

باب 1

أنظمة المعادلات الخطية

1.1 طريقة جاوس و جاوس جوردن

تعريف 1.1.1

إذا كانت $(a_{j,k})$ أعدادا حقيقية ($1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n$) وإذا كانت x_1, \dots, x_n مجاهيل وإذا كانت b_1, \dots, b_m أعدادا حقيقية. يمكن كتابة نظام معادلات خطية كما يلي

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & a_{1,2}x_2 & \cdots & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & a_{2,2}x_2 & \cdots & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & a_{m,2}x_2 & \cdots & a_{m,n}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

و يمكن كتابة هذا النظام الخطي في صيغة مصفوفات كما يلي: $AX = B$ مع

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

تعريف 1.1.2

1. نقول أن نظامين من المعادلات الخطية متكافئان إذا كان لهما نفس مجموعة الحلول.
 2. نقول أن نظام خطي متسقاً أو متآلفاً إذا كان له حل و نقول أنه غير متسق إذا لم يكن له حل.
- سنقوم بتوسيع المصفوفة A و ذلك بإضافة المصفوفة B و نحصل على مصفوفة $[A|B]$ وتسمى المصفوفة الموسعة

1.1.1 طريقة جاوس

لحل النظام الخطي سنقوم بوضع المصفوفة الموسعة $[A|B]$ على صيغة درجية صفية و نحصل على نظام خطي مثلثي مكافئ للنظام الخطي الأول و هذه الطريقة تسمى طريقة جاوس لحل النظام الخطي.

1.1.2 طريقة جاوس جوردن

لحل النظام الخطي سنقوم بوضع المصفوفة الموسعة $[A|B]$ على الصيغة الدرجية الصفية المختزلة و نحصل على نظام خطي مكافئ للنظام الخطي الأول و هذه الطريقة تسمى طريقة جاوس جوردن لحل النظام الخطي.

1.2 الأنظمة الخطية المتجانسة

1.2.1 تعريف

نقول أن نظام خطي $AX = B$ متجانس إذا كان $B = 0$.

1.2.1 ملاحظات

1. كل نظام خطي متجانس متسق لأن الحل التافه هو حل لهذا النظام.
2. إذا كان X_1 و X_2 حلا للنظام الخطي المتجانس $AX = 0$ فإن $X_1 + \lambda X_2$ هو حل للنظام الخطي لكل $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. إذا كان للنظام الخطي المتجانس $AX = 0$ حل غير صفري فإن النظام له عدد ما لا نهائي من الحلول.

1.2.1 مبرهنة

إذا كان للنظام الخطي $AX = B$ حل X_0 إذا كل حل X للنظام الخطي سيكون على الصيغة $X = X_0 + X_1$ حيث X_1 حل للنظام المتجانس $AX = 0$.

1.3 قاعدة كرامر

1.3.1 مبرهنة

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n ولها معكوس إذا الحل الوحيد للنظام الخطي $AX = B$ هو

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \dots, x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

حيث A_j هي المصفوفة A_j هي المصفوفة التي نحصل عليها من المصفوفة A بوضع العمود B عوضا عن العمود C_j

1.4 تمارين الباب الثالث

تمرين 1 :

1. أوجد حلول النظام الخطي التالي في \mathbb{R}^3

$$\begin{cases} x + 2y - z = -4 \\ -x + y = -2 \\ y - z = -4 \end{cases}$$

2. أوجد حلول النظام الخطي التالي في \mathbb{R}^4

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad ; \quad \begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ 3x - y + 5y - t = 2 \\ 5x + 3y + 3z + t = \alpha \end{cases}$$

تمرين 2 :

1. أوجد حلول الانظمة الخطية التالية في \mathbb{R}^3

$$\begin{cases} -2y + 3z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \\ -x - 2y + 5z = 0 \\ x - 2y = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} -2y + 3z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ -x - 2y + 5z = 0 \\ x - 2y - z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ x - y + (m-1)z = 2 \\ m^2x + 3y + 4z = -2 \\ x + 4y + (m^2 + 4)z = -3 \end{cases}$$

 $m \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 6x + 3y - z = 2 \\ -4x + y - 6z = 0 \\ x + 2y - 5z = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y + 3z - 2t = 0 \\ 2x + y - 4z + 3t = 0 \\ 2x + 3y + 2z - t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + my + (m-1)z = m+1 \\ 3x + 2y + mz = 3 \\ (m-1)x + my + (m+1)z = m-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + (a+3)y + 3z = 3 \\ x + (-a+3)y + (a-2)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + my + (m-1)z = m+1 \\ 3x + 2y + mz = 3 \\ (m-1)x + my + (m+1)z = m-1 \end{cases}$$

2. أوجد حلول النظام الخطي التالي في \mathbb{R}^4

$$\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ z - 2t = 0 \end{cases}$$

تمرين 3 :

أوجد حلول الأنظمة الخطية التالية بالاستعمال طريقة جاوس جوردن

$$\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases} .1$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - w = -1 \\ 2x + y - 2z - 2w = -2 \\ -x + 2y - 4z + w = 1 \\ 3x - 3w = -3 \end{cases} .2$$

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ -2x + 5y + 2z = 0 \\ -7x + 7y + z = 0 \end{cases} .3$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} .4$$

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = -15 \\ 5x + 3y + 2z = 0 \\ 3x + y + 3z = 11 \\ 11x + 7y = -30 \end{cases} .5$$

$$\begin{cases} 4x - 8y = 12 \\ 3x - 6y = 9 \\ -2x + 4y = -6 \end{cases} .6$$

تمرين 4 :

1. أوجد علاقة بين a, b, c و c حتى يكون النظام التالي متسق.

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x + z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases}$$

2. أثبت أنه إذا كان $ad - bc \neq 0$, فإن الصيغة الدرجية للصية للمصفوفة $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

هي

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

تمرين 5 :

1. عين كل من a, b, c التي من أجلها يكون $(1, -1, 2)$ حلا للنظام الخطي

$$\begin{cases} ax + by - 3z = -3 \\ -2x - by + z = -1 \\ ax + 3y - cz = -1 \end{cases}$$

2. أثبت أن $(1, -1, 2)$ هو حلا وحيدا للنظام الخطي في الفقرة (1).

تمرين 6 :

لتكن المصفوفة المربعة $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(أ) أوجد المصفوفة $B = \text{adj}A$ ومحدد المصفوفة A .

(ب) أوجد معكوس المصفوفة A إن أمكن ذلك.

تمرين 7 :

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ و المصفوفة $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ أوجد قيمة العدد a بحيث $A^2 - AB + aI_3 = 0$ واستنتج معكوس المصفوفة A .

تمرين 8 :

استخدم طريقة جاوس جوردان لإيجاد مجموعة الحلول للنظام الخطي التالي

$$\begin{cases} x + y + 2z + t = 11 \\ x + 2y + z + t = 9 \\ x + y + z + 2t = 6 \\ 2x + y + z + t = 14 \end{cases}$$

تمرين 9 :

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$ ولها معكوس فأثبت أن $\text{adj}(\text{adj}A) = (\det A)^{n-2}A$.

تمرين 10 :

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ و $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. أثبت أن النظام الخطي $AX = B$ متسق إلا وإذا كان $b - a = c - b$.

1.5 إصلاح تمارين الباب الثالث

تمرين 11 :

1. أوجد حلول النظام الخطي التالي في \mathbb{R}^3

$$\begin{cases} x + 2y - z = -4 \\ -x + y = -2 \\ y - z = -4 \end{cases}$$

2. أوجد حلول النظام الخطي التالي في \mathbb{R}^4

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad ; \quad \begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ 3x - y + 5y - t = 2 \\ 5x + 3y + 3z + t = \alpha \end{cases}$$

حل التمرين 1:

1. المصفوفة الموسعة لهذا النظام هي

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

هي صيغة درجية صفية لهذه المصفوفة. إذا باستعمال طريقة جاوس ، النظام له حل وحيد وهو $x = 1, y = -1, z = 3$.

و الصيغة الدرجية الصفية لهذه المصفوفة هي

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right].$$

إذا باستعمال طريقة جاوس جوردن ، النظام له حل وحيد وهو $x = 1, y = -1, z = 3$.

2.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m - 4 \end{array} \right]$$

هي صيغة درجية صفية لهذه المصفوفة.

إذا كان $m \neq 4$ النظام غير متسق. وإذا كان $m = 4$ النظام له عدد غير منته من الحلول.

$$\{(\frac{5}{7} - \frac{9}{7}z + \frac{1}{7}t, \frac{1}{7} + \frac{8}{7}z - \frac{4}{7}t, z, t) \in \mathbb{R}^4\}.$$

تمرين 12 :

1. أوجد حلول الأنظمة الخطية التالية في \mathbb{R}^3

$$\begin{cases} -2y + 3z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \\ -x - 2y + 5z = 0 \\ x - 2y = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} -2y + 3z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ -x - 2y + 5z = 0 \\ x - 2y - z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ x - y + (m-1)z = 2 \\ m^2x + 3y + 4z = -2 \\ x + 4y + (m^2 + 4)z = -3 \end{cases}$$

$m \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 6x + 3y - z = 2 \\ -4x + y - 6z = 0 \\ x + 2y - 5z = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y + 3z - 2t = 0 \\ 2x + y - 4z + 3t = 0 \\ 2x + 3y + 2z - t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + my + (m-1)z = m+1 \\ 3x + 2y + mz = 3 \\ (m-1)x + my + (m+1)z = m-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + (a+3)y + 3z = 3 \\ x + (-a+3)y + (a-2)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + my + (m-1)z = m+1 \\ 3x + 2y + mz = 3 \\ (m-1)x + my + (m+1)z = m-1 \end{cases}$$

2. أوجد حلول النظام الخطي التالي في \mathbb{R}^4

$$\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ z - 2t = 0 \end{cases}$$

تمرين 13 :

أوجد حلول الأنظمة الخطية التالية بالاستعمال طريقة جاوس جوردن

$$\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases} .1$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - w = -1 \\ 2x + y - 2z - 2w = -2 \\ -x + 2y - 4z + w = 1 \\ 3x - 3w = -3 \end{cases} .2$$

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ -2x + 5y + 2z = 0 \\ -7x + 7y + z = 0 \end{cases} .3$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} .4$$

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = -15 \\ 5x + 3y + 2z = 0 \\ 3x + y + 3z = 11 \\ 11x + 7y = -30 \end{cases} .5$$

$$\begin{cases} 4x - 8y = 12 \\ 3x - 6y = 9 \\ -2x + 4y = -6 \end{cases} .6$$

حل التمرين 2:

$$1. \text{ المصفوفة الموسعة للنظام هي: } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array} \right]$$

الصيغة الدرجية الصفية:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ -3R_{1,3}, 1R_{1,2} \\ \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -32 & -104 \end{array} \right] :10R_{2,3}, -R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{4} \end{array} \right] :-\frac{1}{32}r_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 17 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{4} \end{array} \right] :(-1)R_{2,1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{4} \end{array} \right] :3R_{3,2}, (-5)R_{3,1}$$

$$.z = \frac{13}{4}, y = \frac{3}{4}, x = \frac{3}{4} \text{ هو الحل}$$

$$2. \text{ المصفوفة الموسعة للنظام هي: } \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right]$$

الصيغة الدرجية الصفية:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{array} \right] :(-3)R_{1,4}, 1R_{1,3}, (-2)R_{1,2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] :(-3)R_{2,4}, (-3)R_{2,3}, R_{2,3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] :1R_{2,1}$$

الحل هو $t = u, z = s, y = 2s, x = u - 1$

3. الحل هو $z = 7t, y = -4t, x = -3t$

4. النظام غير متسق.

5. $z = 7, y = 2, x = -4$

6. $y = t, x = 3 + 2t$

7. المصفوفة الموسعة للنظام هي: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 2 & 1 & 3 & c \end{array} \right]$

الصيغة الدرجية الصفية: $(-2)R_{1,3}, (-1)R_{1,2} : \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & -1 & b-a \\ 0 & -1 & -1 & c-2a \end{array} \right]$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & c-a-b \end{array} \right] :1R_{2,3}, (-1)R_2$

إذا لا يكون النظام متسقاً إلا إذا كان $-a - b + c = 0$.

تمرين 14 :

1. أوجد علاقة بين a, b, c و حتى يكون النظام التالي متسق.

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x + z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases}$$

2. أثبت أنه إذا كان $ad - bc \neq 0$, فإن الصيغة الدرجية الصية للمصفوفة $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ هي

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

تمرين 15 :

1. عين كل من a, b, c التي من أجلها يكون $(1, -1, 2)$ حلاً للنظام الخطي

$$\begin{cases} ax + by - 3z = -3 \\ -2x - by + z = -1 \\ ax + 3y - cz = -1 \end{cases}$$

2. أثبت أن $(1, -1, 2)$ هو حلاً وحيداً للنظام الخطي في الفقرة (1).

حل التمرين 3:

1. $(1, -1, 2)$ هو حل للنظام الخطي إلا و إذا كان $a = 2, b = -1$ و $c = 0$.

2. بما أن مصفوفة النظام الخطي

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = -3 \\ -2x + y + z = -1 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$

لها معكوس إذا النظام الخطي له حل وحيد.
(محدد المصفوفة يساوي 16)

تمرين 16 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ لتكن المصفوفة المربعة}$$

أ) أوجد المصفوفة $B = \text{adj}A$ و محدد المصفوفة A .

ب) أوجد معكوس المصفوفة A إن أمكن ذلك.

حل التمرين 4:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ أ) } |A| = 2 \text{ و } B = \text{adj}A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}B \text{ ب)}$$

تمرين 17 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ و المصفوفة } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

أوجد قيمة العدد a بحيث $A^2 - AB + aI_3 = 0$ واستنتج معكوس المصفوفة A .

حل التمرين 5:

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A(A - B) = 2I_3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - B)$$

تمرين 18 :

استخدم طريقة جاوس جوردان لإيجاد مجموعة الحلول للنظام الخطي التالي

$$\begin{cases} x + y + 2z + t = 11 \\ x + 2y + z + t = 9 \\ x + y + z + 2t = 6 \\ 2x + y + z + t = 14 \end{cases}$$

حل التمرين 6:

المصفوفة الموسعة

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 14 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -8 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

إذا $x = 6, y = 1, z = 3, t = -2$.

تمرين 19 :

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R}), n \geq 2$ و لها معكوس فأثبت أن $\text{adj}(\text{adj}A) = (\det A)^{n-2}A$.

حل التمرين 7:

تمرين 20 :

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ و $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. أثبت أن النظام الخطي $AX = B$ متسق إلا وإذا كان $b - a = c - b$.

حل التمرين 8: