المتسلسلات غير المنتهية Infinite Series

تعريف1

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة. يسمى التركيب $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots$ (*)

متسلسلة غير منتهية (أو متسلسلة)، وباستخدام رمز المجموع نكتب (*) على الصيغة

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{أو} \quad \sum a_n$$

كل عدد a_k يسمى حدا للمتسلسلة، كما يسمى a_n الحد النوني أو الحد العام للمتسلسلة.

نقدم الآن نوعا خاصا من المتتابعات التي نحصل عليها باستخدام حدود المتسلسلة. من المتتابعة

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

نكون متتابعة جديدة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ وذلك بجمع العناصر المتعاقبة للمتتابعة $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
$$\vdots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

المتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ التي حصلنا عليها بهذه الطريقة تسمى **متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة.**

تعريف2

(i) نعرف المجموع الجزئي النوني s_n للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بأنه $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$

(ii) نعرف متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بأنها المتتابعة $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$

ملاحظة : من التعريف $s_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1}$

ومنه $s_n = s_{n-1} + a_n$.

مثال1

أوجد المتسلسلة التي متتابعة المجاميع الجزئية لها هي $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$

الحل:

بما أن $s_1 = \frac{1}{2}$ فإن $a_1 = \frac{1}{2}$. إذا كان $n > 1$ فإن

$$a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} = -\frac{1}{2^n}$$

كذلك فإن المتسلسلة هي: $\frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)$

مثال2

من المتتابعة $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}_1^{\infty}$ كون متتابعة المجاميع الجزئية ثم اكتب المتسلسلة.

الحل:

$$s_1 = 1\ s_2 = 1+\tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}$$
$$s_3 = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4} = \tfrac{7}{3}$$
$$s_4 = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8} = \tfrac{15}{8}$$
$$\vdots$$
$$s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

وهي متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ \cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$

مثال3

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ متسلسلة

(ا) أوجد الحدود الأربعة الأولى لمتتابعة المجاميع الجزئية $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(**ب**) أوجد صيغة جبرية للحد النوني s_n بدلالة n.

الحل:

(ا) $s_1 = a_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$, $s_2 = s_1 + a_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2.3} = \frac{2}{3}$,

$s_3 = s_2 + a_3 = \frac{2}{3}+\frac{1}{3.4} = \frac{3}{4}$, $s_4 = s_3 + a_4 = \frac{3}{4}+\frac{1}{4.5} = \frac{4}{5}$.

(**ب**) بما أن $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$، فإنه باستخدام الكسور الجزئية نحصل على: $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

وبالتالي فإن

$$a_1 = 1-\frac{1}{2}\ \text{،}\ a_2 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\ \text{،}\ a_3 = \frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdots\ a_{n-1} = \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\ \text{،}\ a_n = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

ومن هنا نجد أن

$$s_n = (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\ \cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

بعد إزالة الأقواس والاختصار نحصل على: $s_n = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

ملاحظة: الطريقة التي اتبعناها في المثال السابق تطبق فقط للحالات الخاصة. وبصفة عامة فإنه يتعذر إيجاد صيغة جبرية عامة للحد النوني s_n . إذا كان للمتتابعة $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ نهاية فإنها تسمى مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

مثال4

اثبت أن المتسلسلة التالية متقاربة وأن مجموعها 2 .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+ \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$$

الحل:

إن متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة هي $\{s_n\}$ ، حيث

$$s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+ \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$s_n = 1+\frac{1}{2}\left(s_n - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1+\frac{s_n}{2}-\frac{1}{2^n}$$

$$s_n = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

وبما أن $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ ، فإن $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 2$. أي أن المتسلسلة متقاربة ومجموعها 2 .

مثال5

اثبت أن المتسلسلة التالية متباعدة: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+ \cdots + \frac{1}{n}+\cdots$

الحل:

نعيد كتابة المتسلسلة بتجميع حدودها كما يلي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16})+(\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{32})+\cdots$$

لاحظ أن عدد حدود كل قوس ضعف عدد حدود القوس الذي يسبقه مباشرة. بما أن مجموع حدود كل قوس أكبر من $\frac{1}{2}$ ، فإننا نحصل على المتراجحات التالية:

$$s_2 = s_{2^1} = 1+\frac{1}{2} > 2(\frac{1}{2})$$

$$s_4 = s_{2^2} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} > 3(\frac{1}{2})$$

$$s_8 = s_{2^3} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} > 4(\frac{1}{2})$$

وباستخدام الاستقراء الرياضي، يمكن إثبات أن: $s_{2^k} > (1+k)\frac{1}{2}$ لكل عدد صحيح موجب k .

وهذا يقتضي أن: $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2^k} > \lim\limits_{n\to\infty} (1+k)\frac{1}{2}$ لكن $\lim\limits_{n\to\infty} (1+k)\frac{1}{2} = \infty$ ولذلك $\lim\limits_{k\to\infty} s_{2^k} = \infty$

أي أن $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ ولهذا فالمتتابعة $\{s_n\}$ متباعدة، وبالتالي المتسلسلة متباعدة.

تسمى هذه المتسلسلة **بالمتسلسلة التوافقية** (Harmonic series).

المتسلسلات الهندسية (Geometric series)

المتسلسلة الهندسية هي المتسلسلة التي تأخذ الصيغة

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^{n} = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^{2} + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

حيث أن a و r أعداد حقيقية و $a \neq 0$. (اكتسبت المتسلسلات الهندسية اسمها من كون ar^{n} المتوسط الهندسي للعددين (ar^{n-1} و ar^{n+1}). المتسلسلة في مثال4 متسلسلة هندسية، حيث $a = 1\ ,\ r = \frac{1}{2}$.

تقارب المتسلسلات الهندسية يعتمد كليا على اختيار r كما سنرى في المبرهنة التالية:

مبرهنة1 (نظرية المتسلسلات الهندسية)

ليكن a و r عددين حقيقيين و $a \neq 0$. المتسلسلة الهندسية

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^{2} + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

متقاربة ومجموعها $\frac{a}{1-r}$ لكل r ، حيث$0 1 > |r|$، ومتباعدة لكل r ، حيث$|r| \geq 1$.

مثال6

اثبت أن المتسلسلة التالية متقاربة وأوجد مجموعها:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^{2}} + \cdots + \frac{2}{3^{n-1}} + \cdots$$

الحل:

المتسلسلة هندسية حيث $r = \frac{1}{3} < 1$ و $a = 2$، من النظرية نستنتج أن المتسلسلة متقاربة ومجموعها $S = \frac{2}{1 - 1/3} = 3$.

مبرهنة2 (**اختبار للتباعد**)

(ا) **إذا كانت المتسلسلة** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **متقاربة ، فإن** $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(ب) **إذا كانت** $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ **أو غير موجودة ، فإن المتسلسلة متباعدة.**

المتسلسلة	النهاية	الاستنتاج
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+5}$	$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+5}=\frac{1}{3}\neq 0$	متباعدة، وفقا لمبرهنة2 اختبار التباعد.
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$	$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$	لا نستطيع تحديد تقارب أو تباعد المتسلسلة.
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$	لا نستطيع تحديد تقارب أو تباعد المتسلسلة.
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n}$	$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n}=\infty$	متباعدة، وفقا لمبرهنة 2اختبار التباعد.

تحصيل المتسلسلات (Combinations of series)

مبرهنة3

(أ) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متسلسلتين متقاربتين مجموعهما T و R على الترتيب، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)$ متقاربة أيضا، كما أن

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=T+R$$

(ب) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متسلسلة متقاربة و c عددا حقيقيا ، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n$ متقاربة، كما أن

$$\sum_{n=1}^{\infty}ca_n=c\sum_{n=1}^{\infty}a_n=cT$$

(ج) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ كما في (أ) ، فإن $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-b_n\right)$ متقاربة وأن

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-b_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=T-R$$

(د) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متسلسلة متباعدة و c عددا حقيقيا ، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n$ متباعدة.

مثال7

اثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{2^n}-\frac{3}{n(n+1)}\right)$ متقاربة، ثم احسب مجموعها.

الحل:

من مبرهنة المتسلسلات الهندسية فإن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2^n}=\frac{4(1/2)}{1-1/2}=4$

من المبرهنة 3 (ب) ومثال نجد أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=3$

من المبرهنة (جـ) نحصل على $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{2^n}-\frac{3}{n(n+1)})=4-3=1$

مبرهنة4

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلتين تختلفان قي الحدود الأولى التي عددها m حدا فقط (أي أن $a_k = b_k$ لكل $k>m$) فإما أن المتسلسلتين متقاربتان أو أنهما متباعدتان.

مثال8

حدد ما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+4}$ متقاربة أو متباعدة.

الحل:

المتسلسلة المعطاة هي $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+4}=0+0+0+0+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{n+4}+\cdots$

وبمقارنتها بالمتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

نلاحظ أن المتسلسلتين تختلفان في الحدود الأربعة الأولى. من المبرهنة وبما أن المتسلسلة التوافقية متباعدة، فإن المتسلسلة المعطاة متباعدة.

مبرهنة5

لكل عدد صحيح موجب k فإن المتسلسلتين

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad \text{و} \quad \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_n + \cdots$$

تكونان متقاربتين معا أو متباعدتين معا. وأيضا إذا كانت المتسلسلتان متقاربتين فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

مثال9

اثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة وأوجد مجموعها.

الحل:

يمكن الحصول على المتسلسلة المعطاة من المتسلسلة المتداخلة في مثال (5) وذلك بحذف الحدود الثلاث الأولى. بما أن المتسلسلة المتداخلة متقاربة ومجموعها 1، فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة ومجموعها

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{4}$$

مبرهنة6

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ متباعدة.

مثال10

حدد ما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{4^n}\right)$ متقاربة أو متباعدة.

الحل:

إن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ متباعدة كما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ هندسية فيها $|r| = \frac{1}{4} < 1$ فهي متقاربة. من المبرهنة 6 نستنتج أن المتسلسلة المعطاة متباعدة.

ملاحظة: إذا كانت المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدتين ، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ قد تكون متقاربة أو غير متقاربة. فمثلا إذ كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ فإن مجموعهما المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ وهي متباعدة. لكن إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ فإن مجموعهما المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 0$ وهي متقاربة.

المتسلسلات ذات الحدود الموجبة (اختبار التكامل واختبار المقارنة)

Positive Term Series (Integral and Comparison tests)

تقتصر دراستنا على المتسلسلات الموجبة (Positive series) أي المتسلسلات التي كل حد من حدودها عدد حقيقي موجب، أي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بحيث أن $a_n > 0$.

مبرهنة7

المتسلسلة الموجبة متقاربة إذا وفقط إذا كانت متتابعة المجاميع الجزئية محدودة من أعلى.

مبرهنة 8 (اختبار التكامل)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة موجبة، ولتكن f دالة متصلة ومتناقصة معرفة على الفترة $[1,\infty)$ بحيث $f(n)=a_n$ لكل $n \geq 1$

عندئذ تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة إذا وفقط إذا كان التكامل المعتل $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ متقاربا .

تعريف3

متسلسلة $-p$ ، هي المتسلسلة التي من الصيغة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

حيث أن p عدد حقيقي.

مبرهنة9

متسلسلة $-p$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

(ا) متقاربة لكل $p > 1$

(ب) متباعدة لكل $p \leq 1$

مثال11

اثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ متباعدة .

الحل:

بما أن المتسلسلة موجبة ، لذلك نستخدم اختبار التكامل. نعرف

$$f(x) = \frac{1}{x\ln x} \quad \text{لكل} \quad x \geq 2$$

بما أن x و $\ln x$ متصلتان و $f'(x) = \frac{-(1+\ln x)}{(x\ln x)^2} < 0$ فإن الدالة متصلة ومتناقصة على الفترة $[2,\infty)$ وأيضا $f(n)=\frac{1}{n\ln n}$ لكل $n \geq 2$ ،لذلك نستطيع استخدام اختبار التكامل

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{1}{x\ln x}dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} [\ln(\ln x) - \ln(\ln 2)] = \infty$$

أي أن التكامل المعتل متباعد وبالتالي المتسلسلة متباعدة.

مبرهنة10 (اختبار المقارنة Comparison test)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلتين موجبتين

(أ) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة و $a_n \le b_n$ لكل $n \ge 1$ ، فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة كما أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(ب) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة و $b_n \le a_n$ لكل $n \ge 1$ ، فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

مثال12

اثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$ متقاربة.

الحل:

نعلم من نظرية المتسلسلات الهندسية أن المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ متقاربة. بما أن

$$\frac{1}{2^n+1} \le \frac{1}{2^n} \quad \text{لكل} \quad n \ge 1$$

لذلك نستنتج من اختبار المقارنة أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ متقاربة.

مثال13

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$.

الحل:

لاحظ أن $\frac{1}{2\sqrt{n}-1} \ge \frac{1}{2\sqrt{n}}$ لكل $n \ge 1$ وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ هي متسلسلة p - حيث $p = \frac{1}{2}$ ، لذلك فهي متباعدة. ومن ثم فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ أيضا متباعدة. نستنتج من اختبار المقارنة أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$ متباعدة.

مثال14

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\sin^2 n}{n!}$.

الحل:

نعلم أن $0 \le \sin^2 n \le 1$ لكل $n \ge 0$ وبالتالي فإن $\frac{3\sin^2 n}{n!} \le \frac{3}{n!}$ لكل $n \ge 0$

لكن $n! \ge n^2$ لكل $n \ge 4$ ، ولذلك $\frac{3\sin^2 n}{n!} \le \frac{3}{n!} \le \frac{3}{n^2}$ لكل $n \ge 4$

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متسلسلة p – حيث $p = 2$ ، لذلك فهي متقاربة ، ومنه فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ وبالتالي فالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$ أيضا متقاربة. من اختبار المقارنة نستنتج أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\sin^2 n}{n!}$ متقاربة.

مثال15

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\ln n}{n^3+1}$.

الحل:

لاحظ أن $n^3+1 > n^3$ و $\ln n < n$ لكل $n \geq 2$ ، بالتالي فإن $\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^3+1} < \frac{n\sqrt{n}}{n^3} = \frac{1}{n^{3/2}}$ ، وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ هي متسلسلة p – حيث $p = \frac{3}{2}$ فهي متقاربة. بالتالي المتسلسلة قيد الدراسة متقاربة.

مبرهنة11 (اختبار نهاية المقارنة Limit comparison test)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلتين موجبتين. عندئذ

(أ) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ فإما أن المتسلسلتين كلاهما متقاربتان أو كلاهما متباعدتان.

(ب) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ وكانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

(ج) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ وكانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

توضيح

a_n	حذف الحدود ذات الأس الأصغر	خيار b_n
$\frac{5n+2}{3n^4+n^3-1}$	$\frac{5n}{3n^4} = \frac{5}{3n^3}$	$\frac{1}{n^3}$
$\frac{9}{\sqrt{5n^3+n^2+3}}$	$\frac{9}{\sqrt{5n^3}} = \frac{9}{\sqrt{5}n^{\frac{1}{3}}}$	$\frac{1}{n^{1/3}}$
$\frac{\sqrt[3]{n^2+5}}{7n^2+3n-1}$	$\frac{\sqrt[3]{n^2}}{7n^2} = \frac{n^{3/2}}{7n^2} = \frac{1}{7n^{4/3}}$	$\frac{1}{n^{4/3}}$

مثال16

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3-2}{2^n(3n^3-5n+6)}$.

الحل:

بحذف جميع الحدود من البسط والمقام باستثناء الحدود ذات الأس الأكبر، نحصل على $\frac{5n^3}{2^n(3n^3)} = \frac{5}{32^n}$

نختار $b_n = \frac{1}{2^n}$. بتطبيق اختبار نهاية المقارنة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3-2}{2^n(3n^3-5n+6)} \times \frac{2^n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3-2}{3n^3-5n+6} = \frac{5}{3} > 0$$

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ هي متسلسلة هندسية، من نظرية المتسلسلات الهندسية فهي متقاربة (حيث $r = \frac{1}{2} < 1$). ومنه فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة.

مثال17

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{8n^2-5n}}$.

الحل:

نكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ كما فعلنا في المثال السابق فنحصل على $\frac{1}{\sqrt[3]{8n^2}} = \frac{1}{2n^{2/3}}$

نختار $b_n = \frac{1}{n^{2/3}}$، بتطبيق اختبار نهاية المقارنة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{8n^2-5n}} \times \frac{n^{2/3}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2/3}}{\sqrt[3]{8n^2-5n}} = \frac{1}{2} > 0$$

لكن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ هي متسلسلة - p حيث $p = \frac{2}{3} < 1$ وبالتالي فهي متباعدة، ومنه فإن المتسلسلة المعطاة متباعدة.

اختبار النسبة Ratio test

مبرهنة 12 (اختبار النسبة)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة موجبة ، ولنفرض أن $a_n \neq 0$ لكل n وأن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

(ا) **إذا كان $0 \leq L < 1$ ، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.**

(ب) **إذا كان $L > 1$ أو $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ ، فإن المتسلسلة متباعدة.**

(ج) **إذا كان $L = 1$ فإن الاختبار يفشل، أي أننا لا نستطيع تحديد ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة ام متباعدة. وفي هذه الحالة لا بد من استخدام اختبار آخر.**

ملاحظة: إن اختبار النسبة هو أكثر الاختبارين استخداما .

مثال18

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$.

الحل:

بتطبيق اختبار النسبة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{5^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0$$

بالتالي المتسلسلة متقاربة.

مثال19

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2}$.

الحل:

بتطبيق اختبار النسبة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{5^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{(n+1)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{n^2+2n+1} = 5$$

بما أن $5 > 1$ ، فإن المتسلسلة متباعدة.

مثال20

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

الحل:

نطبق اختبار النسبة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}$$

وبما أن $\frac{1}{e} < 1$ ، فإن المتسلسلة متقاربة.

اختبار الجذر Root test

يستخدم هذا الاختبار بصفة خاصة عندما يكون a_n مرفوع للأس n .

مبرهنة 13 (اختبار الجذر)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة موجبة ، نفرض أن

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

(ا) إذا كان $0 \le L < 1$ ، فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

(ب) إذا كان $L > 1$ أو $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$ ، فإن المتسلسلة متباعدة.

(ج) إذا كان $L = 1$ فإن الاختبار يفشل، أي أننا لا نستطيع تحديد ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أو متباعدة. وفي هذه الحالة لا بد من استخدام اختبار آخر.

مثال21

اختبر تباعد أو تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{1000}\right)^n$.

الحل:

نستخدم في هذا المثال اختبار الجذر، لأن a_n مرفوع للأس n ، فنحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{\ln n}{1000}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{1000}=\infty$$

وبالتالي المتسلسلة متباعدة.

مثال22

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

الحل:

نستطيع تطبيق اختبار النسبة أو الجذر في هذا المثال. بتطبيق اختبار الجذر نحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1/n}}{2}=\frac{1}{2}$$

بما أن $\frac{1}{2}<1$ فإن المتسلسلة متقاربة.

مثال23

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{n^2}}$.

الحل:

يتضمن a_n في تعريفه 2^{n^2} ، وبالرغم من ذلك فإن اختبار النسبة أفضل هنا من اختبار الجذر. بتطبيق اختبار النسبة نحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}\times\frac{2^{n^2}}{n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{2n+1}}=0$$

بالتالي المتسلسلة متقاربة.

المتسلسلات المترددة والتقارب المطلق

المتسلسلات المترددة (Alternating series)

المتسلسلة المترددة هي المتسلسلة التي تتعاقب حدودها بين الموجب والسالب. أي المتسلسلة التي من الصيغة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$ أو $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^{n} a_n + \cdots$ حيث $a_n > 0$ لكل $n \geq 1$.

مبرهنة 14 (اختبار المتسلسلات المترددة **Alternating series test**)

المتسلسلة المترددة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$$

متقاربة إذا تحقق الشرطان التاليان:

(ا) **المتتابعة** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **تناقصية ، أي** $a_{n+1} \leq a_n$ **لكل** $\boldsymbol{n}$

(**ب**) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

مثال24

اثبت أن المتسلسلة المترددة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ متقاربة.

الحل:

نضع $a_n = f(n) = \frac{1}{n}$. لتطبيق اختبار المتسلسلات المترددة علينا إثبات

(ا) $a_{n+1} \leq a_n$ لكل n

(ب) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

نستخدم المشتقة للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

أي أن الدالة f متناقصة ، ومنه فإن المتتابعة $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ متناقصة. لإثبات (ب) نلاحظ أن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ، ومنه فإن المتسلسلة متقاربة.

مثال25

اختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{(\ln n)^2}{n}$.

الحل:

المتسلسلة مترددة ، نطبق اختبار المتسلسلة المترددة.

(ا) نضع $a_n = f(n) = \dfrac{(\ln n)^2}{n}$ ، وباستخدام المشتقة نحصل على

$$f'(x) = -\frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{\ln x[2 - \ln x]}{x^2}$$

لكن $\dfrac{\ln x}{x^2} > 0$ لكل $x \geq 2$ ، كذلك $2 - \ln x < 0$ لكل $x \geq 9$ ، ومنه فإن المتتابعة $\left\{(\ln n)^2 / n\right\}_{n=9}^{\infty}$ متناقصة

(ب) باستخدام قاعدة لوبيتال مرتين نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

وبالتالي فالمتسلسلة متقاربة.

التقارب المطلق والتقارب الشرطي

مبرهنة15

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متقاربة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة .

مثال26

اختبر المتسلسلة $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$.

الحل:

نعلم أن $-1 \leq \sin n \leq 1$ وبما أن $n^3 > 0$ لكل n و بحساب عدد قليل من حدود المتسلسلة نلاحظ أنها ليست موجبة ولا مترددة. لذلك لا يمكن تطبيق أيا من الاختبارات السابقة مباشرة. ولاختبار هذه المتسلسلة نختبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin n / n^3\right|$. بما أن $\left|\sin n / n^3\right| \leq \dfrac{1}{n^3}$ ، كذلك بما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ متقاربة لأنها متسلسلة- p حيث $p = 3$ ، فمن اختبار المقارنة، نجد أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin n / n^3\right|$ متقاربة، ومن المبرهنة فإن المتسلسلة المعطاة متقاربة.

تعريف4 (**التقارب المطلق والتقارب الشرطي**)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة متقاربة.

(ا) يقال أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة تقاربا مطلقا (أو متقاربة مطلقا Converges absolutely)، إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متقاربة.

(ب) يقال أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة تقاربا شرطيا (أو متقاربة شرطيا Converges conditionally)، إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متباعدة.

مثال27

حدد ما إذا كانت المتسلسلة التالية متقاربة مطلقا أو متقاربة شرطيا أو متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$$

الحل:

بتطبيق اختبار الجذر نحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{(-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^2(3^{1/n})}{n^2} = 0 < 1$$

من تعميم اختبار الجذر نستنتج أن المتسلسلة المعطاة متقاربة مطلقا.

مثال28

اثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$

متقاربة مطلقا لكل x ، حيث$|x| < 1$ ومتقاربة شرطيا عندما $x = -1$ ومتباعدة عندما $x = 1$ ولكل x ، حيث $|x| > 1$.

الحل:

إذا كان $x = 0$ فإن المتسلسلة متقاربة مطلقا. لنفرض أن $x \neq 0$ ، نطبق اختبار النسبة المعمم نحصل على

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{x^n}\right|$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = |x|$$

لذلك فالمتسلسلة متقاربة مطلقا لكل x ، حيث $|x| < 1$ ومتباعدة لكل x ، حيث $|x| > 1$. بقي اختبار المتسلسلة عند $x = \pm 1$. نناقش الحالتين كل على انفراد.

1. عند $x = 1$ نحصل على المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ وهي متباعدة.
2. عند $x = -1$ نحصل على المتسلسلة المترددة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ وهي متقاربة شرطيا.