سلاسل فورييه

تعريف (٧-١)

نقول إن مجموعة الدوال :

$$\{f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$$

متعامدة على الفترة [a,b] بوزن دالي مقداره w(x)، إذا كان :

$$\begin{cases} \int_a^b w(x) f_n(x) f_m(x) dx = 0, & m \neq n \\ \int_a^b w(x) f_n(x) f_m(x) dx \neq 0, & m = n \end{cases}$$

ونستخدم فكرة التعامد لتمثيل بعض الدوال على شكل سلاسل من الشكل :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x)$$

كما سنراه في هذا الفصل.

مثـــال (٧-١)

أثبت أن مجموعة الدوال :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sin(\frac{n\pi x}{c}), & n = 1,2,3,\ldots\ldots \\ \cos(\frac{m\pi x}{c}), & m = 0,1,2,\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

متعامدة على الفترة $[-c,c]$ بوزن مقداره $w(x) = 1$.

البرهان

١) $$I_1 = \int_{-c}^{c} \sin(\frac{n\pi x}{c})\cos(\frac{m\pi x)}{c} dx = 0$$

مهما كان n,m لأن دالة التكامل فردية.

٢) $$I_2 = \int_{-c}^{c} \sin(\frac{n\pi x}{c})\sin(\frac{m\pi x)}{c} dx = 0, \quad m \neq n$$

$$n,m = 1,2,3,\ldots\ldots$$

لاحظ أن:

$$\sin\frac{n\pi x}{c}\sin\frac{m\pi x}{c} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi x}{c}(n-m) - \cos\frac{\pi x}{c}(n+m)\right]$$

لاحظ أيضا بعد التكامل أن:

$$\sin\frac{\pi x}{c}(n-m) \quad , \quad \sin\frac{\pi x}{c}(n+m)$$

ينعدمان عند القيمتين c،−c لأن الزاويتين الناتجتين من مضاعفات الزاوية π.

٣) $$I_3 = \int_{-c}^{c} \sin(\frac{n\pi x}{c})\sin(\frac{n\pi x)}{c} dx = c \neq 0$$

$$n = 1,2,3,\ldots.$$

لاحظ أن:

$$\sin^2(\frac{n\pi x}{c}) = \frac{1}{2}(1 - \cos\frac{2\pi nx}{c})$$

وأن: $$\int_{-c}^{c} \sin^2(\frac{n\pi x}{c})dx = \left|\frac{1}{2}(x - \frac{c}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nx}{c})\right|_{-c}^{c} = c$$

٤) $$I_4 = \int_{-c}^{c} \cos\frac{n\pi x}{c}\cos\frac{n\pi x}{c}dx = c. \quad c \neq 0$$

$$n=1,2,3,\ldots\ldots$$

لاحظ أن:
$$\cos(\frac{2n\pi x}{c}) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\frac{\pi nx}{c})$$

واستفد من الفقرة السابقة

٥) $$I_5 = \int_{-c}^{c} \cos(\frac{n\pi x}{c})\cos(\frac{m\pi x)}{c} dx = 0. \quad m \neq n$$

$$n, m = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

لاحظ أن:

$$\cos\frac{n\pi x}{c}\cos\frac{m\pi x}{c} = \frac{1}{2}[\cos\frac{\pi x}{c}(n+m) + \cos\frac{\pi x}{c}(n-m)]$$

واستفد من الفقرة (٢).

٦) من أجل n=0 في (٤)، نجد أن:

$$I_6 = \int_{-c}^{c} dx = 2c \neq 0$$

(٧−١) مفكوك دالة حسب سلسلة فوريه

لنفترض أن الدالة f(x) يمكن كتابتها على شكل سلسلة من الشكل:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{c} + b_n\sin\frac{n\pi x}{c})$$

نسمي السلسلة في الطرف الأيمن بسلسلة فوريه، أو مفكوك الدالة f حسب فوريه.

حساب: b_n, a_n, a_0

١) **حساب** b_n، من الملاحظ أن:

$$\int_{-c}^{c} f(x)\sin\frac{k\pi x}{c}dx = \frac{1}{2}a_0\int_{-c}^{c}\sin\frac{k\pi x}{c}dx$$

(k عدد صحيح موجب)

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-c}^{c}\cos\frac{n\pi x}{c}\sin\frac{k\pi x}{c}dx+b_n\int_{-c}^{c}\sin\frac{n\pi x}{c}\sin\frac{k\pi x}{c}dx\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{-c}^{c}\sin\frac{n\pi x}{c}\sin\frac{k\pi x}{c}dx$$

(دالتا التكامل للتكاملين الأول والثاني فرديتان)

$$=b_k\int_{-c}^{c}\sin^2\frac{k\pi x}{c}dx$$

(حسب الفقرة الثانية من المثال (٧-١))

$$=b_k\,c$$

(حسب الفقرة الثالثة من المثال (٧-١))

إذن:

$$b_k=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f(x)\sin\frac{k\pi x}{c}dx$$

$$k=1,2,3,\ldots$$

بالتالي، فإن:

$$\boxed{b_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}dx,\quad n=1,2,3,\ldots}$$

٢) **حساب a_n**، من الملاحظ أن:

$$\int_{-c}^{c}f(x)\cos\frac{k\pi x}{c}dx=\frac{1}{2}a_0\int_{-c}^{c}\cos\frac{k\pi x}{c}dx$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-c}^{c}\cos\frac{n\pi x}{c}\cos\frac{k\pi x}{c}dx+b_n\int_{-c}^{c}\sin\frac{n\pi x}{c}\cos\frac{k\pi x}{c}dx\right]$$

من الملاحظ أن معامل b_n معدوم لأن دالة التكامل فردية، وأن معامل a_0 معدوم لأن المقدار $\frac{c}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{c}x$ الذي يظهر بعد إجراء التكامل ينعدم عند c و c-.

بالتالي، فإن:

$$\int_{-c}^{c}f(x)\cos\frac{k\pi x}{c}dx=a_k\int_{-c}^{c}\cos^2\frac{k\pi x}{c}dx \qquad (٧-١)$$

(حسب الفقرة الخامسة من المثال (٧-١))

$$=a_k\,c$$

(حسب الفقرة الرابعة من المثال (٧-١))

(K=1, 2, …)

إذن:

$$a_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}dx \qquad (٧-٢)$$

$$n=1,2,\ldots$$

وبسهولة يمكن أن نبرهن أن:

$$a_0=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f(x)dx$$

باختصار يمكن أن نكتب مفكوك الدالة f(x) (بفرض أن هذا المفكوك موجود) على الشكل:

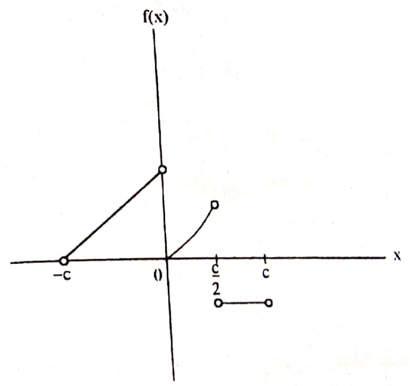
$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{c}+b_n\sin\frac{n\pi x}{c}dx \qquad (٧-٣)$$

حيث:

$$\begin{cases}a_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}dx & n=0,1,2,\ldots\\ b_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}dx & n=1,2,3,\ldots\end{cases} \qquad (٧-٤)$$

نسمي الجانب الأيمن من (٧-٣) حيث a_n,b_n معطاة بالصيغتين (٧-٤)، بسلسلة فوريه على الفترة [c,c-] من أجل الدالة f.

نتساءل الآن عن الشروط التي يجب أن تحققها الدالة f لكي يمكن تمثيلها بالصيغة (٧-٣). لتكن f(x) دالة متصلة وقابلة للاشتقاق عند أية نقطة من الفترة [−c,c]، باستثناء عدد محدود من النقاط تكون عندها النهايات اليمنى واليسرى للمقدارين f(x)، f′(x) موجودة، شكل (٧-١).



شكل (٧-١)

ضمن هذه الشروط يمكن أن تمثل f على شكل سلسلة من الشكل (٧-٣) حيث a_n، b_n تعطى بالصيغتين (٧-٤).

هذه السلسلة تتقارب نحو القيمة f(x) عند أية نقطة تكون فيها f(x) متصلة. وتتقارب السلسلة عند أية نقطة مثل x_0 تكون فيها f(x) غير متصلة نحو الوسط الحسابي للمقدارين

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad , \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

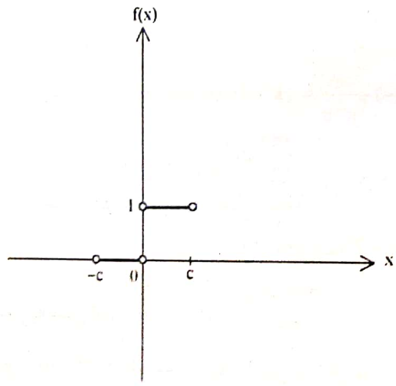
مثال (٧-٢)

أوجد سلسلة فورييه على الفترة (−c,c)

من أجل الدالة :

$$f(x)=\begin{cases}0 & , \quad -c<x<0\\ 1 & , \quad 0<x<c\end{cases}$$

الحل



شكل (٧-٢)

$$a_0=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x)dx=\frac{1}{c}\int_{-c}^{0} 0\,dx+\frac{1}{c}\int_{0}^{c} dx=1$$

$$a_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}dx=\frac{1}{c}\int_{0}^{c}\cos\frac{n\pi x}{c}dx$$

$$=\frac{1}{c}\left[\frac{c}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{c}\right]_0^c=\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi)=0$$

$$b_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}dx=\frac{1}{c}\int_{0}^{c}\sin\frac{n\pi x}{c}dx=-\frac{1}{c}\frac{c}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi x}{c}\right]_0^c$$

$$= -\frac{1}{n\pi}(\cos(n\pi) - 1) = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$

إذن :

$$f(x) - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \sin\frac{n\pi x}{c}$$

ملحوظة (٧-١)

ترد الإشارة ~ كما هو موضح في المفكوك السابق إذا حوت الدالة f على مجالها نقطة أو أكثر من نقاط عدم الاتصال.

مثـــال (٧-٣)

أوجد سلسلة فورييه على الفترة [c,c-] من أجل الدالة :

$$f(x) = x^2$$

استنتج سلسلة فورييه على الفترة [π , π-].

الحـــل

$$a_0 = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x)dx = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3c}\right]_{-c}^{c} = \frac{2}{3}c^2$$

$$a_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} x^2 \cos\frac{n\pi x}{c}dx = \frac{1}{c}\left\{\left[\frac{c}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{c}\cdot x^2\right]_{-c}^{c} - \frac{c}{n\pi}\int_{-c}^{c} 2x\sin\frac{n\pi x}{c}dx\right\}$$

بملاحظة أن: $\sin\frac{n\pi x}{c}$ تساوي الصفر عند $x = \pm c$ ، فإن :

(كاملنا بالتجزئة : $V = x^2$, $du = \cos\frac{n\pi x}{c}$)

$$a_n = \frac{-4}{n\pi}\int_0^c x\sin\frac{n\pi x}{c}dx$$

(دالة التكامل زوجية)

$$= -\frac{4}{n\pi}\left\{\left[-\frac{c}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{c}\cdot x\right]_0^c + \frac{c}{n\pi}\int_0^c \cos\frac{n\pi x}{c}dx\right\}$$

(كاملنا بالتجزئة : $V = x$, $du = \sin\frac{n\pi x}{c}$)

$$= \frac{4c^2}{n^2\pi^2}(-1)^n$$

(لأن : $\int_0^c \cos\frac{n\pi x}{c}dx = \left[\frac{c}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{c}\right]_0^c = 0$)

إذن : $a_n = \frac{4c^2}{n^2\pi^2}(-1)^n$ ، (دالة التكامل فردية) $b_n = 0$

إذن : $$x^2 = \frac{1}{3}c^2 + \frac{4c^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos\frac{n\pi x}{c}}{n^2} \quad , \ -c \le x \le c$$ (٧-٥)

وبشكل خاص إذا كانت $c = \pi$ ، فإن :

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$$ (٧-٦)

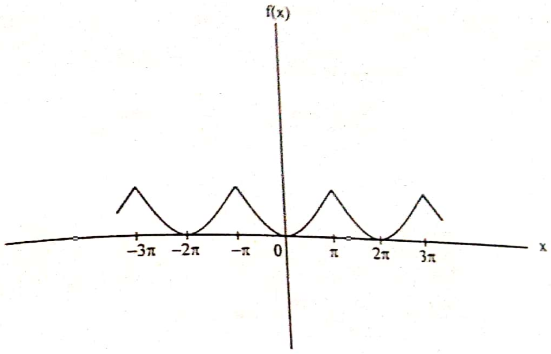
إذا أغفلنا الفترة المعرفة عليها f ، فإن السلسلة في الجانب الأيمن من (٧-٦) تمثل تمديدا دوريا للدالة الأصلية ، وهي تتقارب نحو Q(x) ، علما أن :

$$Q(x) = f(x) \quad , \quad \pi \ge x \ge -\pi$$

وتحقق Q المساواة :

$$Q(x + 2\pi) = Q(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

الشكل (٧-٣) يوضح بيان Q الدوري الذي نحصل عليه ابتداء من منحني بانسحابات متتالية باتجاه المحور x يمنة ويسرة بمقدار 2π.



شكل (٧-٣)

من جهة أخرى، فإن

$$Q(x) = 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^2 \frac{\cos nx}{n^2} + \frac{\pi^2}{3}, \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

مثــــال (٧-٥)

استفد من المثال (٧-٣)، لبيان أن:

١) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

٢) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

الحــــل

١) بالتعويض في (٧-٦) عن x بالقيمة صفر، نجد:

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow -\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

٢) بالتعويض في (٧-٥) عن x بالقيمة c، نجد:

$$c^2 = \frac{1}{3}c^2 + \frac{4c^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(n\pi)}{n^2} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^n}{n^2}$$

ومنه:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

تمارين (٧-١)

أوجد فيما يلي سلسلة فورييه لكل من الدوال التالية، ثم ارسم في كل حالة بيان الدالة الذي يمثله مجموع فورييه الناتج (التمديد الدوري للدالة الأصلية)

١) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \ -c < x < 0 \\ c - x & , \ 0 < x < c \end{cases}$ على الفترة $(-c, c)$

الجواب: $f(x) \sim \frac{c}{4} + \frac{c}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left[\{1 - (-1)^n \cos\frac{n\pi x}{c} + n\pi \sin\frac{n\pi x}{c}\right]$

٢) $f(x) = x$ على الفترة $(-c, c)$

الجواب: $f(x) \sim \frac{2c}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(n\pi x / c)}{n}$

٣) $f(x) = \begin{cases} 3\pi + 2x & , \ -\pi < x < 0 \\ \pi + 2x & , \ 0 < x < \pi \end{cases}$ على الفترة $(-\pi, \pi)$

٤) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & , \ -2 < x < 0 \\ 1 & , \ 0 \le x < 2 \end{cases}$ على الفترة $(-2, 2)$

٥) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \ -1 < x < 0 \\ 1 & , \ 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & , \ \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$ على الفترة $(-1, 1)$

الجواب: $f(x) \sim \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[\sin\frac{n\pi}{2}\cos n\pi x + \left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin n\pi x\right]$

٦) $f(x) = \cos 2x$ على الفترة $(-\pi, \pi)$

الجواب: $f(x) \sim \cos 2x$

٧) $f(x)=\sin^2 x$ على الفترة $(-\pi, \pi)$

الجواب: $\sin^2 x \sim \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$

٨) $f(x)=\begin{cases}0 & , \ -c<x<\frac{1}{2}c \\ 1 & , \ \frac{1}{2}c<x<c\end{cases}$ على الفترة $(-c, c)$

الجواب: $f(x)\sim \frac{1}{4}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{1}{2}n\pi\cos\frac{n\pi x}{c}+(\cos n\pi-\cos\frac{1}{2}n\pi)\sin\frac{n\pi x}{c}\right]$

٩) $f(x)=\begin{cases}1 & , \ -4<x<2 \\ 0 & , \ 2<x<4\end{cases}$ على الفترة $(-4, 4)$

١٠) $f(x)=\begin{cases}c+x & , \ -c<x<0 \\ 0 & , \ 0<x<c\end{cases}$ على الفترة $(-c, c)$

١١) $f(x)=x^4$ على الفترة $(-c, c)$

الجواب: $f(x)\sim \frac{c^4}{5}+8c^4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2\pi^2-6}{n^4\pi^4}\cos\frac{n\pi x}{c}$

(٧-٢) سلاسل الجيب لفوريه

الهدف الذي ننشده هنا تمثيل الدالة f على الفترة $(0,c)$ بسلسلة فوريه من الشكل:

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{c} \qquad (٧-٧)$$

تحوي دوال الجيب فقط $(a_n=0)$.

لنتذكر أن الدوال الفردية هي الدوال الذي يمكن تمثيلها على الفترة $(-c,c)$ بسلسلة فوريه من الشكل (٧-٧).

لإيجاد المفكوك الذي نرغبه للدالة f، نعرف دالة جديدة g على الفترة $(-c,c)$ بحيث يكون:

$g(x)=f(x)$ على الفترة $(0,c)$ (٧-٨)

ولتكن هذه الدالة من الشكل:

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & , \ c>x>0 \\ -f(-x) & , \ 0>x>-c\end{cases}$$

من الملاحظ أن هذه الدالة فردية على الفترة $(-c,c)$ وأن: $g(-x)=-g(x)$

ومفكوكها حسب فوريه سيحوي دوال الجيب فقط، والأهم من هذا فإنها تحقق الشرط (٧-٨) وهذا ما سنرغبه.

من الملاحظ أن:

$$a_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}g(x)\cos\frac{n\pi x}{c}dx=0 \ , \ n=0,1,2,\dots$$

وأن:

$$b_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}g(x)\sin\frac{n\pi x}{c}dx=\frac{2}{c}\int_{0}^{c}f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}dx$$

بالتالي، فإن:

$$\begin{cases}f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{c} \ , \ 0<x<c \\ b_n=\frac{2}{c}\int_{0}^{c}f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}\end{cases}$$

حيث:

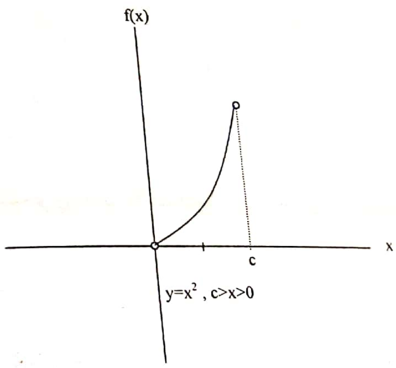
$$n=1,2,3,\dots$$

هذا التمثيل للدالة يدعى بسلاسل الجيب لفوريه للدالة f على الفترة $(0,c)$.

مثـــال (٧-٦)

أوجد سلسلة الجيب لفوريه من أجل الدالة:

$f(x)=x^2$ على الفترة $(0,c)$



شكل (٧-٤)

الحـــل

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{c}, \quad 0<x<c$$

$$b_n = \frac{2}{c}\int_0^c f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}$$

$$= \frac{2}{c}\int_0^c x^2 \sin\frac{n\pi x}{c}dx$$

$$= \frac{2}{c}\left[\left(-x^2\cos\frac{n\pi x}{c}\right)\Big|_0^c \frac{c}{n\pi} + \frac{c}{n\pi}\int_0^c 2x\cos\frac{n\pi x}{c}dx\right]$$

$$= \frac{2}{c}\left\{-c^2\cos n\pi\cdot\frac{c}{n\pi} + \frac{2c}{n\pi}\left[\left(\frac{c}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{c}\cdot x\right)\Big|_0^c - \frac{c}{n\pi}\int_0^c \sin\frac{n\pi x}{c}dx\right]\right\}$$

$$= \frac{2}{c}\left[-c^2(-1)^n\cdot\frac{c}{n\pi} + \frac{2c}{n\pi}\left(\frac{c}{n\pi}\cdot\frac{c}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{c}\right)\Big|_0^c\right]$$

$$= \frac{2}{c}\left(\frac{-c^3(-1)^n}{n\pi} + \frac{2c^3(-1)^n}{n^3\pi^3} - \frac{2c^3}{n^3\pi^3}\right)$$

$$= 2c^2\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{2}{n^3\pi^3}(1-(-1)^n)\right]$$

ومفكوك الدالة f على الفترة $(0,c)$، هو:

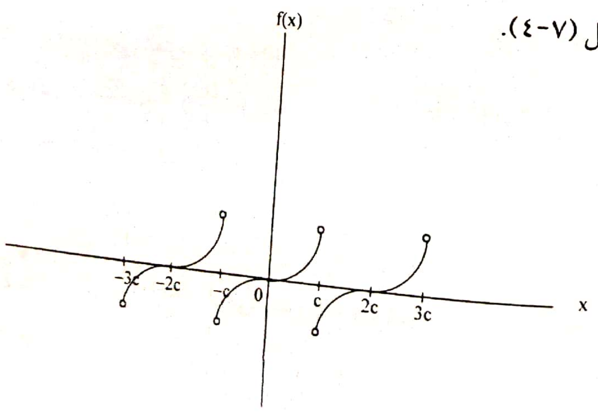
$$x^2 \sim 2c^2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{2}{n^3\pi^3}(1-(-1)^n)\right]\sin\frac{n\pi x}{c}, \quad 0<x<c \qquad (٧-٩)$$

بصرف النظر عن الفترة المعرفة عليها الدالة f، فإن السلسلة في الجانب الأيمن من (٧-٩)، تتقارب نحو الدالة الدورية Q، المعرفة بالشكل:

$$Q(x) = \begin{cases} f(x) & , \ c>x>0 \\ -f(-x) & , \ 0>x>-c \\ 0 & , \ x=0 \end{cases}$$

حيث: $Q(x+2c)=Q(x)$

الشكل (٧-٥)، يوضح بيان Q الدوري الذي نحصل عليه من بيان f شكل (٧-٤) ونظيرتها بالنسبة لنقطة الأصل وذلك بانسحابات بمقدار 2c باتجاه المحور x في الاتجاه اليمن والأيسر، شكل (٧-٤).



شكل (٧-٥)

لاحظ هنا أن:

$$Q(x) = 2c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{2}{n^3\pi^3}(1-(-1)^n) \right] \sin\frac{n\pi x}{c}$$

تدعى الدالة Q بالتمديد الدوري الفردي والذي دوره 2c للدالة:

$$f(x) = x^2 \quad , 0 < x < c$$

تـــمـــــــارين (٧–٢)

أوجد فيما يلي سلسلة الجيب لفوريه لكل من الدوال التالية، ثـم ارسـم بيـان الدالـة الذي يمثله مجموع فوريه الناتج.

١) $f(x) = 1$ (على الفترة $0 < x < c$)

الجواب: $f(x) \sim \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)\pi x / c]}{2k+1}$

٢) $f(x) = x^2$ (على الفترة $0 < x < c$)

الجواب: $f(x) \sim 2c^2 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{2\{1-(-1)^n\}}{n^3\pi^3} \right] \sin\frac{n\pi x}{c}$

٣) $f(x) = c - x$ (على الفترة $0 < x < c$)

الجواب: $f(x) \sim \dfrac{2c}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{n\pi x}{c}$

٤) $f(x) = x(c-x)$ (على الفترة $0 < x < c$)

الجواب: $f(x) \sim \dfrac{8c^2}{\pi^3} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)\pi x/c]}{(2k+1)^3}$

٥) $f(x) = \begin{cases} x & , \ 0 < x < 1 \\ 2-x & , \ 1 < x < 2 \end{cases}$ (على الفترة $0 < x < 2$)

الجواب: $f(x) \sim \dfrac{8}{\pi^2} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin[(2k+1)\pi x/2]$

٦) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \ 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1 & , \ \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$ (على الفترة $0 < x < 1$)

الجواب: $f(x) \sim \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi \right) \sin n\pi x$

٧) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \ 0 < x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} & , \ \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$ (على الفترة $0 < x < 1$)

الجواب: $f(x) \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{2\sin\{n\pi/2\}}{n^2\pi^2} \right] \sin n\pi x$

٨) $f(x) = \cos x$ (على الفترة $0 < x < \pi$)

الجواب: $f(x) \sim \dfrac{8}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin 2kx}{4k^2 - 1}$

٩) $f(x) = e^{-x}$ (على الفترة $0 < x < c$)

الجواب: $f(x) \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi[1-(-1)^n e^{-c}]\sin(n\pi x/c)}{c^2 + n^2\pi^2}$

١٠) $f(x) = x^4$ (على الفترة $0 < x < c$)

الجواب: $f(x) \sim \dfrac{2c^4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \left\{ \frac{1}{n} - \frac{12}{\pi^2 n^3} + \frac{24}{\pi^4 n^5} \right\} + \frac{24}{\pi^4 n^5} \right] \sin\frac{n\pi x}{c}$

١١) $f(x) = \begin{cases} x & , \ 0 < x < \frac{1}{2}c \\ 0 & , \ \frac{1}{2}c < x < c \end{cases}$ (على الفترة $0 < x < c$)

الجواب: $f(x) \sim \dfrac{c}{\pi^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2} \sin\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \cos\frac{n\pi}{2} \right) \sin\frac{n\pi x}{c}$

(٧–٣) سلاسل جيوب التمام لفوريه

بالمثل نريد هنا تمثيل الدالة f على الفترة (0,c) بسلسلة فوريه تحوي دوال جيوب التمام فقط ($b_n=0$).

لنعرف دالة g على الفترة (c,c−) بالصورة:

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & , \quad c>x>0 \\ f(-x) & , \quad 0>x>-c \end{cases}$$

من الملاحظ أن: $g(-x)=g(x)$، فالدالة g دالة زوجية.

إذن:

$$b_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c} g(x)\sin\frac{n\pi x}{c}dx=0, n=1,2,3,\dots$$

$$a_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c} g(x)\cos\frac{n\pi x}{c}dx=\frac{2}{c}\int_{0}^{c} g(x)\cos\frac{n\pi x}{c}dx$$

ومنه، نجد:

$$\begin{cases} f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum a_n\cos\frac{n\pi x}{c} & , \quad 0<x<c \\ a_n=\frac{2}{c}\int_{0}^{c} f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}dx \end{cases}$$

$$n=0,1,2,3,\dots$$

مثـــال (٧-٧)

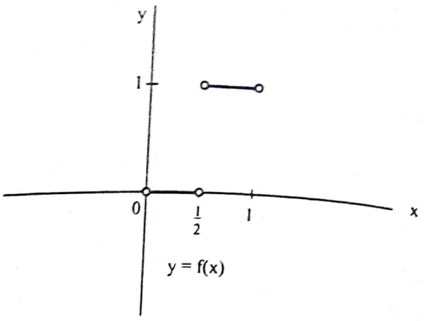
أوجد سلسلة جيب التمام لفورييه من أجل الدالة

$$f(x)=\begin{cases} 0 & , \quad 0<x<\frac{1}{2} \\ 1 & , \quad \frac{1}{2}<x<1 \end{cases}$$

الحل

$$a_n=\frac{2}{c}\int_{0}^{1} f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}dx$$

$$=2\int_{0}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx$$



شكل (٧-٦)

ومنه:

$$a_0=2\int_{\frac{1}{2}}^{1} dx=1$$

$$a_n=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\cos(n\pi x)dx$$

$$=2\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{-2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

إذن:

$$f(x)\sim\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\cos(n\pi x)\cdot\frac{1}{n}$$

لاحظ عندما n تنتمي للأعداد الزوجية، فإن $\sin\frac{n\pi}{2}=0$.

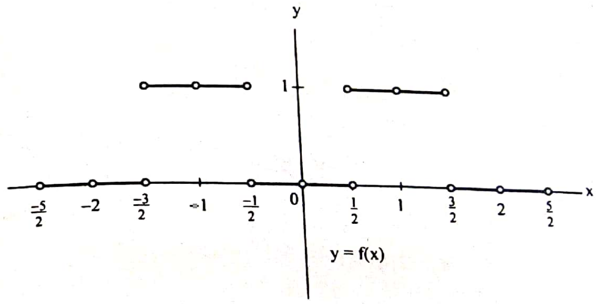
لنضع: $n=2k+1$ حيث: $k=0,1,2,\dots$ ، فنجد:

$$f(x)\sim\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}\cdot\cos(2k+1)\pi x\cdot\frac{1}{(2k+1)}$$

وبملاحظة أن: $\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}=(-1)^k$ ، فإن:

$$f(x)\sim\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)} \qquad (٧-١٠)$$

السلسلة اللانهائية في الجانب الأيمن من (٧-١٠) متقاربة نحو دالة ندعوها بالتمديد الدوري الزوجي والذي دوره 2 للدالة f. نحصل على منحني هذه الدالة من المنحني في الشكل (٧-٦) ونظيره بالنسبة للمحور y بانسحابات متتالية بمقدار 2 باتجاه المحور x في الاتجاه الأيمن والأيسر.



شكل (٧-٧)

تمارين (٧-٣)

أوجد فيما يلي سلسلة جيب التمام لفورييه لكل من الدوال التالية، ثم ارسم بيان الدالة الذي يمثله مجموع فورييه الناتج.

١) $f(x)=\begin{cases} x & , \ 0<x<1 \\ 2-x & , \ 1<x<2 \end{cases}$ (على الفترة $0<x<2$)

الجواب: $f(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2}-1-(-1)^n\right]\cos\frac{n\pi x}{2}$

٢) $f(x)=(x-1)^2$ (على الفترة $0<x<1$)

الجواب: $f(x)\sim\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi x}{n^2}$

٣) $f(x)=x(c-x)$ (على الفترة $0<x<c$)

الجواب: $f(x)\sim\frac{c^2}{6}-\frac{c^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k\pi x/c)}{k^2}$

٤) $f(x)=\begin{cases} 0 & , \ 0<x<\frac{1}{2} \\ 1 & , \ \frac{1}{2}<x<1 \end{cases}$ (على الفترة $0<x<1$)

الجواب: $f(x)\sim\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos[(2k+1)\pi x]}{2k+1}$

٥) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}-x & , \ 0<x<\frac{1}{2} \\ 0 & , \ \frac{1}{2}<x<1 \end{cases}$ (على الفترة $0<x<1$)

الجواب: $f(x)\sim\frac{1}{8}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\cos n\pi x$

٦) $f(x)=\begin{cases} x & , \ 0<x<\frac{1}{2}c \\ 0 & , \ \frac{1}{2}c<x<c \end{cases}$ (على الفترة $0<x<c$)

الجواب: $f(x)\sim\frac{c}{8}+\frac{c}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}[n\pi\sin\frac{1}{2}n\pi-2(1-\cos\frac{1}{2}n\pi)]\cos\frac{n\pi x}{c}$

٧) $f(x)=\cosh kx$ (على الفترة $0<x<c$)

الجواب: $f(x)\sim\frac{\sinh kc}{kc}+\sinh kc\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2kc(-1)^n}{(kc)^2+(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$

٨) $f(x)=\sinh kx$ (على الفترة $0<x<c$)

الجواب: $f(x)\sim\frac{\cosh kc-1}{kc}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2kc[(-1)^n\cosh kc-1]}{(kc)^2+(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{c}$