باب 1

المصفوفات

1.1 المصفوفات والعمليات عليها

تعريف 1.1.1
المصفوفة هي عبارة عن جدول من الأعداد الحقيقية ، ويسمى كل سطر من عناصر المصفوفة صفا (row) ويسمى كل عمود من عناصر المصفوفة عمودا (column).
إذا كانت $(a_{j,k})$ هي عناصر المصفوفة A فإننا نكتب

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

ونقول أن المصفوفة A هي من الدرجة (m, n) حيث m هو عدد الصفوف و n هو عدد الأعمدة.

ملاحظات 1.1.1

1. في بعض الأحيان نرمز الصيغة المختزلة
$A = (a_{j,k})$ لكتابة المصفوفة.

2. المصفوفة الصفية هي المصفوفة المكونة من صف واحد أي من الدرجة $(1, n)$ و في بعض الأحيان تسمى المصفوفة متجه صفي.

3. المصفوفة العمودية هي المصفوفة المكونة من عمود واحد (أي من الدرجة $(n, 1)$) و في بعض الأحيان تسمى المصفوفة متجه عمودي.

4. المصفوفة الصفرية هي المصفوفة التي جميع عناصرها اصفار ويرمز لها بالرمز (0).

5. مصفوفة الوحدة هي المصفوفة المربعة التي عناصرها القطرية تساوي واحد وبقية العناصر كلها اصفار ويرمز لها بالرمز I_n إذا كانت من الدرجة (n, n).

6. المصفوفة القطرية هي المصفوفة المربعة و جميع عناصرها أصفارا ما عدا العناصر الواقعة على القطر فيكون أحدها على الأقل مغايراً للصفر مثال $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

7. نقول أن مصفوفة مربعة أنها مثلثية علوية إذا كان كل عناصرها التي تقع أسفل القطر أصفارا. و نقول أن مصفوفة مربعة أنها مثلثية سفلوية إذا كان كل عناصرها التي تقع أعلى القطر أصفارا.

1.2 العمليات على المصفوفات

1. الجمع
2. الضرب بعدد حقيقي

تعريف 1.2.1
لتكن $A = (a_{j,k})$ مصفوفة من الدرجة (m, n). يعرف منقول المصفوفة A المصفوفة من الدرجة (n, m) والتي نحصل عليها من A بحيث تكون صفوفها هي أعمدة A على التوالي. و نرمز بها A^T.

تعريف 1.2.2
نقول أن مصفوفة مربعة أنها متماثلة إذا كان $A = A^T$.

مبرهنة 1.2.1
إذا كانت $A = (a_{j,k})$ و $B = (b_{j,k})$ مصفوفات من الدرجة (m, n) فإن

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(kA)^T = kA^T$.
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$.

تعريف 1.2.3
إذا كانت $A = (a_1, \ldots, a_n)$ متجها صفيا و $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ متجها عموديا. فنعرف الضرب الداخلي الإقليدي للمتجهين A و B على النحو التالي

$$AB = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

تعريف 1.2.4
إذا كانت $A = (a_{j,k})$ مصفوفة من الدرجة (m, n) و $B = (b_{j,k})$ مصفوفة من الدرجة (n, p) فإن $AB = (c_{j,k})$ مصفوفة من الدرجة (m, p) حيث $c_{j,k}$ هو نتيجة الضرب الإقليدي للصف j من A مع العمود k من B.

$$c_{j,k} = \sum_{i=1}^{n} a_{j,i} b_{k,i}.$$

ملاحظة 1.2.1

$(AB)^T = B^T A^T$.

1.3 العمليات الصفية الأولية

العمليات الأولية على الصفوف هي

1. تغيير ترتيب صفين من المصفوفة
2. ضرف صف بعدد غير صفري
3. ضرب صف بعدد و إضافة الناتج إلى صف آخر.

تعريف 1.3.1
نقول أن مصفوفتين متكافئتين صفيا إذا حصلنا على إحداها من الأخرى بعد إجراء عدد منته من العمليات الأولية على الصفوف. و نكتب $A \sim B$.
نستخدم الرموز التالية

1. $R_{j,k}$ وتعني تبادل الصفين j و k.
2. rR_j و تعني ضرب الصف j بالعدد r.
3. $rR_{j,k}$ و تعني ضرب الصف j بالعدد r و إضافة الناتج للصف k.

تعريف 1.3.2
نقول أن مصفوفة A هي على صيغة درجية صفية
(row echelon form) إذا تحققت الشروط التالية
1) كل صف غير صفري يكون أول عنصر غير صفري هو 1 و يسمى العنصر المتقدم.
2) الصفوف الصفرية إن وجدت تكون في آخر المصفوفة.
3) إذا وجد صفان غير صفريان فإن العنصر المتقدم في الصف الأعلى يكون على يسار العنصر المتقدم في الصف الأسفل.

تعريف 1.3.3
نقول أن مصفوفة A هي على صيغة درجية صفية مختزلة
(reduced row echelon form) إذا تحققت الشروط التالية

1. A على صيغة درجية صفية
2. جميع عناصر الأعمدة التي تحوي على عنصر متقد أصفارا باستثناء العنصر المتقدم.

مثال 1.3.1

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)R_{1,2}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{1,2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-2)R_{1,2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 8 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2R_{1,3},3R_{1,4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & -6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{2,3},1R_{2,4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{7R_{2,3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 7 & 38 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{3,4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 7 & 38 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-4R_{3,4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -41 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_3,\frac{-1}{41}R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{26}{41} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2R_{2,1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 15 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{26}{41} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2R_{3,1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{26}{41} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-9R_{4,1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{53}{41} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{26}{41} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{11R_{4,2},3R_{4,3},} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{53}{41} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{40}{41} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{33}{82} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{26}{41} \end{pmatrix}$$

1.4 معكوس المصفوفة

تعريف 1.4.1
نقول أن مصفوفة A من الدرجة n لها معكوس إذا وجدت مصفوفة B من الدرجة n بحيث $AB = BA = I_n$.
ونرمز A^{-1} معكوس المصفوفة A.

مبرهنة 1.4.1

1. معكوس المصفوفة إذا وجد فهو وحيد.
2. معكوس المصفوفة I_n هي I_n.
3. إذا كان للمصفوفة A معكوس فإن A هي معكوس المصفوفة A^{-1}. $(A^{-1})^{-1} = A$.
4. إذا كان للمصفوفة A و B معكوس فإن. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
5. إذا كان للمصفوفات $A_1, \ldots, A_k$ معكوس فإن المصفوفة $A_1.\ldots.A_k$ لها معكوس و
$$(A_1.\ldots.A_k)^{-1} = A_k^{-1}.\ldots.A_1 1^{-1}.$$
6. إذا كان للمصفوفة A معكوس و $r \neq 0$ فإن rA لها معكوس و $(rA)^{-1} = \frac{1}{r}A^{-1}$.
7. إذا كان للمصفوفة A معكوس فإن A^T لها معكوس و $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

تعريف 1.4.2
نقول أن مصفوفة E من الدرجة n هي مصفوفة أولية إذا حصلنا عليها من مصفوفة الوحددة I_n بإجراء عملية واحدة من العمليات الصفية.

مثال 1.4.1
لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ و لتكن المصفوفة الأولية $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ والتي نتحصل عليها بإجراء تبديل الصفين الثاني والثالث من مصفوفة الوحددة I_3. نلاحظ أن $R_{2,3}A = EA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

كذلك إذا كانت المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ و لتكن المصفوفة الأولية $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
والتي نتحصل عليها بإجراء $5R_{1,3}$ على مصفوفة الوحددة I_3. نلاحظ أن $5R_{1,3}A = EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 14 & 15 \end{pmatrix}$.

و بصورة عامة لدينا

مبرهنة 1.4.2
إذا كانت مصفوفة A من الدرجة (m,n) و كانت E المصفوفة الأولية التي نحصل عليها من I_m باحدى العمليات الصفية الأولية فإن المصفوفة EA هي المصفوفة التي نتحصل عليها من A بإجراء العملية الصفية الأولىية نفسها.

مبرهنة 1.4.3
إذا كانت E مصفوفة أولية فإن E لها معكوس ومعكوسها مصفوفة أولية.

مبرهنة 1.4.4
إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن العبارات التالية متكافئة

1. المصفوفة A لها معكوس.
2. الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A هي I_n.
3. يمكن كتابة A كحاصل ضرب عدد منته من المصفوفات الأولية.

ملاحظة 1.4.1 (خوارزمية)
إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n

1. استخدم العمليات الأولية الصفية لتحويل المصفوفة $[A|I]$ إلى صيغة درجية صفية مختزلة $[B|C]$
2. إذا كانت $B = I_n$ فإن $C = A^{-1}$.
3. إذا كانت $B \neq I_n$ فإنه لا يوجد معكوس للمصفوفة A.

مثال 1.4.2
أوجد معكوس المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_{1,2},R_{2,3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_{1,2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-1)R_{2,3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2R_2,2R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-1)R_{3,1},2R_{3,2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال 1.4.3

أوجد معكوس المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-1)R_{1,4}]{(-2)R_{1,2},(-3)R_{1,3}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-1)R_4]{(-1)R_2,(-1)R_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 12 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-2)R_{2,3}]{(-1)R_{4,2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-2)R_{2,4}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-2)R_{3,4}]{(1)R_{3,2},-1R_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_{3,4}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-1)R_{4,1}]{(-3)R_{2,1},(-2)R_{3,1}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

1.5 تمارين في الباب الأول

تمرين 1 :
أوجد الصيغة الدرجة الصفية المختزلة للمصفوفات التالية

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

تمرين 2 :
لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.
هل توجد مصفوفة X بحيث $XA = B$؟

1.6 إصلاح تمارين الباب الأول

حل التمرين 1:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{1,2}, 3R_{1,2}, (-1)R_{1,4}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & -11 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-4)R_{2,4}]{R_{2,3}, (-1)R_2, (11)R_{2,3}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 29 & -12 \\ 0 & 0 & -9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_{3,4}, (-2)R_{3,4}]{3R_{4,3}, 5R_{3,4}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -37 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(\frac{1}{-37})R_4]{4R_{2,1}, (-2)R_{3,2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -41 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[5R_{4,1}]{(41)R_{4,2}, (-20)R_{4,3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\xrightarrow{(-10)R_{3,1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$