الفصل الأول

مفاهيم أساسية

Basic Principles

(١,١) مفاهيم أساسية في التحليل ونظرية تايلور

Basic Principles in Analysis and Taylor Theorem

سوف نستعرض هنا بعض التعريفات والنظريات الأساسية في التحليل نبدأها بتعريف النهاية، الاتصال و التفاضل.

تعريف (١,١)

إذا كانت f دالة معرفة على المجموعة X من خط الأعداد الحقيقي، فإنه يقال إن للدالة f نهاية L عند العدد c، ونكتب $\lim_{x\to c} f(x) = L$ إذا كان لأي عدد موجب ε، يوجد عدد موجب δ بحيث إن $|f(x)-L|<\varepsilon$ لأجل $x\in X$ و $0<|x-c|<\delta$.

تعريف (١,٢)

لتكن f دالة معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية X و ليكن $c \in X$، فإنه يقال إن f دالة متصلة عند c إذا كان $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$. ويقال إن f دالة متصلة على المجموعة X إذا كانت متصلة عند كل عدد في X.

تعريف (١,٣)

لتكن f دالة معرفة في فترة مفتوحة تحتوي على c، فإنه يقال إن f دالة قابلة للتفاضل عند c إذا كانت النهاية:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \tag{1.1}$$

موجودة.

نظرية (١,١) (نظرية القيمة المتوسطة)

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$، و K أي عدد يقع بين $f(a)$ و $f(b)$. فإنه يوجد عدد c في (a,b) بحيث إن $f(c) = K$.

نظرية (١,٢) (نظرية رول)

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ وقابلة للتفاضل على الفترة المفتوحة (a,b). إذا كانت $f(a)=f(b)$ فإنه يوجد على الأقل عدد واحد c في (a,b) بحيث إن $f'(c)=0$.

نظرية (١,٣) (نظرية رول العامة)

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ ولتكن f قابلة للتفاضل n مرة على (a,b). إذا كان $f(x)=0$ عند الأعداد المتباينة $x_0,x_1,\dots,x_n$ والموجودة في $[a,b]$، فإنه يوجد عدد c في (a,b) بحيث إن: $f^{(n)}(c)=0$.

نظرية (١,٤) (نظرية القيم القصوى)

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$، فإنه يوجد عددين c_1 و c_2 في $[a,b]$ بحيث إن $f(c_1)\le f(x)\le f(c_2)$ لكل $x\in[a,b]$.

نظرية (١,٥) (نظرية القيمة المتوسطة للمجموع)

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$، ولتكن $x_1, x_2, ..., x_n$ تنتمي إلى الفترة $[a,b]$. إضافة إلى ذلك، لتكن $w_1, w_2, ..., w_n$ أعداداً حقيقية لها نفس الإشارة. فإنه، يوجد عدد c في $[a,b]$ بحيث إن:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j) = f(c) \sum_{j=1}^{n} w_j$$

نظرية (١,٦) (نظرية القيمة المتوسطة للتكامل)

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$، و $g(x)$ دالة قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$ وأن $g(x)$ لا تتغير إشارتها على هذه الفترة. فإنه يوجد عدد c في (a,b) بحيث إن:

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx \qquad (1.2)$$

نظرية (١,٧) (نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل)

لتكن $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[a,b]$، و f قابلة للتفاضل على (a,b). فإنه يوجد عدد c في (a,b) بحيث إن: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

نظرية (١,٨) (نظرية تايلور)

لتكن $f\in C^{n+1}[a,b]$، وأن x_0 عدد موجود في $[a,b]$. فإنه لكل $x\in[a,b]$ يوجد دالة $\xi(x)$ والتي تقع بين x_0 و x و تحقق:

$$f(x)=P_n(x)+R_{n+1}(x) \tag{1.3}$$

حيث إن:

$$P_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0). \tag{1.4}$$

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi(x)) \tag{1.5}$$

تسمى $P_n(x)$ كثيرة حدود تايلور من الدرجة n للدالة $f(x)$ حول العدد x_0. أما $R_{n+1}(x)$ فإنه يسمى الحد المتبقي المرتبط بكثيرة الحدود $P_n(x)$. المتسلسلة اللانهائية والتي يتم الحصول عليها بأخذ نهاية $P_n(x)$ عندما $n \to \infty$ تسمى متسلسلة تايلور للدالة $f(x)$ حول x_0. عندما $x_0 = 0$، فإنه يشار إلى كثيرة حدود ومتسلسلة تايلور بالاسمين كثيرة حدود ومتسلسلة ماكلورين، بالترتيب. نذكر هنا أن الحد المتبقي $R_{n+1}(x)$ يسمى أيضاً الخطأ المقطوع.

نظرية (١,٩) (نظرية تايلور بمتغيرين)

لتكن الدالة $f(x, y)$ متصلة تفاضلياً $n+1$ مرة لكل (x, y) في R، حيث R ترمز لجوار النقطة (x_0, y_0) في المستوى xy. فإنه لكل $(x, y) \in R$ يوجد نقطة (ξ, η) على المستقيم الواصل بين النقطتين (x, y) و (x_0, y_0) وتحقق:

$$f(x, y) = P_n(x, y) + R_{n+1}(x, y)$$

حيث إن:

$$P_n(x,y) = f(x_0,y_0) + [(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)]$$

$$+\frac{1}{2!}[(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$$

$$+(y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)] + \cdots$$

$$+\frac{1}{n!}[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(x-x_0)^{n-i}(y-y_0)^i\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i}\partial y^i}(x_0,y_0)]$$

و

$$R_{n+1}(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}[\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}(x-x_0)^{n+1-i}(y-y_0)^i\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-i}\partial y^i}(\xi,\eta)]$$

(١,٢) الحسابات وأخطاء التدوير
Computations and Rounding Errors

مثال (١,٣)

للعدد $\frac{17}{3}$ تمثيل لا نهائي من الأرقام العشرية

$$\frac{17}{3} = 5.66666... = 0.56666\times10^1$$

وبوضع $t = 5$، فإن التمثيل المقطوع للعدد هو:

$$fl(\frac{17}{3}) = 0.56666\times10^1 = 5.6666$$

لكتابة التمثيل المدور لهذا العدد فإننا نضيف 5 إلى الرقم السادس، $5+6$. ومن ثم حذف الأرقام العشرية التي تقع بعد الرقم الخامس. إذن يكون لدينا:

$$fl(\frac{17}{3}) = 0.56667\times10^1 = 5.6667$$

نشير هنا إلى أن الخطأ الناتج من استبدال العدد بالتمثيل المقطوع أو المدور يسمى خطأ التدوير.

تعريف (١,٤)

لتكن x^* قيمة تقريبية للعدد x، فإن المقدار $|x-x^*|$ يسمى الخطأ المطلق والمقدار $\frac{|x-x^*|}{|x|}$ يسمى الخطأ النسبي.

مثال (١,٥)

احسب الأخطاء المطلقة و النسبية لكل مما يلي:

(أ) $x = 0.200\times10^1$ و $x^* = 0.210\times10^1$. الخطأ المطلق هو 0.1 والخطأ النسبي هو 0.5×10^{-1}.

(ب) $x = 0.200\times10^{-3}$ و $x^* = 0.210\times10^{-3}$. الخطأ المطلق هو 0.1×10^{-4} و الخطأ النسبي هو 0.5×10^{-1}.

(جـ) $x = 0.200\times10^3$ و $x^* = 0.210\times10^3$. الخطأ المطلق هو 0.1×10^2 و الخطأ النسبي هو 0.5×10^{-1}.

يتضح من هذا المثال أن الخطأ المطلق يعتمد على حجم العدد x وهذا يعني أنه لا يكون مقياساً عملياً. من ناحية أُخرى، يمكننا ملاحظة أن الخطأ النسبي مستقل عن حجم x وبالتالي يكون من الأنسب استخدام الخطأ النسبي لقياس الأخطاء.

من المعروف أنه في الحالات العملية لا نعرف القيمة الفعلية للعدد الحقيقي x، و بالتالي فإن الخطأ يكون غير معروف. بشكلٍ عام، فإننا نكتفي بحدٍ أعلى للخطأ.

تعريف (١,٥)

يقال إن العدد x^* هو تقريب للعدد x حتى t رقم معنوي إذا كان t هو أكبر عدد غير سالب يحقق المتباينة التالية:

$$\frac{|x-x^*|}{|x|} \le 5\times 10^{-t}$$

تعريف (١,٦)

لتكن $\{x_n\}_0^\infty$ متتالية من الأعداد الحقيقية. يقال إن هذه المتتالية تتقارب إلى العدد α، ونكتب:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \tag{1.14}$$

إذا كان لكل عدد حقيقي موجب ε يوجد عدد حقيقي $r>0$ بحيث إن $|x_n-\alpha|<\varepsilon$ طالما كان $n>r$. هنا n عدد صحيح موجب.