الفصل الرابع

# الاستكمال

# Interpolation

ليكن لدينا النقاط المختلفة $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)\}$ والتي عددها $n+1$، بحيث إن $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ وأننا لا نعرف التعبير الفعلي للدالة $y = f(x)$ والتي يحتوي منحناها على هذه النقاط. ما نريده هو إيجاد قيمة الدالة $f$ عند نقطة عشوائية.

يمكن تقريب الدالة $f(x)$ من أجل قيمة عشوائية لـ $x$ برسم منحنى يمر خلال النقاط المذكورة، بعبارة أخرى، نوجد دالة تمر بهذه النقاط. الاستكمال هو الأسلوب الذي يوجد هذه الدالة، ويعد من الأساليب الرياضية المهمة والمستخدمة في الكثير من المواقف في حياتنا اليومية.

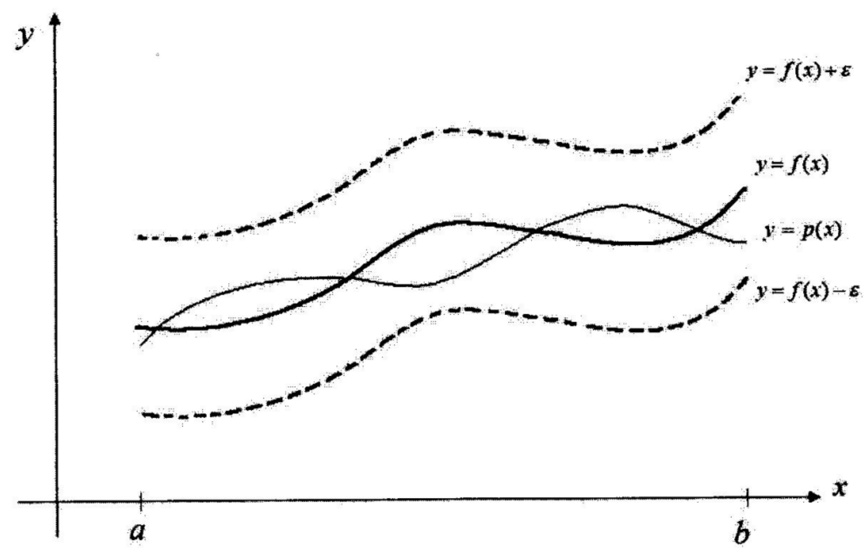
## (٤,١) الاستكمال بواسطة كثيرات الحدود

**Polynomial Interpolation**

لقد أثبت رستراس (Weierstrass) عام ١٨٨٦م ضمان تقريب دالة متصلة بواسطة كثيرة حدود، كما تنص عليه نظريته المشهورة:

**نظرية (٤,١) (نظرية رستراس التقريبية)**

لتكن $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ و $\varepsilon > 0$ عدد معطى، فإنه يوجد كثيرة حدود $p(x)$ بحيث إن $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$ لكل $x\in[a,b]$.



## (٤,٢) كثيرة حدود لاغرانج

**Lagrange polynomial**

**قانون النقطتين:**

لتكن $f(x)$ دالة معرفة عند العددين المختلفين $x_0$ و $x_1$ ونريد أن نكوّن كثيرة حدود $p(x)$ من الدرجة الأولى والتي توافق هذه الدالة عند العددين المذكورين. بعبارة أخرى، نحن نريد تكوين كثيرة حدود تمر بالنقطتين $(x_0, f(x_0))$ و $(x_1, f(x_1))$.

يمكن تمثيل هذا المستقيم بكثيرة الحدود الخطية.

$$p(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \qquad (4.4)$$

حيث إنه إذا وضعنا $x = x_0$ في المعادلة فإنه يكون لدينا:

$$p(x_0) = \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x_0 - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) = f(x_0)$$

وعندما نضع $x = x_1$ نحصل على $p(x_1) = f(x_1)$.

لنرمز لحاصل القسمة الموجود في المعادلة (4.4) بالرمز:

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \quad \text{و} \quad L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

فإن كثيرة الحدود (4.4) تأخذ الشكل:

$$p(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) \tag{4.5}$$

ومنه يمكن استنتاج أن $L_0(x_0) = 1$، $L_0(x_1) = 0$، $L_1(x_1) = 1$ و $L_1(x_0) = 0$.

## قانون لاغرانج العام :

الآن ليكن لدينا الأعداد المختلفة $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ والتي عددها $n+1$ وأن الدالة $f(x)$ معرفة عند هذه الأعداد. هنا نريد تكوين كثيرة حدود $p(x)$ ذات الدرجة $n$ على الأكثر والتي توافق الدالة $f(x)$ عند الأعداد المذكورة، أي أنها تحقق $p(x_i) = f(x_i)$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$.

لاستنتاج كثيرة الحدود هذه، فإننا نكوّن حاصل القسمة $L_k(x)$ الذي يحقق الشرطين:

$$L_k(x_k) = 1, \qquad k = 0,1,2,\ldots,n$$

$$L_k(x_i) = 0, \qquad k \neq i$$

وبناء على ذلك، فإن $L_k(x)$ ينبغي أن يكون من الشكل:

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} = \prod_{\substack{i=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

يمكن الآن كتابة كثيرة الحدود ذات الدرجة $n$ على الأكثر والتي تستكمل الدالة $f(x)$ عند الأعداد المختلفة $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ بالشكل:

$$p(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + \cdots\cdots + L_n(x) f(x_n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k) \tag{4.9}$$

تسمى كثيرة الحدود المعرفة في المعادلة (4.9) كثيرة حدود لاغرانج الاستكمالية وهي وحيدة كما تنص عليه النظرية التالية.

**نظرية (٤,٢)**

لتكن $f(x)$ دالة معرفة عند الأعداد المختلفة $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ والتي عددها $n+1$، فإنه يوجد كثيرة حدود وحيدة $p(x)$ ذات الدرجة $n$ على الأكثر والتي توافق الدالة $f(x)$ عند الأعداد المذكورة.

**البرهان:**

من الواضح أن $L_k(x)$ ، من أجل $k = 0,1,2,\ldots,n$ عبارة عن كثيرات حدود من الدرجة $n$ وبالتالي فإن كثيرة الحدود $p(x)$ والمعرفة في المعادلة (4.9) تكون من الدرجة $n$ على الأكثر.

لإثبات أن كثيرة الحدود وحيدة، لنفترض أن لدينا كثيرتي حدود $p(x)$ و $q(x)$ من الدرجة $n$

على الأكثر وتحققان $p(x_i) = f(x_i)$ و $q(x_i) = f(x_i)$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$.
هذا يعني أن لدينا كثيرتي حدود من الدرجة $n$ على الأكثر ومتساويتان عند الأعداد المختلفة $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ والتي عددها $n+1$.
وبما أن $n+1 > n$ فإن $p(x) = q(x)$ لكل $x$ وذلك حسب النظرية (٢,١٤) والموجودة في البند (٢,٩). وهذا يثبت أن كثيرة الحدود $p(x)$ وحيدة.

**مثال (٤,٢)**

أوجد كثيرة الحدود الاستكمالية $p(x)$ والتي تستكمل الدالة $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ عند الأعداد $x_0=3$ ، $x_1=3.5$ و $x_2=4.5$ . ثم احسب قيمة $p(4)$ وقارنها مع $f(4)$ .

بما أنه لدينا ثلاثة أعداد مختلفة فإن كثيرة الحدود التي بين أيدينا تكون بالشكل:

$$p(x)=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)+L_2(x)f(x_2)$$

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-3.5)(x-4.5)}{(3-3.5)(3-4.5)}=\frac{4}{3}(x^2-8x+15.75)$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-3)(x-4.5)}{(3.5-3)(3.5-4.5)}=-2(x^2-7.5x+13.5)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-3)(x-3.5)}{(4.5-3)(4.5-3.5)}=\frac{2}{3}(x^2-6.5x+10.5)$$

$$p(x)=\frac{4}{3}(x^2-8x+15.75)-\frac{4}{3}(x^2-7.5x+13.5)+\frac{4}{15}(x^2-6.5x+10.5)$$
$$=\frac{4}{15}x^2-\frac{12}{5}x+\frac{29}{5}$$

بوضع $x=4$ حصلنا على $p(4)=0.466667$ وحيث إن $f(4)=0.5$ فإن $|f(4)-p(4)|=\frac{1}{30}$ وهو الخطأ المضبوط المتعلق بتقريب الدالة $f(x)$ بكثيرة الحدود $p(x)$ عند $x=4$.

**نظرية (٤,٣)**

لتكن $f\in C^{n+1}[a,b]$ حيث إن الفترة $[a,b]$ تحتوي على الأعداد المختلفة $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$ ، فإنه لأي $x$ في $[a,b]$ يوجد عدد $\eta(x)$ في $(a,b)$ ويحقق:

$$f(x)-p(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\eta(x))\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \tag{4.11}$$

حيث إن $p(x)$ هي كثيرة حدود لاغرانج الاستكمالية.

**مثال (٤,٣)**

بالنسبة للدالة و كثيرة الحدود الموجودتين في المثال (٤,٢) سوف نحسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب $p(4)$ . بداية، بما أن $n = 2$ ، فإنه يكون لدينا:

$$|f(4) - p(4)| \leq \frac{1}{3!} |(4-3)(4-3.5)(4-4.5)| \max_{x\in[3,4.5]} |f'''(x)|$$

لاحظ هنا أنه تم اعتبار $x_0 = 3$ و $x_2 = 4.5$ على أنهما طرفي الفترة $[a,b]$.

الآن بما أن $f'''(x) = \dfrac{6}{(x-2)^4}$ فإن $\max_{x\in[3,4.5]} \left|\dfrac{6}{(x-2)^4}\right| = 6$ وبالتالي يكون لدينا

$$|f(4) - p(4)| \leq \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times 6 = \frac{1}{4}$$

وهذا يعني أن الحد الأعلى للخطأ المتعلق بالتقريب المذكور هو 0.25.

## (٤,٣) فـروق الـقــسـمـة

**Divided Differences**

يمكن كتابة كثيرة حدود لاغرانج الخطية (4.1) بالشكل المساوي:

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

حيث إن حاصل القسمة:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{4.13}$$

يسمى فرق القسمة ذو الرتبة الأولى للدالة $f(x)$ بالنسبة للعددين $x_0$ و $x_1$ .

ليكن لدينا ثلاثة أعداد مختلفة $x_0$ ، $x_1$ و $x_2$ وأن الدالة $f(x)$ معرفة عند هذه الأعداد وبالتالي توجد كثيرة حدود لاغرانج تربيعية $p(x)$ تستكمل هذه الدالة عند الأعداد المذكورة. يمكن كتابة $p(x)$ بالشكل:

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}(x - x_0)(x - x_1)$$

حيث إن حاصل القسمة:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \tag{4.14}$$

يسمى فرق القسمة ذو الرتبة الثانية للدالة $f(x)$ بالنسبة للأعداد $x_0$ ، $x_1$ و $x_2$ .

لاحظ أن :
$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

هو فرق القسمة ذو الرتبة الأولى للدالة $f(x)$ بالنسبة للعددين $x_1$ و $x_2$ . كما نشير إلى أن $f[x_0] = f(x_0)$ هو فرق القسمة الصفري للدالة $f(x)$ بالنسبة للعدد $x_0$ ،

**تعريف (٤,١)**

فرق القسمة ذو الرتبة $k$ من أجل $k = 1,2,\ldots,n$ للدالة $f(x)$ بالنسبة للأعداد المختلفة $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n-k$ معرّف بالتالي:

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \qquad (4.15)$$

حيث إن $f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]$ و $f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]$ هي فروق القسمة ذات الرتبة $k-1$.

بناء على ما سبق، إذا كانت $p_n(x)$ كثيرة حدود لاغرانج ذات الدرجة $n$ والتي تستكمل الدالة $f(x)$ عند الأعداد المختلفة $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$، فإنه يمكن كتابة $p_n(x)$ بالشكل:

$$
\begin{aligned}
p_n(x) &= f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots \\
&\quad \cdots + f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \\
&= f[x_0]+\sum_{k=1}^{n} f[x_0,x_1,\ldots,x_k](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}) \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

والذي يُعرف بصيغة فروق القسمة الاستكمالية لنيوتن. من الواضح أن كتابة كثيرة الحدود $p_n(x)$ بالشكل (4.16) يتطلب معرفة فروق القسمة المشار إليها في هذه المعادلة. الجدول رقم (٤,٢) يوضح كيفية إيجاد فروق القسمة من معلومات مجدولة،

| $x$ | $f(x)$ | | |
|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f[x_0]$ | | |
| | | $f[x_0,x_1]=\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$ | |
| $x_1$ | $f[x_1]$ | | $f[x_0,x_1x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$ |
| | | $f[x_1,x_2]=\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$ | |
| $x_2$ | $f[x_2]$ | | $f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$ |
| | | $f[x_2,x_3]=\dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$ | |
| $x_3$ | $f[x_3]$ | | $f[x_2,x_3,x_4]=\dfrac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

**مثال (٤,٥)**

استخدم صيغة فروق القسمة لنيوتن (4.16) لإيجاد كثيرة الحدود التكعيبية $p_3(x)$ والتي توافق الدالة $f(x)$ عند القيم $f(1)=3$ ، $f(1.2)=2.5$ ، $f(1.6)=1.8$ و $f(2)=1.2$ . ثم استخدمها لحساب قيمة تقريبية للدالة $f(x)$ عند $x=1.3$ .

بداية نكتب جدول فروق القسمة لهذه المسألة،

وباستخدام صيغة فروق القسمة لنيوتن (4.16) مع $n=3$ نحصل على:

$$p_3(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$= 3 - 2.5(x-1) + 1.25(x-1)(x-1.2) - 0.9375(x-1)(x-1.2)(x-1.6)$$

| $x$ | $f(x)$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | | | |
| | | $\frac{2.5-3}{1.2-1}=-2.5$ | | |
| 1.2 | 2.5 | | $\frac{-1.75+2.5}{1.6-1}=1.25$ | |
| | | $\frac{1.8-2.5}{1.6-1.2}=-1.75$ | | $\frac{0.3125-1.25}{2-1}=-0.9375$ |
| 1.6 | 1.8 | | $\frac{-1.5+1.75}{2-1.2}=0.3125$ | |
| | | $\frac{1.2-1.8}{2.-16}=-1.5$ | | |
| 2.0 | 1.2 | | | |

وللحصول على قيمة تقريبية لـ $f(1.3)$ نضع $x=1.3$ في $p_n(x)$ حيث يكون لدينا:

$$\begin{aligned} p_3(1.3) &= 3-2.5(0.3)+1.25(0.3)(0.1)-0.9375(0.3)(0.1)(-0.3) \\ &= 2.2959 \end{aligned}$$

**نظرية (٤,٤)**

لتكن $n \geq 1$ ولنفترض أن الدالة $f(x)$ ذات تفاضلات متصلة عددها $n$ على الفترة $[a,b]$. ولتكن الأعداد المختلفة $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ والتي عددها $n+1$ موجودة في الفترة $[a,b]$. فإنه يوجد عدد $\eta$ في الفترة $(a,b)$ بحيث إن

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\eta)}{n!} \tag{4.17}$$

## (٤,٤) طرائق الفترات المتساوية

**Equally Spaced Intervals**

إذا كانت المسافات بين الأعداد المختلفة $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ متساوية، فإنه يمكن تبسيط الصيغة (4.16). سوف ندرس في هذا البند بعض الصيغ المبسطة والتي سنحتاجها في الفصل الخامس عندما نناقش التفاضل والتكامل العددي.

لنفترض أن الأعداد المختلفة $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ مرتبة تصاعدياً ومعرفة بالتالي:

$x_i = x_0 + ih$ ، $i = 0,1,2,\ldots,n$ و $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$.

بوضع $s = \dfrac{x - x_0}{h}$ فإننا نحصل على $x - x_i = (s-i)h$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$.

باستخدام هذه الرموز فإنه يمكن كتابة صيغة نيوتن الاستكمالية (4.16) بالشكل:

$$p_n(x) = p_n(x_0 + sh) = f[x_0] + shf[x_0, x_1] + s(s-1)h^2 f[x_0, x_1, x_2] \qquad (4.19)$$
$$+ \cdots + s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1)h^n f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$
$$= f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} s(s-1)\cdots(s-i+1)h^i f[x_0, x_1, \ldots, x_i]$$

تسمى هذه المعادلة صيغة فروق القسمة الأمامية لنيوتن. في الواقع يمكن كتابة المعادلة (4.19) بشكل مبسط وذلك باستخدام الفروق الأمامية والمعرّفة بالتالي:

١ – الفرق الأمامي ذو الرتبة الأولى هو:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

٢ – الفرق الأمامي ذو الرتبة الثانية معرّف بـ :

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x+h) - f(x))$$
$$= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

٣- وبشكل عام، يمكن إثبات أن الفرق الأمامي ذو الرتبة $n \geq 1$ يأخذ الشكل:

$$\Delta^n f(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i f(x + (n-i)h)$$

الآن يمكن كتابة فروق القسمة المعرّفة في البند (٤,٣) باستخدام الفروق الأمامية كما يلي:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f(x_0)}{h}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\dfrac{\Delta f(x_1)}{h} - \dfrac{\Delta f(x_0)}{h}}{2h}$$

$$= \frac{\Delta(f(x_0 + h) - f(x_0))}{2h^2} = \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2}$$

ويشكل عام يكون لدينا:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n! h^n} \tag{4.21}$$

وباستخدام هذه الصيغ لفروق القسمة يمكن كتابة كثيرة الحدود المعرفة بالمعادلة (4.19) بالشكل المبسط:

$$p_n(x) = p_n(x_0 + sh) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-i+1)}{i!} \Delta^i f(x_0) \tag{4.22}$$

تسمى هذه المعادلة بصيغة الفروق الأمامية لنيوتن والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$p_n(x) = p_n(x_0 + sh) = \sum_{i=0}^{n} \binom{s}{i} \Delta^i f(x_0) \tag{4.23}$$

حيث إن:

$$\binom{s}{i} = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ \dfrac{s(s-1)\cdots(s-i+1)}{i!}, & i \neq 0 \end{cases} \tag{4.24}$$

يتضح من المعادلة (4.22) أنه لم تعد هناك حاجة لحساب جدول فروق القسمة. بالمقابل، فإن هذه المعادلة تتطلب حساب جدول الفروق (الجدول رقم ٤,٤) والذي لا يحتاج إلى عمليات قسمة.

الجدول رقم (٤,٤). الفروق الأمامية للدالة $f(x)$ .

| $x_i$ | $f(x_i)$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f(x_0)$ | | | |
| | | $\Delta f(x_0)$ | | |
| $x_1$ | $f(x_1)$ | | $\Delta^2 f(x_0)$ | |
| | | $\Delta f(x_1)$ | | $\Delta^3 f(x_0)$ |
| $x_2$ | $f(x_2)$ | | $\Delta^2 f(x_1)$ | |
| | | $\Delta f(x_2)$ | | |
| $x_3$ | $f(x_3)$ | | | |

**مثال (٤,٦)**

اعتبر الدالة $f(x)=\sinh x$ عند الأعداد $x_i = 1 + 0.2i$ من أجل $i = 0,1,2,3$. سوف نستخدم الصيغتين (4.19) و (4.22) لكتابة كثيرة الحدود الاستكمالية $p_3(x)$ والتي تستكمل الدالة $f(x)=\sinh x$ عند الأعداد المذكورة ثم نستخدمها لحساب قيمة تقريبية لـ $f(1.1)$.

لاستخدام الصيغة (4.19) نحسب أولاً فروق القسمة للدالة $f(x)=\sinh x$ كما هو موضحة في الجدول رقم (٤,٥).

الجدول رقم (٤,٥) فروق القسمة للدالة $f(x) = \sinh x$ .

| $x$ | $f(x)$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.17520 | | | |
| | | 1.6713 | | |
| 1.2 | 1.50946 | | 0.75725 | |
| | | 1.9742 | | 0.33017 |
| 1.4 | 1.90430 | | 0.95535 | |
| | | 2.35634 | | |
| 1.6 | 2.37557 | | | |

وحيث إن $h = 0.2$ فإننا نجد أن:

$$p_3(x) = p_3(1+0.2s) = 1.17520 + 0.2(1.6713)s + (0.2)^2(0.75725)s(s-1)$$
$$+ (0.2)^3(0.33017)s(s-1)(s-2)$$

و لحساب قيمة تقريبية لـ $f(1.1)$ ، فإنه يكون لدينا $s=\frac{1.1-1}{0.2}=0.5$ و

$$p_3(1.1)=1.17520+0.2(1.6713)0.5+(0.2)^2(0.75725)0.5(-0.5)$$
$$+(0.2)^3(0.33017)0.5(-0.5)(-1.5)$$
$$=1.33574$$

وبما أن $f(1.1)=1.33565$ فإن الخطأ المضبوط المتعلق بهذا التقريب هو $|f(1.1)-p_3(1.1)|=9\times10^{-5}$.

من ناحية أخرى، لاستخدام صيغة الفروق الأمامية لنيوتن (4.22) فإننا نوجد قيم الفروق الأمامية للدالة $f(x)=\sinh x$ والموضحة في الجدول رقم (٤,٦)

الجدول رقم (٤,٦). الفروق الأمامية للدالة $f(x) = \sinh x$ .

| $x$ | $f(x)$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.17520 | | | |
| | | 0.33426 | | |
| 1.2 | 1.50946 | | 0.06058 | |
| | | 0.39484 | | 0.01585 |
| 1.4 | 1.90430 | | 0.07643 | |
| | | 0.47127 | | |
| 1.6 | 2.37557 | | | |

ثم نستخدمها في الصيغة (4.22) للحصول على:

$$p_3(x) = p_3(1+0.2s) = 1.17520 + 0.33426s + 0.06058\frac{s(s-1)}{2!} + 0.01585\frac{s(s-1)(s-2)}{3!}$$

وبوضع $s = 0.5$ نحصل على $p_3(1.1) = 1.33572$ وهي القيمة التقريبية لـ $f(1.1)$. الخطأ المضبوط المرافق لهذا التقريب هو $|f(1.1) - p_3(1.1)| = 7\times10^{-5}$. نشير هنا إلى أن الاختلاف البسيط في قيم الأخطاء المتعلقة بالصيغتين ناتج عن تأثير أخطاء التدوير الحسابية. يمكن حساب حداً أعلى للخطأ باستخدام المعادلة (4.18) حيث حصلنا على $|f(1.1) - p_3(1.1)| \le 1.5\times10^{-4}$.

## صيغة الفروق الخلفية لنيوتن

الآن، وبشكل مشابه، يمكن استنتاج صيغ نيوتن الخلفية. إذا افترضنا أنه قد تم ترتيب أعداد الاستكمال بشكل تنازلي، أي أن $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1, x_0$ ، فإن كثيرة الحدود الاستكمالية $p_n(x)$ تأخذ الشكل:

$$p_n(x) = f[x_n] + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) + f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots$$
$$\cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1) \tag{4.25}$$

وإذا كان $x_i = x_0 + ih$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$ و $s = \dfrac{x - x_n}{h}$ حيث إن $h$ كما هي معرفة سابقاً، فإننا نحصل على $x - x_i = (s + n - i)h$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n$.

وبالتعويض في (4.25) يكون لدينا صيغة فروق القسمة الخلفية لنيوتن والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$\begin{aligned} p_n(x) = p_n(x_n + sh) &= f[x_n] + shf[x_{n-1}, x_n] + s(s+1)h^2 f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] + \\ &\cdots + s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)h^n f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \\ &= f[x_n] + \sum_{i=1}^{n} s(s+1)\cdots(s+i-1)h^i f[x_{n-i}, \ldots, x_i] \end{aligned} \tag{4.26}$$

كذلك يمكن كتابة الصيغة (4.26) بشكل مبسط وذلك باستخدام الفروق الخلفية والمعرفة بالتالي:

١ - الفرق الخلفي ذو الرتبة الأولى هو:

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

٢- الفرق الخلفي ذو الرتبة الثانية معرّف بـ :

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x) = \nabla(\nabla f(x)) &= \nabla(f(x) - f(x-h)) \\ &= f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)\end{aligned}$$

٣- بشكل عام فإنه من أجل $i \geq 2$ يكون لدينا $\nabla^i f(x) = \nabla^{i-1}(\nabla f(x))$.

ستخدام هذا التعريف نحصل على:

$$f[x_{n-1}, x_n] = \frac{1}{h}\nabla f(x_n)$$

$$f[x_{,n-2}, x_{n-1}, x_n] = \frac{1}{2h^2}\nabla^2 f(x_n)$$

وبشكل عام من أجل $i \geq 1$ يكون لدينا:

$$f[x_{,n-i}, \ldots, x_n] = \frac{1}{i!h^i}\nabla^i f(x_n)$$

بناء على ذلك، يمكن كتابة (4.26) بالشكل المبسط:

$$p_n(x) = p_n(x_n + sh) = f[x_n] + \sum_{i=1}^{n} \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+i-1)}{i!} \nabla^i f(x_n) \tag{4.27}$$

وباستخدام العلاقة (4.24) يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل:

$$p_n(x) = p_n(x_n + sh) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{-s}{i} \nabla^i f(x_n) \tag{4.28}$$

تسمى المعادلة (4.28) (أو (4.27)) صيغة الفروق الخلفية لنيوتن الاستكمالية. الجدول رقم (٤,٧) يتضمن الفروق الخلفية للدالة $f(x)$ بالنسبة للأعداد $x_0, x_1, x_2, \ldots$ .

الجدول رقم (٤,٧). الفروق الخلفية للدالة $f(x)$ .

| $x_i$ | $f(x_i)$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f(x_0)$ | | | |
| | | $\nabla f(x_0)$ | | |
| $x_1$ | $f(x_1)$ | | $\nabla^2 f(x_0)$ | |
| | | $\nabla f(x_1)$ | | $\nabla^3 f(x_3)$ |
| $x_2$ | $f(x_2)$ | | $\nabla^2 f(x_1)$ | |
| | | $\nabla f(x_2)$ | | |
| $x_3$ | $f(x_3)$ | | | |

**مثال (٤,٧)**

اعتـــبر الدالـــة $f(x) = \sinh x$ عنـــد الأعـــداد $x_i = 1 + 0.2i$ مـــن أجـــل $i = 0,1,2,3$ . ســـوف نـــستخدم الـــصيغتين (4.26) و (4.28) لكتابـــة كثـــيرة الحـــدود الاستكمالية $p_3(x)$ والتي تستكمل الدالة $f(x) = \sinh x$ عند الأعداد المذكورة ثـم نستخدمها لحساب قيمة تقريبية لـ $f(1.5)$ .

بداية نلاحظ أنه من أجل استخدام العلاقة (4.26) فإننا نحتاج إلى فروق القسمة للدالة $f(x) = \sinh x$ عند الأعداد $x_i = 1 + 0.2i$ ، $i = 0,1,2,3$ . هذه المعلومات موجودة في الجدول (٤,٤). إذن يكون لدينا كثيرة الحدود:

$$p_3(x) = p_3(1.6 + 0.2s) = 2.37557 + 0.2(2.35634)s + (0.2)^2(0.95535)s(s+1)$$
$$+ (0.2)^3(0.33017)s(s+1)(s+2)$$

وبوضع $x = 1.5$ نحصل على $p_3(1.5) = 2.129392$ وهو التقريب المطلوب لـ $f(1.5)$ .

نشير هنا إلى أنه عندما وضعنا $x = 1.5$ فإنه أصبح لدينا $s = -\frac{1}{2}$ .

من ناحية أخرى، فإنه لاستخدام الصيغة (4.28) يتوجب علينا حساب جدول الفروق الخلفية للدالة $f(x) = \sinh x$ عند الأعداد المعطاة. الجدول رقم (٤,٨) يتضمن هذه الفروق.

الجدول رقم (٤,٨). الفروق الخلفية للدالة $f(x) = \sinh x$ .

| $x$ | $f(x)$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.17520 | | | |
| | | 0.33426 | | |
| 1.2 | 1.50946 | | 0.06058 | |
| | | 0.39484 | | 0.01585 |
| 1.4 | 1.90430 | | 0.07643 | |
| | | 0.47127 | | |
| 1.6 | 2.37557 | | | |

يتضح من الجدولين رقمي (٤,٦ و ٤,٨) أن الفروق الأمامية والخلفية للدالة $f(x) = \sinh x$ بالنسبة للأعداد $x_i = 1 + 0.2i$ ، $i = 0,1,2,3$ متساوية. وهذا صحيح بشكل عام، انظر تعريفي الفروق الأمامية والخلفية. الآن باستخدام الصيغة (4.28) يكون لدينا:

$$p_3(x) = p_3(1.6 + 0.2s) = 2.37557 + 0.47127s$$
$$+ 0.07643\frac{s(s+1)}{2!} + 0.01585\frac{s(s+1)(s+2)}{3!}$$

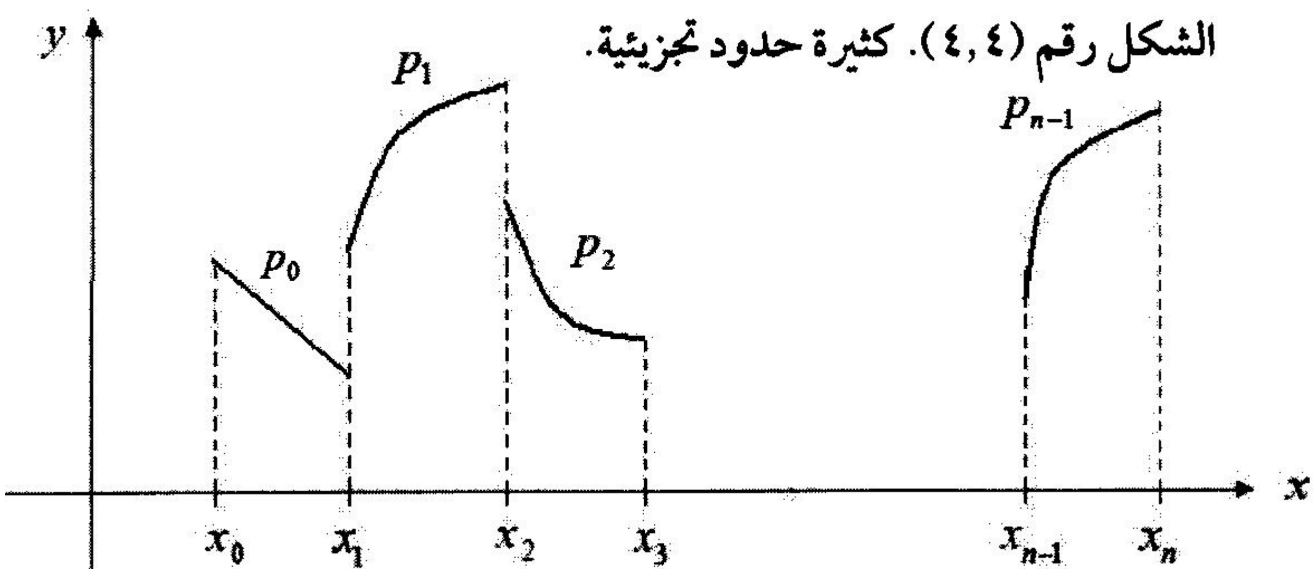
وبوضع $s = -\frac{1}{2}$ نحصل على $p_3(1.5) = 2.129391$ وهي قيمة تقريبية لـ $f(1.5)$ . كما هو بالنسبة للمثال (٤,٦) فإنه يمكن حساب الأخطاء المضبوطة وحداً أعلى للخطأ ولكننا نترك ذلك للقارئ.

## (٤,٦) الاستكمال باستخدام دالة الشريحة
**Spline Interpolation**

يتضح من البنود السابقة أن درجة كثيرة الحدود الاستكمالية تتزايد مع زيادة عدد نقاط الاستكمال، كما أنه يتم وصف كثيرة الحدود الاستكمالية بدالة واحدة والتي تـقُرب كل القيم المجدولة لدالة ما $f(x)$ . بناء على ذلك، فإن أي عدم استقرار في جزء صغير من مجال الاستكمال يؤثر وبشكل مباشر على كل المجال. أحد الطرائق المشهورة لمعالجة هذه المشكلة هي تجزئة فترة الاستكمال إلى فترات صغيرة وإيجاد كثيرة حدود مختلفة (ذات درجة أقل) والتي تستكمل القيم المعطى على كل فترة صغيرة. وبالتالي، فإن الدالة التقريبية هي عبارة عن تجميع من دوال كثيرات حدود استكمالية والتي تُقرب أجزاء مختلفة من القيم المعطاة.

ليكن لدينا الفترة $[a,b]$ بحيث إن $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$، ولتكن $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ كثيرات حدود من الدرجة $m$ على الأكثر. فإن الدالة $q(x)$ والتي تحقق $q(x) = p_i(x)$ لكل $x \in [x_i, x_{i+1}]$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n-1$ تسمى دالة كثيرة حدود تجزيئية ذات الدرجة $m$ على الأكثر على الفترة $[a,b]$. تسمى الأعداد $x_0, x_1, \ldots, x_n$ عُقد الدالة $q(x)$. يوضح الشكل رقم (٤،٤) دالة كثيرة حدود تجزيئية.

الشكل رقم (٤،٤). كثيرة حدود تجزيئية.



## دالة الشريحة الخطية

نشير هنا إلى أن دالة الشريحة الخطية هي أبسط كثيرة حدود تجزيئية والتي نستعرضها فيما يلي:

لنعتبر الدالة $f(x)$ معرّفة عند الأعداد المختلفة $x_0, x_1, \ldots, x_n$ وأننا نريد كتابة كثيرة حدود تجزيئية خطية لتقريب هذه الدالة. إذا استخدمنا خط مستقيم على كل فترة صغيرة $[x_i, x_{i+1}]$، $i = 0,1,2,\ldots,n-1$ (الشكل رقم ٤,٥) فإننا نستطيع استكمال الدالة $f(x)$ عند الأعداد المذكورة بواسطة كثيرة حدود تجزيئية ، حيث إن:

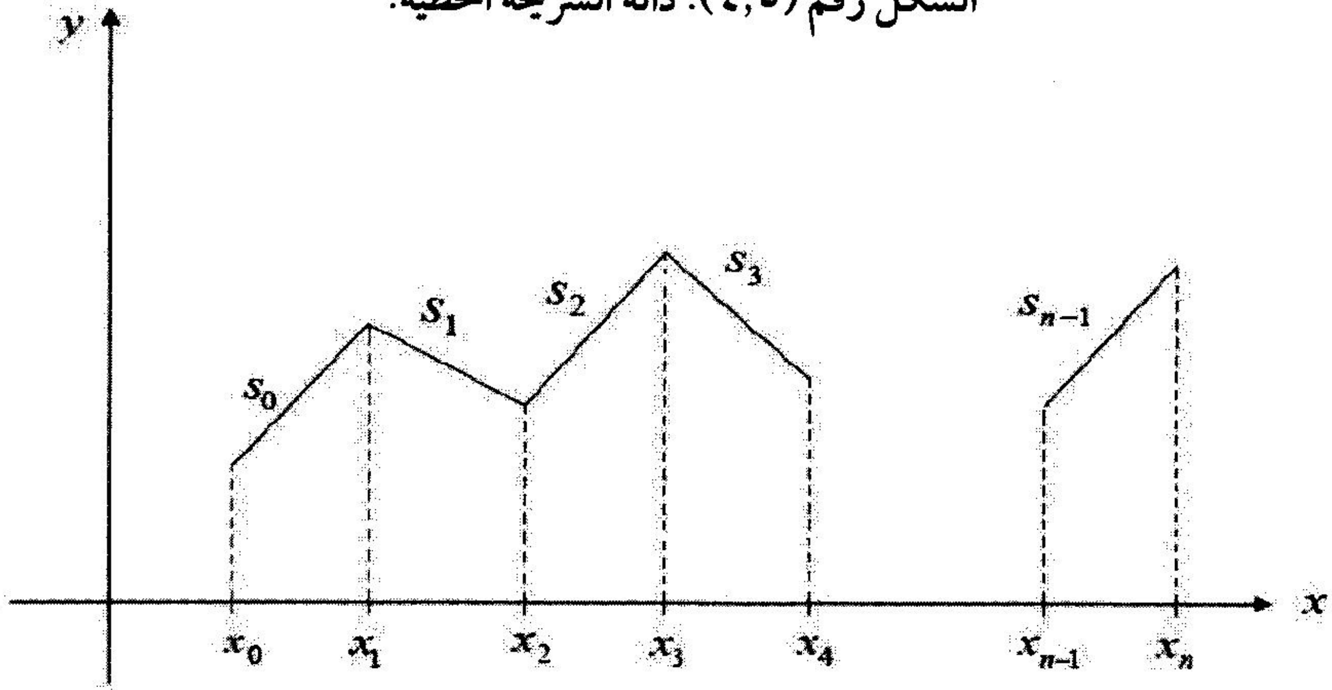
$$s(x) = p_i(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(x_{i+1})$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل (4.56) كما يلي :

$$s(x) = a_{i0} + a_{i1}(x - x_i) \tag{4.57}$$

حيث إن $a_{i0} = f(x_i)$ و $a_{i1} = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$ من أجل $i = 0,1,2,\ldots,n-1$.

الشكل رقم (٤,٥). دالة الشريحة الخطية.



**مثال (٤,٩)**

اعتبر الدالة $f(x)=\sinh x$ عند الأعداد $x_i=1+0.2i$ من أجل $i=0,1,2,3$. أوجد دالة الشريحة الخطية التي تستكمل هذه الدالة عند الأعداد المذكورة. ثم استخدمها لحساب أفضل قيم تقريبية لـ $\sinh(x)$ عندما $x=1.1$ و $x=1.45$.

**الحل:**

بداية نلاحظ أنه لدينا الفترات الصغيرة $[x_0,x_1]$، $[x_1,x_2]$ و $[x_2,x_3]$ حيث إن $x_0=1$ ، $x_1=1.2$ ، $x_2=1.4$ و $x_3=1.6$ ، وبالتالي نحصل على:

$$a_{00}=f(1)=1.17520,\quad a_{10}=f(1.2)=1.50946,\quad a_{20}=f(1.4)=1.90430$$

$$a_{01}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{1.50946-1.17520}{1.2-1.0}=1.6713$$

$$a_{11} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1.90430 - 1.50946}{1.4 - 1.2} = 1.9742$$

$$a_{21} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{2.37557 - 1.90430}{1.6 - 1.4} = 2.35634$$

وباستخدام العلاقة (4.57) يكون لدينا:

$$s(x) = \begin{cases} 1.17520 + 1.67130(x - 1.0), & x \in [1, 1.2] \\ 1.50946 + 1.97420(x - 1.2), & x \in [1.2, 1.4] \\ 1.90430 + 2.35634(x - 1.4), & x \in [1.4, 1.6] \end{cases}$$

الآن بما أن $x = 1.1$ تقع في الفترة [1.0,1.2] فإن:

$$\sinh(1.1) \approx s(1.1) = 1.17520 + 1.67130(1.1 - 1.0) = 1.34233$$

وبما أن $x = 1.45$ تقع في الفترة [1.4,1.6] فإن:

$$\sinh(1.45) \approx s(1.45) = 1.90430 + 2.35634(1.45 - 1.4) = 2.02212$$