المتتابعات غير المنتهية Infinite Sequences

ندرس في هذا الفصل المتتابعات غير المنتهية ، والتي هي دوال حقيقية نطاقها مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة ومجالها مجموعة الأعداد الحقيقية .

تعريف

نعرف المتتابعة غير المنتهية بأنها دالة نطاقها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة (أو مجموعة جزئية منها) ومجالها مجموعة الأعداد الحقيقية، أي $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

وبشكل عام إذا كانت $n \geq 1 , f(n) = a_n$ فإن مجموعة الأعداد المرتبة $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ تعرف المتتابعة تعريفا تاما. وكنتيجة لذلك فإننا لن نستخدم رمز الدالة للدلالة على المتتابعة وندل على المتتابعة بصورها. فعند كتابتنا $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ نقصد المتتابعة f بحيث أن $f(n) = a_n, \quad \forall n \geq 1$. بالمثل ، إذا كانت $f(n) = a_n$ لكل $n \geq m$ فإننا نكتب $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ للدلالة على المتتابعة.

إن المتتابعة $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ مقرونة بالأعداد الصحيحة $1,2,3,\dots$ فإننا نسمي a_1 الحد الأول و a_2 الحد الثاني و a_n الحد النوني.

مثال1

أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة $\left\{(\frac{1}{2})^n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

الحل:

$a_5 = \frac{1}{32},\ a_4 = \frac{1}{16},\ a_3 = \frac{1}{8},\ a_2 = \frac{1}{4},\ a_1 = \frac{1}{2}$.

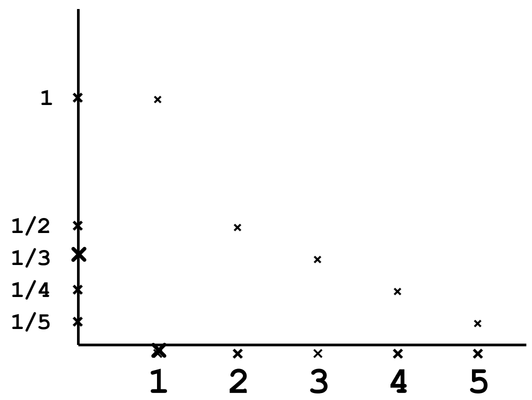
بعض المتتابعات تعطى بما يسمى بالصيغ الاختزالية، أي تعطى قيمة للحد الأول a_1 ، مع قاعدة نحصل منها على الحد a_{n+1} من الحد a_n الذي يسبقه مباشرة في الترتيب. يقال لمثل هذه المتتابعات أنها معرفة اختزالياً.

مثال2

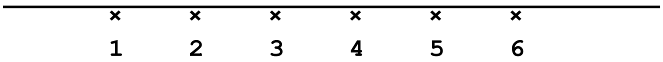
إذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة فيها $a_1 = 1$، و $a_n = 3a_{n-1} - 1$ لكل $n \geq 1$. أوجد a_2, a_3, a_4.

الحل:

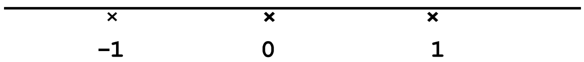
بوضع $n = 2$ في الصيغ الاختزالية $a_n = 3a_{n-1} - 1$ نحصل على $a_2 = 3a_1 - 1$ وبالتعويض بقيمة a_1 نحصل $a_2 = 2$ بالمثل $a_3 = 5$ و $a_4 = 9$.



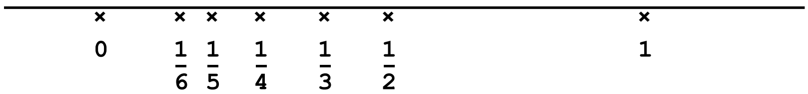
إن التمثيل الأكثر ملائمة هو أن تمثل المتتابعة على خط الأعداد الحقيقية. هذا النوع من التمثيل يوضح لنا إلى أين "تسعى" المتتابعة. فالمتتابعة $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ "تسعى" إلى مالانهاية، والمتتابعة $\left\{(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ تتذبذب بين -1 و 1 ، بينما المتتابعة $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ " تقترب" من الصفر.



$$\{n\}_{n=1}^{\infty}$$



$$\left\{(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$$



$$\left\{a_n = \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

المتتابعات المتقاربة Convergent Sequences

تعريف 1

يقال أن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة وتتقارب من العدد الحقيقي L، إذا كان لأي فترة مفتوحة مركزها L ونصف قطرها ε،حيث $\varepsilon > 0$، يوجد عدد N بحيث أن $a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ لكل $n > N$. أي أن جميع حدود المتتابعة محتواة في الفترة باستثناء عدد منته من حدودها.

تعريف 2

يقال أن نهاية المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ هو العدد الحقيقي L ، إذا وجد لكل عدد حقيقي $\varepsilon > 0$.عدد N بحيث أن $|a_n - L| < \varepsilon$ لكل $n > N$ ، ونكتب هذا $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

إذا وجد العدد L فإنه يقال أن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة (أو أنها تتقارب من العدد L)، وإذا لم يوجد العدد L فإنه يقال أن المتتابعة متباعدة.

مثال 3

باستخدام تعريف النهاية ، اثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$.

الحل:

سنثبت أنه لأي $\varepsilon > 0$ يوجد عدد N بحيث لكل $n > N$ فإن $\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ ، لأي $\varepsilon > 0$.

$$\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n-2n-1}{2(2n+1)} \right| = \left| \frac{-1}{2(2n+1)} \right| < \varepsilon$$

وبالتالي فإن $\frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon$

أي أن $\frac{1}{2n+1} < 2\varepsilon$ وهذا يؤدي إلى أن $n > \frac{1}{2}(\frac{1}{2\varepsilon} - 1)$

لنأخذ N بحيث أن $N \geq \frac{1}{2}(\frac{1}{2\varepsilon} - 1)$ ، ومنه لكل $n > N$ فإن $\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$.

أي أن $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$.

مثال4

اثبت أن المتتابعة $\left\{ (-1)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ متباعدة.

الحل:

نفرض أن المتتابعة تتقارب من L ، إذا كان $L \geq 0$ فإن $|-1-L| \geq 1$ ، وإذا كان $L \leq 0$ فإن $|1-L| \geq 1$ ، ومنه لأي $0 < \varepsilon \leq 1$ لا يوجد L بحيث $|a_n - L| < \varepsilon$ لكل $n > N$ ، أي المتتابعة متباعدة.

مبرهنة1

إذا كانت المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة، فإن نهايتها وحيدة.

مبرهنة2

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة، وليكن L عددا حقيقيا و f دالة معرفة على الفترة $[1,\infty)$،حيث $f(n) = a_n$ لكل $n \geq 1$.

i) إذا كانت $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ فإن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة و $\lim_{n\to\infty} f(n) = L$.

ii) إذا كانت $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (أو $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$) فإن المتتابعة متباعدة و $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ (أو $\lim_{n\to\infty} f(n) = -\infty$). أي $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{x\to\infty} f(x)$.

مثال5

حدد ما إذا كانت المتتابعة $\left\{ n \sin \frac{\pi}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة أم متباعدة.

الحل:

ضع $f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{x}$ لكل $x\geq 1$ ، بالتالي فإن $f(n)=n\sin\dfrac{\pi}{n}$ لكل $n\geq 1$. وبما أن

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{\pi}{x}=\lim_{x\to\infty}\pi\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}=\pi\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}=\pi$$

فإن $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{\pi}{n}=\pi$.أي أن المتتابعة متقاربة.

مثال6

اثبت أن $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

الحل:

ضع $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ لكل $x\geq 1$ ، ومنه فإن $f(n)=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ لكل $n\geq 1$.

بأخذ لوغاريتم الطرفين للعلاقة نحصل على $\ln f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

ومنه فإن $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

بتطبيق قاعدة لوبيتال نحصل على $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$

وبالتالي فإن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=e$ ، ومنه نجد أن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$.

مثال7

احسب $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

الحل:

ضع $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ لكل $x\geq 1$ ،ومنه فإن $f(n)=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ لكل $n\geq 1$. لإيجاد النهاية نضرب بالمرافق كما يلي

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=0$$

وبالتالي فإن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$.

مبرهنة3

إذا كان r عددا حقيقيا، فإن المتتابعة $\left\{r^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة لكل r حيث أن $|r|<1$ و $r=1$ أي أن

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 1 & ; \ r=1 \\ 0 & ; \ |r|<1 \end{cases}$$

ومتباعدة لكل r حيث أن $|r|>1$ و $r=-1$ كما أن $\lim_{n\to\infty}\left|r^n\right|=\infty$.

المتتابعة $\left\{r^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ تسمى **المتتابعة الهندسية** ، ويعود ذلك لكون r^n هو الوسط الهندسي للعددين r^{n-1} و r^{n+1} .

مثال8

حدد أي من المتتابعات التالية متقاربة وأيها متباعدة

(i) $\left\{(1.05)^{n+1}\right\}$ (ii) $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$.

الحل:

(i) بما أن $|r|=1.05>1$ ، فمن نظرية نستنتج كذلك أن المتتابعة متباعدة.

(ii) بما أن $|r|=\frac{1}{2}<1$ ، فمن نظرية نستنتج أن المتتابعة متقاربة.

خواص التقارب للمتتابعات

مبرهنة4

(ا) المتتابعة الثابتة $\{c\}_{n=1}^{\infty}$ ، لها النهاية c .

(ب) $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n$.

(ج) $\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$.

(د) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$.

(هـ) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ ، شريطة أن $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ و $b_n \neq 0$ لكل n.

مثال9

احسب نهاية المتتابعة $\left\{\dfrac{3n^2-2n+7}{5n^2+4}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

الحل:

لإيجاد $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ، حيث $a_n=\dfrac{3n^2-2n+7}{5n^2+4}$، نقسم بسط ومقام a_n على n^2 ونستخدم المبرهنة لنحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+7}{5n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}}{5+\frac{4}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}}$$

$$=\frac{3-0-0}{5+0}=\frac{3}{5}$$

مبرهنة5

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة. إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$ ، فإن $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

مثال10

إذا كان $a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ ، فاثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

الحل:

بما أن $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

فمن المبرهنة ، يقتضي أن $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

ملاحظة: إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|\neq 0$ ، فإن المبرهنة قد لا تكون صحيحة. فمثلا نهاية المتتابعة $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ غير موجودة، بينما $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n|=1$.

مبرهنة 6 (نظرية الحصر)

إذا كانت $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ متتابعات وكانت $b_n\le c_n\le a_n$ لكل n وإذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=L$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=L$.

مثال11

اثبت أن المتتابعة $\left\{\dfrac{\sin n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

نعلم أن $0 \le |\sin n| \le 1$ وحيث أن مضروب n أكبر من الصفر، فإن بالقسمة على $n!$ نجد أن

$$0 \le \left|\frac{\sin n}{n!}\right| \le \frac{1}{n!}$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$. فإنه من المبرهنة $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\sin n}{n!}\right| = 0$ ، ونجد أن $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n!} = 0$. أي أن المتتابعة متقاربة ونهايتها الصفر.

المتتابعات المحدودة والمضطردة

تعريف3

يقال أن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة (Bounded) ، إذا وجد عدد حقيقي M موجب بحيث أن $|a_n| \le M$ لكل $n \ge 1$، وفيما سوى ذلك، يقال أن المتتابعة غير محدودة (Unbounded).

مثال12

اثبت أن المتتابعتين (i) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (ii) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودتان.

الحل:

(i) بما أن $n < n+1$ لكل $n \ge 1$ ، فإن $\left|\frac{n}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} < 1$. وحينئذ $\left|\frac{n}{n+1}\right| < M$ لأي عدد حقيقي موجب $M \ge 1$. أي أن المتتابعة محدودة.

(ii) $|(-1)^n| = 1$، ومنه $|(-1)^n| \le M$ لأي عدد حقيقي موجب $M \ge 1$. أي أن المتتابعة محدودة.

مبرهنة 7

(ا) إذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة متقاربة، فإنها محدودة.

(ب) إذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة غير محدودة، فإنها متباعدة.

تعريف4

يقال أن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

(i) متزايدة (Increasing) إذا كان $a_n \le a_{n+1}$ لكل $n \ge 1$.

(ii) متناقصة (Decreasing) إذا كان $a_n \ge a_{n+1}$ لكل $n \ge 1$.

ويقال أن المتتابعة مضطردة، إذا كانت متزايدة أو متناقصة.

ثال13

اثبت أن المتتابعة $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}_{n=3}^{\infty}$ متزايدة.

الحل:

نعرف $f(x)=1-\frac{1}{x}$ لكل $x\geq 3$، ومنه فإن $f(n)=1-\frac{1}{n}$ لكل $n\geq 3$. نجد المشتقة الأولى $f'(x)=\frac{1}{x^2}$، وبما أن $x^2>0$ و $x\geq 3$، فإن $f'(x)=\frac{1}{x^2}>0$. أي أن f دالة متزايدة. وهذا يقتضي أن المتتابعة متزايدة.

تعريف5

لتكن A مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.

(ا) يقال أن المجموعة A محدودة من أعلى (Bounded above) إذا وجد عدد حقيقي M بحيث أن $x\leq M$ لكل x في A. يسمى أي عدد M حد علوي (Upper bound) للمجموعة A.

(ب) يقال أن المجموعة A محدودة من أسفل (Bounded below) إذا وجد عدد حقيقي m بحيث أن $x\geq m$ لكل x في A يسمى أي عدد m حد سفلي(Lower bound) للمجموعة A.

(جـ) يقال أن المجموعة A محدودة (Bounded) إذا كانت محدودة من أعلى ومن أسفل.

مبرهنة8

إذا كانت المتتابعة محدودة ومضطردة فإنها متقاربة.

مثال14

ليكن

$$a_1=\sqrt{2}\text{،}a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}\text{، }a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\text{،}\cdots$$

وبشكل عام

$$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$$

(ا) اثبت أن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة محدودة ومتزايدة.

(**ب**) اثبت أن المتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب من عدد r.

(**جـ**) استخدم فرع (ب) مع كون $a_{n+1}^2=2+a_n$ لإثبات أن $r=2$

الحل:

(ا) لإثبات أنها محدودة نلاحظ من تعريف المتتابعة أن $a_n\leq 2$ ولإثبات ذلك نستخدم الاستقراء الرياضي:

عندما $n=1$ فإن $a_1=\sqrt{2}<2$، وعندما $n=2$ فإن $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}<2$. نفرض أنها صحيحة عندما $n=k-1$ ونثبت أنها صحيحة عندما $n=k$. أي نفرض أن $a_{k-1}\leq 2$. بما أن

$$a_k=\sqrt{2+a_{k-1}}$$

فإن $a_k{}^2=2+a_{k-1}\leq 4$ لكن $a_k>0$ لذلك $a_k\leq 2$.

نثبت الآن أن المتتابعة متزايدة. بما أن $a_n \le 2$ فإن $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \ge a_n$ إذن المتتابعة متزايدة.

(ب) من (ا) وجدنا أن المتتابعة محدودة من أعلى، بالتالي فإن لها أصغر حد علوي وليكن r . ووفقا للمبرهنة فإن المتتابعة تتقارب من r.

(جـ) من المبرهنة

$$\lim_{n\to\infty} 2 + a_n = 2 + r \qquad (1)$$

ومن فرع (د) من نفس المبرهنة لدينا

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = r^2 \qquad (2)$$

من العلاقة $a_{n+1}^2 = 2 + a_n$ ومن (1) وكذلك (2) نحصل على

$$r^2 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} 2 + a_n = 2 + r$$

أي أن $r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) = 0$ ومنه فإن، $r = -1$ أو $r = 2$ ، وبما أن $r > 0$. لذلك فإن $r = 2$.