

# فضاءات الضرب الداخلي

جامعة الملك سعود

4 أكتوبر 2017

## تعريف الضرب الداخلي

### تعريف

ليكن  $V$  فضاء متجهات على  $\mathbb{R}$ .

نقول أن الدالة  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  هي ضرب داخلي على  $V$  إذا تحقق كل ما يلي لكل  $\alpha \in \mathbb{R}, u, v, w \in V$

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad 1$$

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad 2$$

$$\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle \quad 3$$

$$\langle u, u \rangle \geq 0 \quad 4$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0 \quad 5$$

1 الضرب الداخلي المعتاد على  $\mathbb{R}^n$  معرف كما يلي:  
إذا كان  $u, v \in \mathbb{R}^n$ ,  $u = (u_1, \dots, u_n)$  و  $v = (v_1, \dots, v_n)$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^n u_j v_j = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n.$$

2 إذا كان  $E = C([0, 1])$  فضاء الدوال المتصلة على  $[0, 1]$ . لكل  $f, g \in E$ ,  
نعرف الضرب الداخلي على  $E$  كما يلي:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t).$$

## ملاحظة

إذا كان  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء ضرب داخلي وإذا كان  $u, v, w, x \in E, a, b, c, d \in \mathbb{R}$  فإن

$$\langle u + v, w + x \rangle = \langle u, w \rangle + \langle u, x \rangle + \langle v, w \rangle + \langle v, x \rangle.$$

## المثال الأول

ليكن  $u = (x, y)$  و  $v = (a, b)$ ، نعرف

$$\langle u, v \rangle = 2ax + by - bx - ay$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  تمثل ضربا داخليا في  $\mathbb{R}^2$ .

يكفي أن نثبت أن  $\langle u, u \rangle \geq 0$  و  $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$ .

$$\langle u, u \rangle = 2x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 + x^2 \geq 0$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$$

## المثال الثاني

ليكن  $u = (x, y, z)$  و  $v = (a, b, c)$ ، نعرف

$$\langle u, v \rangle = 2ax + by + 3cz - bx - ay + cy + bz$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  تمثل ضربا داخليا في  $\mathbb{R}^3$ .

يكفي أن نثبت أن  $\langle u, u \rangle \geq 0$  و  $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$ .

$$\begin{aligned}\langle u, u \rangle &= (y + z - x)^2 - (z - x)^2 + 2x^2 + 3z^2 \\ &= (y + z - x)^2 + (x + z)^2 + z^2 \geq 0\end{aligned}$$

## المثال الثالث

ليكن  $u = (x, y, z)$  و  $v = (a, b, c)$ ، نعرف

$$\langle u, v \rangle = 2ax + by + cz - bx - ay + cy + bz$$

$\langle , \rangle$  لا تمثل ضربا داخليا في  $\mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned}\langle u, u \rangle &= (y + z - x)^2 - (z - x)^2 + 2x^2 + z^2 \\ &= (y + z - x)^2 + x^2 + 2xz \\ &= (y + z - x)^2 + (x + z)^2 - z^2.\end{aligned}$$

## المثال الرابع

إذا كانت مصفوفة  $A = (a_{j,k}) \in M_n(\mathbb{R})$ , نعرف

$$\text{tr}(A) = \sum_{j=1}^n a_{j,j}$$

و

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T)$$

لكل  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ .  
 $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle$  تمثل ضربا داخليا على الفضاء  $M_n(\mathbb{R})$ .



## تمرين

إذا كان  $u = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $v = (y_1, y_2, y_3)$ , نعرف الدوال التالية  
 $f, g, h, k: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(u, v) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2x_3 y_3 + x_2 y_1 + 2x_1 y_2 + x_2 y_3 + y_2 x_3 \quad 1$$

$$g(u, v) = x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + 3x_1 y_3 + 3x_3 y_1. \quad 2$$

$$h(u, v) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_3 + y_2 x_3 + x_3 y_1 + x_1 y_3. \quad 3$$

$$k(u, v) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_1 y_3 + y_1 x_3. \quad 4$$

حدد من الدوال  $f, g, h, k$  من تمثّل ضرباً داخلياً في  $\mathbb{R}^3$ .

## الحل

$$f(u, v) - f(v, u) = x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad 1$$

إذاً  $f$  لا تمثل ضرباً داخلياً في  $\mathbb{R}^3$ .

$$g(u, u) = 2x_1 x_2 + 2x_2 x_3 + 6x_1 x_3 = 2(x_1 + x_3)(x_2 + 3x_3) - 6x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + 4x_3)^2 - (x_1 - x_2 - 2x_3)^2 - 6x_3^2$$

إذاً  $g$  لا تمثل ضرباً داخلياً في  $\mathbb{R}^3$ .

3

$$\begin{aligned} h(u, u) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2 x_3 + 2x_1 x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 \end{aligned}$$

إذاً  $h$  لا تمثل ضرباً داخلياً في  $\mathbb{R}^3$  لأن

$$h(u, u) = 0 \not\Rightarrow u = 0.$$

4

$$\begin{aligned}k(u, u) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_3 \\&= (x_1 + x_3)^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 \\&= (x_1 + x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 - x_3^2\end{aligned}$$

إذاً  $k$  لا تمثل ضربا داخليا في  $\mathbb{R}^3$  لأن

$$k(u, u) = 0 \not\Rightarrow u = 0.$$

### مثال

أوجد قيم  $a, b$  حتى يكون

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + a x_1 y_2 + b x_2 y_1$$

ضربا داخليا في  $\mathbb{R}^2$ .

حتى يكون  $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \langle (y_1, y_2), (x_1, x_2) \rangle$  لا بد أن يكون  $a = b$ .

$$\begin{aligned}\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle &= x_1^2 + x_2^2 + 2ax_1x_2 \\ &= (x_1 + ax_2)^2 + x_2^2(1 - a^2).\end{aligned}$$

إذا  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  تمثل ضربا داخليا في  $\mathbb{R}^2$ ، إلا و إذا كان  $|a| < 1$ .

## تعريف

ليكن  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء ضرب داخلي.

إذا كان  $u \in E$ , نعرف طول أو معيار المتجه بما يلي:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

إذا كان  $u, v \in E$ , نعرف المسافة بين  $u$  و  $v$  بما يلي:

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

و نعرف الزاوية  $0 \leq \theta \leq \pi$  بين متجهين  $u, v \in E$  بما يلي:

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

ليكن الفضاء الضرب الداخلي  $(M_2(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  المعروف بما يلي

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T).$$

أوجد  $\cos \theta$  إذا كانت  $\theta$  هي الزاوية بين المصفوفتين

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ و } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\|B\|^2 = 7, \|A\|^2 = 12, AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

إذا

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

### مبرهنة (متباينة كوشي شوارتز)

إذا كان  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء ضرب داخلي و  $u, v \in E$  إذا

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

ولا تكون المساوات إلا إذا كان المتجهين  $u, v$  مرتبطين خطيا.



## البرهان

لتكن كثيرة الحدود التالية

$$Q(t) = \|u + tv\|^2 = \|u\|^2 + 2t\langle u, v \rangle + t^2\|v\|^2.$$

بما أن  $Q(t) \geq 0$  لكل  $t \in \mathbb{R}$ , إذا مميز  $Q(t)$  يكون سالبا، أي

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2.$$

و هذا هو المطلوب.

إذا كان  $|\langle u, v \rangle| = \|u\|\|v\|$ ، فهذا يعني أن المميز يساوي صفر. إذا يوجد  $t \in \mathbb{R}$  بحيث  $Q(t) = 0$ . إذا المتجهين  $u, v$  مرتبطين خطيا.

### مبرهنة

إذا كان  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  و  $u, v \in E$  إذا

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

### البرهان

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2.$$

### تعريف

إذا كان  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء ضرب داخلي. نقول أن متجهين  $u, v \in E$  متعامدين و نكتب  $u \perp v$ , إذا كان  $\langle u, v \rangle = 0$ .

### مبرهنة ( قاعدة بيتاغورس )

إذا كان  $u \perp v$  فإن

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

### البرهان

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

## تعريف

إذا كان  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء ضرب داخلي. نقول أن مجموعة  $S = \{e_1, \dots, e_n\}$  من المتجهات الغير صفرية متعامدة إذا كان

$$\langle e_j, e_k \rangle = 0, \quad \forall 1 \leq j \neq k \leq n.$$

و نقول أنها عيارية إذا كان

$$\|e_j\| = 1, \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

و نقول أنها عيارية و متعامدة إذا كان

$$\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{j,k}, \quad \forall 1 \leq j, k \leq n.$$

$$(\delta_{j,k} = 0 \text{ إذا كان } j \neq k \text{ و } \delta_{j,j} = 1)$$

## مبرهنة

كل مجموعة متعامدة و لا تحتوي على المتجه الصفري هي مستقلة خطيا.

### مبرهنة

إذا كان  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء ضرب داخلي و إذا كانت  $S = \{e_1, \dots, e_n\}$  أساسا عياريا و متعامدا و إذا كان  $u \in E$  فإن

$$u = \langle u, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle u, e_n \rangle e_n.$$

## البرهان

$$\text{إذا كان } u = \sum_{j=1}^n a_j e_j \text{ فإن } \langle u, e_k \rangle = \sum_{j=1}^n a_j \langle e_j, e_k \rangle = a_k.$$

## مبرهنة

إذا كان  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء ضرب داخلي و  $(v_1, \dots, v_n)$  مجموعة مستقلة خطيا في  $E$  توجد مجموعة وحيدة عيارية و متعامدة  $(e_1, \dots, e_n)$  بحيث

لكل  $k \in \{1, \dots, n\}$

1

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k),$$

لكل  $k \in \{1, \dots, n\}$

2

$$\langle e_k, v_k \rangle > 0.$$



## البرهان

نبحث في الأول على مجموعة متعامدة  $(u_1, \dots, u_n)$  كما يلي:

$$\begin{cases} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \frac{\langle u_1, v_2 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \\ &\vdots \\ u_n &= v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle u_i, v_n \rangle}{\|u_i\|^2} u_i. \end{cases}$$

نتحصل على المجموعة  $(e_1, \dots, e_n)$  من المجموعة  $(u_1, \dots, u_n)$  كما يلي:

$$e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

ليكن الفضاء الجزئي  $F$  من  $\mathbb{R}^4$  المولد بالمتجهات

$$S = \{u = (1, 1, 0, 0), v = (1, 0, -1, 0), w = (0, 0, 1, 1)\}.$$

1 أثبت أن  $S$  هو أساس للفضاء الجزئي  $F$ .

2 أوجد أساسا عياريا متعامدا للفضاء الجزئي  $F$  باستعمال خوارزمية جرام شميد. (حيث الضرب الداخلي هو الضرب الإقليدي).

1 لتكن  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  والتي أعمدتها  $u, v, w$ .

الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة  $A$  هي  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  وهذا يبين

أن  $S$  هو أساس للفضاء الجزئي  $F$ .

2  $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2, 0)$ ,  $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)$

$u_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}(1, -1, 1, 3)$

$\{u_1, u_2, u_3\}$  هو أساس عياري متعامد للفضاء الجزئي  $F$

## تمرين

1 أثبت أن  $\langle (a, b), (x, y) \rangle = ax + ay + bx + 2by$  تمثل ضربا داخليا في  $\mathbb{R}^2$ .

2 استعمل طريقة جرام شميت لتحويل الأساس  $\{u_1 = (1, -1), u_2 = (1, 2)\}$  إلى أساس عياري و متعامد.

- $\langle (a, b) + (c, d), (x, y) \rangle = (a + c)x + (a + c)y + (b + d)x + 2(b + d)y = \langle (a, b), (x, y) \rangle + \langle (c, d), (x, y) \rangle$  1
- $\langle (a, b), (x, y) \rangle = ax + ay + bx + 2by = \langle (x, y), (a, b) \rangle$
- $\langle \lambda(a, b), (x, y) \rangle = \lambda ax + \lambda ay + \lambda bx + 2\lambda by = \lambda \langle (a, b), (x, y) \rangle$
- $\langle (a, b), (a, b) \rangle = a^2 + 2ab + 2b^2 = (a + b)^2 + b^2 \geq 0$
- $\langle (a, b), (a, b) \rangle = 0 \iff a + b = 0 = b \iff a = b = 0$

المتجه  $u_1$  عياري والمتجه الثاني هو  $v_2 = (1, 0)$  إذا 2  
 $\{v_1 = (1, -1), v_2 = (1, 0)\}$  هو أساس عياري و متعامد.

## مثال

$$S = \{u_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, u_4 = \text{تكن} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\} \text{أساسا للفضاء } M_2(\mathbb{R}).$$

سنستعمل طريقة جرام شميت لتحويل الأساس  
 $S$  إلى أساس عياري و متعامد.

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\langle u_2, v_1 \rangle = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\langle u_3, v_2 \rangle = \frac{3}{\sqrt{15}}, \langle u_3, v_1 \rangle = \sqrt{3}$$

$$u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\langle u_4, v_3 \rangle = \frac{4}{\sqrt{35}}, \langle u_4, v_2 \rangle = \frac{6}{\sqrt{15}}, \langle u_4, v_1 \rangle = 0$$

$$u_4 - \langle u_4, v_1 \rangle v_1 - \langle u_4, v_2 \rangle v_2 - \langle u_4, v_3 \rangle v_3 = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} -10 & -39 \\ -29 & -29 \end{pmatrix}.$$

$$v_4 = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

## تمرين

ليكن الفضاء الجزئي  $F$  من الفضاء الإقليدي  $\mathbb{R}^4$  المولد بالمتجهات التالية  
 $u_1 = (1, 2, 0, 2), u_2 = (-1, 1, 1, 1)$ .

أوجد أساسا عياريا متعامدا للفضاء  $F$  باستعمال خوارزمية جرام شميدت.

أثبت أن المجموعة التالية

$F^\perp = \{u \in \mathbb{R}^4 : \langle u, v \rangle = 0, \forall v \in F\}$  تمثل فضاء جزئيا من  $\mathbb{R}^4$ .  
أوجد أساسا عياريا متعامدا للفضاء  $F^\perp$ .



## الحل

$$\langle u_2, v_1 \rangle = 1, v_1 = \frac{1}{3}u_1 \quad 1$$

$$u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = (0, 3, 1, -1) - \frac{1}{3}(-1, 1, 1, 1) = \\ v_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(-4, 1, 3, 1) \text{ إذا } \frac{1}{3}(-4, 1, 3, 1). \\ (v_1, v_2) \text{ تمثل أساسا عياريا متعامدا للفضاء } F.$$

$$\text{إذا كان } u \in F \text{ و } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, v_1, v_2 \in F^\perp \quad 2$$

$$\langle \alpha v_1 + \beta v_2, u \rangle = \alpha \langle v_1, u \rangle + \beta \langle v_2, u \rangle = 0.$$

$$\text{إذاً المجموعة التالية } F^\perp \text{ تمثل فضاءا جزئيا من } \mathbb{R}^4.$$

$$u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ ليكن} \quad 3$$

$$u \in F^\perp \iff \begin{cases} \langle u, u_1 \rangle = 0 \\ \langle u, u_2 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 2t = 0 \\ -x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 2t = 0 \\ -x + y + z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{2}{3}z \\ y = -\frac{z}{3} - t \end{cases}$$

إذاً  $u \in F^\perp \iff u = -\frac{z}{3}(-2, 1, -3, 0) + t(0, -1, 0, 1)$   
 المتجهين  $e_1 = (-2, 1, -3, 0), e_2 = (0, -1, 0, 1)$  أساسا للفضاء  $F^\perp$ .  
 $\langle w_1, e_2 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{14}}, w_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} e_1$   
 $e_2 - \langle e_2, w_1 \rangle w_1 = \frac{1}{14}(2, 13, 3, 14)$   
 إذاً  $(\frac{1}{\sqrt{14}}(-2, 1, -3, 0), \frac{1}{3\sqrt{42}}(2, 13, 3, 14))$  تمثل أساسا عياريا متعامدا للفضاء  $F^\perp$ .