_{0.1}(f(0.5)) = \frac{1}{2(0.1)}[f(0.6) - f(0.4)] = 0.666766$$

٢- وعندما $h = 0.2$ يكون لدينا:

$$f'(0.5) \approx D_{0.2}(f(0.5)) = \frac{1}{2(0.2)}[f(0.7) - f(0.3)] = 0.67066$$

وبما أن $f(x) = \ln(x+1)$ فإن $f'(0.5) = \frac{2}{3} \approx 0.66667$ وبالتالي يمكن مقارنة القيم الفعلية مع التقريبية لكل حالة من الحالات السابقة حيث إنه بالنسبة للصيغة (5.10) يكون لدينا:

$$|f'(0.5) - D_{0.1}(f(0.5))| = 0.00171 \quad \text{و} \quad |f'(0.5) - D_{-0.1}(f(0.5))| = 0.00232$$

أما بالنسبة للصيغة المركزية (5.13) فإنه يكون لدينا:

$$|f'(0.5)-D_{0.1}(f(0.5))|=0.00099 \quad \text{و} \quad |f'(0.5)-D_{0.2}(f(0.5))|=0.00399$$

ومن هذه النتائج نلاحظ أن أفضل تقريب حصلنا عليه هو ذلك الذي حصلنا عليه باستخدام الصيغة المركزية (5.13) عندما $h=0.1$ وأن مقدار الخطأ هو (تقريباً) نصف مقدار الخطأ المتعلق بالتقريب الذي يليه مباشرة وهو ذلك الذي تم حسابه باستخدام الصيغة (5.10) عندما $h=0.1$، وهذا يوافق الاستنتاج النظري.

- أيضاً، نلاحظ أن قيمة الخطأ المرافقة للتقريب المحسوب باستخدام الصيغة (5.13) عندما $h=0.2$ هي أربعة أضعاف قيمة الخطأ المرافق للتقريب المحسوب باستخدام نفس الصيغة عندما $h=0.1$ وهذا يدل على أن رتبة التقارب لهذه الصيغة يكون تربيعياً. وهذا صحيح بشكل عام، أي أنه إذا كانت رتبة الصيغة تربيعية فإنه إذا تم مضاعفة قيمة h المستخدمة فإن قيمة الخطأ تتضاعف أربع مرات.

ختاماً لنحسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي تم الحصول عليه باستخدام الصيغة (5.10) عندما $h = -0.1$ حيث يكون لدينا:

$$| f'(0.5) - D_{-0.1}(f(1)) | \leq \frac{(-0.1)^2}{3} \max_{0.3 \leq x \leq 0.5} | f'''(x) |$$

وبما أن $\max_{0.3 \leq x \leq 0.5} | f'''(x) | = \max_{0.3 \leq x \leq 0.5} \left| \frac{2}{(x+1)^3} \right| = 0.91033$ فإننا نحصل على:

$$| f'(0.5) - D_{-0.1}(f(1)) | \leq \frac{(-0.1)^2}{3}(0.91033 = 0.00303$$

وهذا المقدار أكبر من مقدار الخطأ الفعلي الذي حصلنا عليه بالنسبة لهذه الحالة.

(٥,٢) صيغ عددية للتفاضلات العليا

Numerical Methods for Higher Derivatives

هنا سندرس الصيغة المركزية لحساب $f''(x_0)$

لتكن $f \in C^4(I)$ ، حيث إن I فترة مفتوحة تحتوي على الأعداد $x_0 - h$ ، x_0 و $x_0 + h$ حيث إن $h \neq 0$.

بنشر كثيرة الحدود تايلور ذات الدرجة الثالثة للدالة $f(x)$:

(5.26)

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{(x - x_0)^4}{4!} f^{(4)}(\eta(x))$$

وبوضع $x = x_0 - h$ في المعادلة (5.26) يكون لدينا:

(5.27)

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\eta_{-1})$$

حيث إن η_{-1} تقع بين $x_0 - h$ و x_0،

و بوضع $x = x_0 + h$ في (5.26) نحصل على:

(5.28)

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\eta_{+1})$$

حيث إن η_{+1} تقع بين x_0 و و $x_0 + h$.

بجمع المعادلتين (5.27) و (5.28) نحصل على:

$$f(x_0 - h) + f(x_0 + h) = 2f(x_0) + h^2 f''(x_0) + \frac{h^4}{24}[f^{(4)}(\eta_{-1}) + f^{(4)}(\eta_{+1})]$$

و بحل المعادلة الأخيرة بالنسبة لـ $f''(x_0)$ يكون لدينا:

$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}[f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)]-\frac{h^2}{24}[f^{(4)}(\eta_{-1})+f^{(4)}(\eta_{+1})]$$

الآن بما أن $f^{(4)}(x)$ دالة متصلة على الفترة $[x_0-h,x_0+h]$ فإنه حسب النظرية الوسيطية يوجد عدد η في الفترة (x_0-h,x_0+h) بحيث إن:

$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}[f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)]-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\eta) \qquad (5.29)$$

التفاضل العددي هو:

$$f''(x_0)\approx D_h^2(f(x_0))=\frac{1}{h^2}[f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)]$$

والخطأ المرافق له هو $-\frac{h^2}{12}[f^{(4)}(\eta)$ ، وبالتالي تكون الصيغة المركزية (5.29) ذات رتبة تقاربية ثانية.

مثال (٥,٤)

اعتبر المعلومات الموجودة في المثال (٥,٢)، نريد أن نوجد القيم التقريبية الممكنة لـ $f''(0.5)$ وذلك باستخدام (5.29). في الواقع يمكن استخدام الصيغة (5.29) عندما تكون $h = 0.1$ و $h = 0.2$ حيث نحصل على القيم التقريبية:

$$f''(0.5) \approx D_{0.1}^2(f(x_0)) = \frac{1}{(0.1)^2}[f(0.4) - 2f(0.5) + f(0.6)] = -0.44544$$

$$f''(0.5) \approx D_{0.2}^2(f(x_0)) = \frac{1}{(0.2)^2}[f(0.3) - 2f(0.5) + f(0.7)] = -0.44844$$

والأخطاء المرافقة لها:

$|f''(0.5) - D_{0.1}^2(f(0.5))| = 0.001$ و $|f''(0.5) - D_{0.2}^2(f(0.5))| = 0.004$.

نلاحظ أن الخطأين يحققان العلاقة $0.001 = \dfrac{0.004}{(2)^2}$ (أو $0.004 = 0.001(2)^2$) وهي التي تدل على أن الطريقة المستخدمة ذات رتبة تقاربية ثانية، وهو ما يتوافق مع الواقع.

(٥,٤) التكامل العددي

Numerical Integration

لتكن $f \in C^{n+1}[a,b]$ حيث إن الفترة $[a,b]$ تحتوي على الأعداد المختلفة $x_0, x_1, \ldots, x_n$ والتي عددها $n+1$، بحيث إن $x_i = a + ih$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$ ، $h = \dfrac{b-a}{n}$، $x_0 = a$، $x_n = b$ و n عدد صحيح موجب. إذن، حسب النظرية (٤,١) توجد كثيرة حدود وحيدة $p(x)$ من الدرجة n على الأكثر والخطأ المرافق لها $e(x)$ بحيث إن:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= p(x) + e(x) \\
&= \sum_{j=0}^{n} L_j(x) f(x_j) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta(x)) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \qquad (5.46)
\end{aligned}
$$

حيث إن $\eta(x)$ تقع في الفترة (a,b).

بتكامل طرفي المعادلة (5.46) من a إلى b نحصل على المعادلة:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{n} L_j(x) f(x_j) dx + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\eta(x)) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) dx$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{n} a_j f(x_j) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\eta(x)) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) dx \qquad (5.47)$$

حيث إن $a_j = \int_a^b L_j(x)dx$ من أجل $j = 0,1,2,\ldots,n$.

بناء على ذلك فإن صيغة التكامل العددي هي: $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} a_j f(x_j)$ (5.48)

والخطأ المرافق لها هو: $E(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\eta(x)) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) dx$ (5.49)

سندرس صيغتي شبه المنحرف وسمبسون واللتين يتم الحصول عليهما بوضع $n=1$ و $n=2$ في المعادلة (5.47)، على الترتيب.

١ – صيغة شبه المنحرف

عندما $n=1$ يكون لدينا العددين x_0 و x_1 ، حيث إن $x_0=a$ ، $x_1=b$ و $h=x_1-x_0$. بالتالي فإن المعادلة (5.47) تأخذ الشكل:

$$\int_a^b f(x) = \sum_{j=0}^{1} a_j f(x_j) + \frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x_1} f''(\eta(x))\prod_{i=0}^{1}(x-x_i)dx \qquad (5.50)$$

حيث إن التكامل العددي هو:

$$T_1(f) = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) \quad = \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) dx$$

$$= [\frac{(x - x_1)^2}{2(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2(x_1 - x_0)} f(x_1)]_{x_0}^{x_1}$$

$$= \frac{(x_1 - x_0)^2}{2(x_1 - x_0)} f(x_1) - \frac{(x_0 - x_1)^2}{2(x_0 - x_1)} f(x_0)$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] \tag{5.51}$$

والخطأ المرافق له: $E(f) = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(\eta(x))(x - x_0)(x - x_1) dx$

وبما أن إشارة الدالة $(x-x_0)(x-x_1)$ لا تتغير على الفترة $[x_0, x_1]$ فإنه حسب نظرية القيمة المتوسطة للتكامل (نظرية ١,٦) يوجد عدد ξ في الفترة (x_0, x_1) بحيث إن:

$$E(f) = \frac{1}{2} f''(\xi) \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1)dx$$

$$= \frac{1}{2} f''(\xi) [\frac{x^3}{3} - \frac{(x_0+x_1)x^2}{2} + x_0 x_1 x]_{x_0}^{x_1}$$

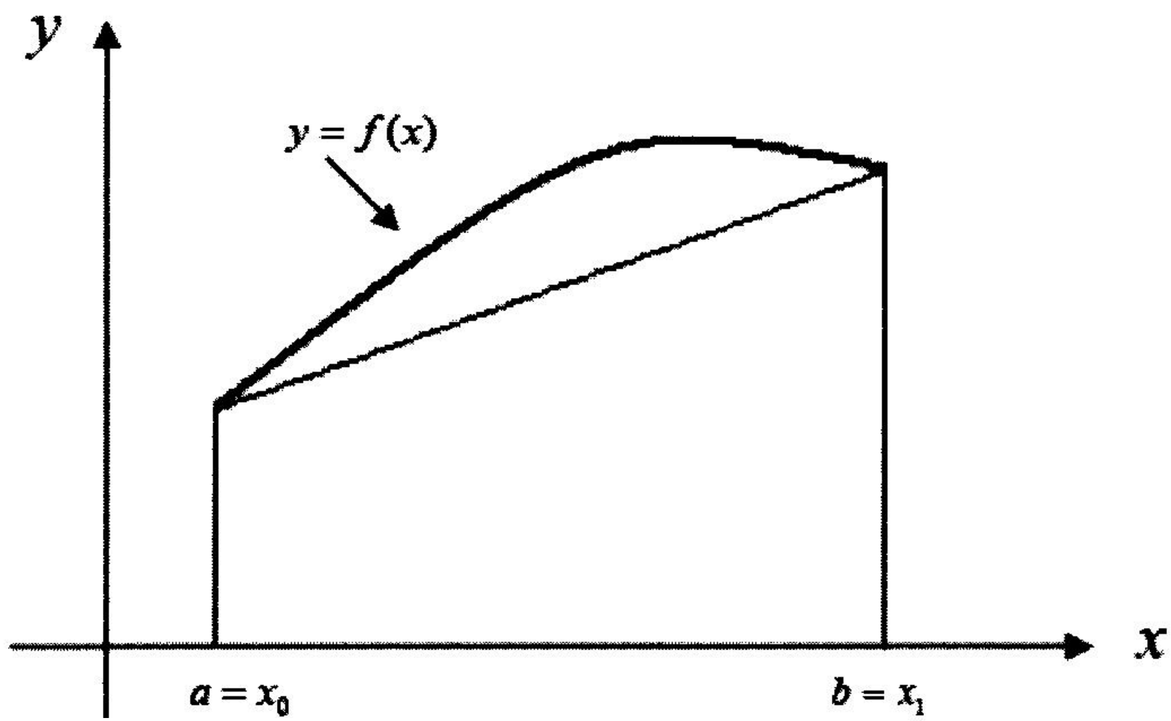
$$= -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \tag{5.52}$$

باستخدام المعادلتين (5.51) و (5.52) يمكن كتابة المعادلة (5.50) بالشكل:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi) \tag{5.53}$$

وهي صيغة شبه المنحرف لحساب التكامل المحدود. من الواضح أنها ذات رتبة تقاربية ثالثة ($O(h^3)$).

نشير هنا إلى أنه إذا كانت $f(x) \geq 0$ لكل $x \in [a,b]$ فإن الشكل رقم (٥,٢) يوضح التكامل العددي (5.51) وهو مساحة شبه المنحرف الواقع تحت كثيرة الحدود الخطية الواصلة بين النقطتين $(x_0, f(x_0))$ و $(x_1, f(x_1))$ والذي يمكن مقارنته بالتكامل الفعلي $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ والذي تمثله مساحة ما تحت منحنى الدالة $f(x)$.



الشكل رقم (٥,٢). صيغة شبه المنحرف عندما $f(x) \geq 0$.

٢- صيغة سمبسون

عندما $n=2$ يكون لدينا الأعداد الثلاثة x_0 ، x_1 و x_2، حيث إن $x_0=a$، $x_1=a+h$، $x_2=b$ و $h=\dfrac{b-a}{2}$. بناء على ذلك ، فإن المعادلة (5.47) تأخذ الشكل:

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{j=0}^{2}a_j f(x_j)+\frac{1}{3!}\int_{x_0}^{x_2} f'''(\eta(x))\prod_{i=0}^{2}(x-x_i)dx \qquad (5.54)$$

التكامل العددي الموجود في المعادلة (5.54) يمكن كتابته بالشكل:

$$\begin{aligned}
S_2(f)&=a_0f(x_0)+a_1f(x_1)+a_2f(x_2)\\
&=\int_{x_0}^{x_2}\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}dxf(x_0)+\int_{x_0}^{x_2}\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}dxf(x_1)\\
&\quad+\int_{x_0}^{x_2}\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}dxf(x_2) \qquad (5.55)
\end{aligned}$$

$$S_2(f) = \frac{1}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dxf(x_0) - \frac{1}{h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_2)dxf(x_1)$$

$$+\frac{1}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_1)dxf(x_2)$$

سوف نحسب التكاملات الموجودة في الطرف الأيمن للمعادلة (5.55) بالتالي:

بالنسبة للتكامل الأول يكون لدينا:

$$\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dx = \int_{x_0}^{x_2}(x-x_0-h)(x-x_0-2h)dx$$

وباستخدام التعويض $u = x - x_0$ فإننا نحصل على $du = dx$ ، $x - x_0 - h = u - h$ و $x - x_0 - 2h = u - 2h$. وبالنسبة لحدود التكامل فإنه عندما $x = x_0$ يكون لدينا $u = 0$ وعندما $x = x_0 + 2h$ نحصل على $u = 2h$.

وبالتالي يكون التكامل الأخير بالشكل:

$$\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dx = \int_{0}^{2h}(u-h)(u-2h)du$$

$$=\frac{1}{3}u^3-\frac{3}{2}hu^2+2h^2u \quad \Big]_0^{2h} \tag{5.56}$$

$$=\frac{8}{3}h^3-6h^3+4h^3 = \frac{2}{3}h^3$$

وبأسلوب مشابه يكون لدينا:

$$\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_2)dx = \int_{0}^{2h}u(u-2h)du = -\frac{4}{3}h^3 \tag{5.57}$$

$$\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_1)dx = \int_{0}^{2h}u(u-h)du = \frac{2}{3}h^3 \tag{5.58}$$

وبالتعويض عن المعادلات (5.56 − 5.58) في المعادلة (5.55) نحصل على:

$$S_2(f) = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \qquad (5.59)$$

وهو التكامل العددي الموجود في (5.54).

أما بالنسبة لحد الخطأ المرافق له والموجود في (5.54) فهو:

$$E(f) = \frac{1}{6}\int_{x_0}^{x_2} f'''(\eta(x))(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\,dx \qquad (5.60)$$

وبالتكامل بالتجزيء يكون لدينا: $E(f) = -\frac{1}{15}h^5 f^{(4)}(\xi)$ (5.62)

إذن من المعادلات (5.54 − 5.62) نحصل على الصيغة العددية:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \qquad (5.63)$$

وهي صيغة سمبسون لحساب التكامل المحدود.

مثال (٥,٧)

في هذا المثال نستخدم الصيغ العددية (5.53)و(5.63) لحساب قيم تقريبية للتكامل المحدود $\int_1^2 \frac{1}{(x+2)^2}dx$ ، ثم سنحسب الأخطاء الفعلية المتعلقة بها ونقارنها. أيضاً سوف نحسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بطريقة سمبسون.

لاستخدام طريقة شبه المنحرف نلاحظ أولاً أن $x_0 = 1$ ، $x_1 = 2$ و $h = b - a = 1$.

وبالتالي يكون لدينا:

$$T_1 = \frac{1}{2}[f(1) + f(2)] = \frac{1}{2}[\frac{1}{9} + \frac{1}{16}] = 0.08680556$$

أما بالنسبة لطريقة سمبسون فيكون لدينا $x_0 = 1$ ، $x_1 = \frac{3}{2}$ ، $x_2 = 2$ و $h = \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}$ والقيمة التقريبية للتكامل:

$$S_2 = \frac{1/2}{3}[f(1) + 4f(f(1.5) + f(2)] = \frac{1}{6}[\frac{1}{9} + 4\frac{4}{49} + \frac{1}{16}] = 0.08335695$$

وبمعرفة القيمة المضبوطة للتكامل:

$$I(f)=\int_{1}^{2}\frac{1}{(x+2)^2}dx=-\frac{1}{x+2}\Big]_1^2=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

فإنه يمكن حساب الأخطاء المضبوطة حيث إنه حصلنا على:

$|I(f)-T_1(f)|=3.47\times10^{-3}$ ، $|I(f)-S_2(f)|=2.36\times10^{-5}$ ،

الآن لنحسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي حصلنا عليه باستخدام طريقة سمبسون حيث إنه يكون لدينا:

$$|I(f)-S_2(f)|\le|-\frac{h^5}{90}|\max_{x\in[1,2]}|f^{(4)}(x)|$$

وبما أن $h=0.5$ و $\max_{x\in[1,2]}|f^{(4)}(x)|=\max_{x\in[1,2]}|\frac{120}{(x+2)^6}|=\frac{40}{243}$ فإننا نحصل على:

$$|I(f)-S_2(f)|\le|-\frac{0.5^5}{90}\frac{40}{243}=5.72\times10^{-5}$$

وهو أكبر من الخطأ المضبوط المتعلق باستخدام هذه الطريقة كما يجب أن يكون.

(٥,٥) صيغ التكامل العددي المركبة

Composite Formulas

قد لا يكون استخدام صيغتي شبه المنحرف وسمبسون عملياً في الكثير من الحالات خصوصاً إذا كانت فترة التكامل كبيرة نسبياً؛ حيث إننا نضطر في مثل هذه الحالات

إلى استخدام كثيرات حدود استكمالية ذات درجات عالية. وبالتالي ينتج عن ذلك كثيرات حدود ذات درجة عالية من الذبذبة وهذا بدوره يترك تأثيراً سيئاً على دقة الحلول العددية. للتغلب على هذه المشكلة فإننا نقطّع الفترة $[a,b]$ إلى فترات صغيرة ومعرفة كالتالي:

$$\begin{aligned} &a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \\ &x_i = a + ih, \quad i = 0,1,2,\ldots,n, \qquad h = \frac{b-a}{n} \end{aligned} \tag{5.75}$$

ومن ثم نطبق الصيغة المراد استخدامها على كل فترة من الفترات الصغيرة للحصول على صيغة مركبة للصيغة المستخدمة على كل الفترة $[a,b]$.

النظريتان التاليتان توضحان الصيغتين المركبتين لطريقتي شبه المنحرف وسمبسون المركبة للطرائق الأخرى لمناقشتها في التمارين.

نظرية (٥,٣)

لتكن $f \in C^2[a,b]$، بحيث تحتوي الفترة $[a,b]$ على الأعداد المختلفة $x_0, x_1, \ldots, x_n$ والمعرفة في (5.75) حيث إن n عدد صحيح موجب. فإنه يمكن كتابة صيغة شبه المنحرف المركبة للفترات الصغيرة $[x_0, x_1],[x_1, x_2],\ldots,[x_{n-1}, x_n]$ التي عددها n بالشكل:

(5.76)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)] - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\mu)$$

حيث إن $\mu \in (a,b)$.

البرهان:

لنضع $h=\dfrac{b-a}{n}$ ولنقطع الفترة $[a,b]$ إلى n فترة صغيرة $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$ والمعرفة في (5.75). إذن من خواص التكامل المحدود يكون لدينا: $\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$

وبتطبيق صيغة شبه المنحرف على كل فترة $[x_{i-1},x_i]$، $i=1,2,\ldots,n$ نحصل على:

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}\{\frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)]-\frac{h^3}{12}f''(\eta_i)\}$$

حيث إن η_i تقع في الفترة $[x_{i-1},x_i]$. وبما أن $f(x_i)$ تكون موجودة في الحد الذي يمثل الفترتين $[x_{i-1},x_i]$ و $[x_i,x_{i+1}]$ من أجل $i=1,2,\ldots,n-1$ يكون لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{2}[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(x_n)]-\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n}f''(\eta_i)$$

الآن لنضع $E(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\eta_i)$. بما أن f'' دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ فإنه حسب نظرية القيم القصوى يوجد للدالة f'' قيم عظمى وصغرى على $[a,b]$ أي أن:

$$\min_{x\in[a,b]} f''(x) \le f''(\eta_i) \le \max_{x\in[a,b]} f''(x)$$

بأخذ مجموع الأطراف الثلاثة من 1 إلى n نحصل على:

$$n \min_{x\in[a,b]} f''(x) \le \sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i) \le n \max_{x\in[a,b]} f''(x)$$

وبقسمة الأطراف الثلاثة على n يكون لدينا:

$$\min_{x\in[a,b]} f''(x) \le \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i) \le \max_{x\in[a,b]} f''(x)$$

وبما أن f'' دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ فإنه حسب نظرية القيمة المتوسطة يوجد عدد $\mu \in (a,b)$ بحيث إن:

$$f''(\mu) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i)$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$E(f) = -\frac{h^3}{12} n f''(\mu)$$

وبما أن $h = \dfrac{b-a}{n}$ فإننا نحصل على:

$$E(f) = -\frac{(b-a)h^2}{12n} n f''(\mu) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\mu)$$

وهو المطلوب.

نظرية (٥,٤)

لتكن $f \in C^4[a,b]$ ، بحيث تحتوي الفترة $[a,b]$ على الأعداد المختلفة $x_0, x_1, \ldots, x_n$ والمعرفة في (5.75) وأن $n = 2m$ ، m عدد صحيح موجب. فإنه يمكن كتابة صيغة سمبسون المركبة للفترات الصغيرة $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \ldots, [x_{n-2}, x_n]$ التي عددها m بالشكل:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + f(x_n)] - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\mu) \tag{5.77}$$

حيث إن $\mu \in (a,b)$.

البرهان:

لنـــضع $h=\dfrac{b-a}{n}$ ولنقطـــع الفـــترة $[a,b]$ إلى m فـــترة صـــغيرة $[x_0,x_2],[x_2,x_4],\ldots,[x_{n-2},x_n]$ والمعرفة في (5.75). وبالتالي يكون لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^{m}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx$$

وبتطبيق صيغة سمبسون على كل فترة $[x_{2i-2},x_{2i}]$، $i=1,2,\ldots,m$ نحصل على:

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^{m}\{\frac{h}{3}[f(x_{2i-2})+4f(x_{2i-1})+f(x_i)]-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\eta_i)\}$$

حيث إن η_i تقع في الفترة $[x_{2i-2},x_{2i}]$.

وبما أن $f(x_{2i})$ تكون موجودة في الحد الذي يمثل الفترتين $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ و $[x_{2i}, x_{2i+2}]$

من أجل $i = 1,2,\ldots,m-1$ يكون لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + f(x_n)] - \frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\eta_i)$$

الآن لنضع $E(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta_i)$. بما أن $f^{(4)}$ دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ فإنه حسب نظرية القيم القصوى يوجد للدالة $f^{(4)}$ قيم عظمى وصغرى على $[a,b]$ أي أن:

$$\min_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x) \le f^{(4)}(\eta_i) \le \max_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x)$$

بأخذ مجموع الأطراف الثلاثة من 1 إلى m نحصل على:

$$m \min_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x) \le \sum_{i=1}^{m} f^{(4)}(\eta_i) \le m \max_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x)$$

وبقسمة الأطراف الثلاثة على m يكون لدينا:

$$\min_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x) \le \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f^{(4)}(\eta_i) \le \max_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x)$$

وبما أن $f \in C^4[a,b]$ فإنه حسب نظرية القيمة المتوسطة يوجد عدد $\mu \in (a,b)$ بحيث إن:

$$f^{(4)}(\mu) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f^{(4)}(\eta_i)$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$E(f) = -\frac{h^5}{90} m f^{(4)}(\mu)$$

وبما أن $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$ فإننا نحصل على:

$$E(f) = -\frac{(b-a)h^4}{180m} m f^{(4)}(\mu) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\mu)$$

وهو المطلوب.

مثال (٥,٩)

هنا سنستعرض الصيغتين المركبتين لطريقتي شبه المنحرف و سمبسون لحساب قيم تقريبية للتكامل المحدود $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+2} dx$ وذلك بوضع $n = 4$. سوف نحسب الخطأ المضبوط وحداً أعلى للخطأ في كل حالة.

بداية نلاحظ أن $x_i = -1 + ih$ ، من أجل $i = 0,1,2,3,4$ و $h = \frac{1-(-1)}{4} = \frac{1}{2}$

وبالتالي يكون لدينا $x_0 = -1$ ، $x_1 = -\frac{1}{2}$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = \frac{1}{2}$ و $x_4 = 1$.

الآن باستخدام صيغة شبه المنحرف المركبة نحصل على:

$$
\begin{aligned}
T_4(f) &= \frac{1/2}{2}[f(-1) + 2\{f(-\frac{1}{2}) + f(0) + f(\frac{1}{2})\} + f(1)] \\
&= \frac{1}{4}[1 + 2\{\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5}\} + \frac{1}{3}] \\
&= 1.11667
\end{aligned}
$$

وبما أن التكامل المضبوط هو:

$$I(f)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+2}dx=\ln(x+1)]_{-1}^{1}=\ln 3$$

فإن الخطأ المضبوط يكون:

$$|I(f)-T_4(f)|=|\ln 3-1.11667|=0.01806$$

والحد الأعلى للخطأ هو:

$$|I(f)-T_4(f)|\leq\frac{2(1/2)^2}{12}\max_{-1\leq x\leq 1}|f''(x)|$$

وبما أن $\max_{-1\leq x\leq 1}|f''(x)|=\max_{-1\leq x\leq 1}\left|\frac{2}{(x+2)^3}\right|=2$ فإننا نحصل على:

$$|I(f)-T_4(f)|\leq\frac{2(1/2)^2}{12}(2)=\frac{1}{12}\approx 0.08333333$$

أما بالنسبة لصيغة سمبسون المركبة فيكون لدينا ما يلي:

$$S_4(f) = \frac{1/2}{3}[f(-1) + 4f(-\frac{1}{2}) + 2f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)]$$
$$= \frac{1}{6}[1 + 4\frac{2}{3} + 2\frac{1}{2} + 4\frac{2}{5} + \frac{1}{3}]$$
$$= 1.1$$

والخطأ المضبوط $|I(f) - S_4(f)| = |\ln 3 - 1.1| = 0.00139$. لحساب حداً أعلى للخطأ نلاحظ أن:

$$|I(f) - S_4(f)| \le \frac{2(1/2)^4}{180} \max_{-1 \le x \le 1} |f^{(4)}(x)|$$

وبما أن $\max_{-1 \le x \le 1} |f^{(4)}(x)| = \max_{-1 \le x \le 1} |\frac{24}{(x+2)^5}| = 24$ فإنه يكون لدينا:

$$|I(f) - S_4(f)| \le \frac{2(1/2)^4}{180}(24) = 0.01667$$

يتضح من النتائج العددية للمثال (٥,٩) أن القيمة التقريبية للتكامل التي تم الحصول عليها باستخدام طريقة سمبسون المركبة أفضل من تلك التي حصلنا عليها باستخدام طريقة شبه المنحرف المركبة وهذا يتوافق مع النتائج الواردة في النظريتين

(٥,٢) و(٥,٣). في الواقع يمكن استخدام هاتين النظريتين لتحديد قيمة h التي تجعل دقة القيمة التقريبية المحسوبة للتكامل أقل من أو تساوي $\varepsilon = 5\times10^{-t}$ من أجل $t \geq 1$. المثال التالي يستعرض ذلك بالنسبة لصيغة شبه المنحرف المركبة.

مثال (٥,١٠)

نريد استخدام طريقة شبه المنحرف المركبة لحساب قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ بدقة 5×10^{-2}. هنا نحن نريد إيجاد قيمة تقريبية للتكامل المحدود بحيث إن $|I(f)-T_4(f)|\le 5\times10^{-2}$ أي أن:

$$|I(f)-T_n(f)|\le \frac{(b-a)h^2}{12}\max_{1\le x\le 2}|f''(x)|\le 5\times10^{-2}$$

وبما أن $\max_{1\le x\le 2}|f''(x)|=2$ فإنه يكون لدينا:

$$\frac{h^2}{12}(2)\le 5\times10^{-2}$$

ومنه نحصل على: $h \le 0.5477$ $\Rightarrow$ $h^2 \le 3\times10^{-1},$

وهذا يعني أنه إذا كان $h = 0.5$ ($n = 2$) فإننا نحصل على قيمة تقريبية للتكامل بالدقة المطلوبة. إذن يكون لدينا:

$$
\begin{aligned}
T_3(f) &= \frac{1/2}{2}[f(1) + 2f(\frac{3}{2}) + f(2)] \\
&= \frac{1}{4}[1 + 2\frac{2}{3} + \frac{1}{2}] \\
&= 0.7083
\end{aligned}
$$