فضاءات الضرب الداخلي

د. المنجي بلال

4 أكتوبر 2017

المحتويات

باب 1

فضاءات الضرب الداخلي

1.1 تعريف الضرب الداخلي

تعريف 1.1.1
ليكن V فضاء متجهات على $\mathbb{R}$.
نقول أن الدالة $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ هي ضرب داخلي على V إذا تحقق كل ما يلي لكل $u, v, w \in V$، $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.
2. $\langle u+v, w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle v, w\rangle$.
3. $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$.
4. $\langle u, u\rangle \geq 0$
5. $\langle u, u\rangle = 0 \iff u = 0$.

أمثلة 1.1.1

1. الضرب الداخلي المعتاد على $\mathbb{R}^n$ معرف كما يلي:
إذا كان $u, v \in \mathbb{R}^n$، $u = (u_1, \ldots, u_n)$ و $v = (v_1, \ldots, v_n)$،

$$\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j = u_1 v_1 + + \ldots + u_n v_n.$$

2. إذا كان $E = \mathcal{C}([0,1])$ فضاء الدوال المتصلة على $[0,1]$. لكل $f, g \in E$, نعرف الضرب الداخلي على E كما يلي:

$$\langle f, g\rangle == \int_0^1 f(t)g(t).$$

.3

.4

ملاحظة 1.1.1
إذا كان $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ فضاء ضرب داخلي وإذا كان $u, v, w, x \in E$ فإن

$$\langle u+v, w+x\rangle = \langle u, w\rangle + \langle u, x\rangle + \langle v, w\rangle + \langle v, x\rangle.$$

1.2 التعامد

تعريف 1.2.1
ليكن $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ فضاء ضرب داخلي.

1. إذا كان $u \in E$, نعرف طول أو معيار المتجه بما يلي:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}.$$

2. إذا كان $u, v \in E$, نعرف المسافة بين u و v بما يلي:

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

3. و نعرف الزاوية $0 \leq \theta \leq \pi$ بين متجهين $u, v \in E$ بما يلي:

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|.\|v\|}$$

مبرهنة 1.2.1 (متباينة كوشي شوارتز)
إذا كان $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ و $u, v \in E$ إذا

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

ولا تكون المساوات إلا إذا كان المتجهين u, v مرتبطين خطيا.

مبرهنة 1.2.2
إذا كان $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ و $u, v \in E$ إذا

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

تعريف 1.2.2
إذا كان $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ فضاء ضرب داخلي. نقول أن متجهين $u, v \in E$ متعامدين و نكتب $u \perp v$,
إذا كان $\langle u, v\rangle = 0$.

مبرهنة 1.2.3 (قاعدة بيتاغورس)
إذا كان $u \perp v$ إذا

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

1.3 الأساسات العيارية

تعريف 1.3.1
إذا كان $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ فضاء ضرب داخلي. نقول أن مجموعة $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ من المتجهات الغير صفرية متعامدة إذا كان

$$\langle e_j, e_k\rangle = 0, \quad \forall 1 \leq j \neq k \leq n.$$

و نقول أنها عيارية إذا كان

$$\|e_j\| = 1, \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

و نقول أنها عيارية و متعامدة إذا كان

$$\langle e_j, e_k\rangle = \delta_{j,k}, \quad \forall 1 \leq j, k \leq n.$$

($\delta_{j,k} = 0$ إذا كان $j \neq k$ و $\delta_{j,j} = 1$.)

مبرهنة 1.3.1
كل مجموعة عيارية و متعامدة مستقلة خطيا.

مبرهنة 1.3.2
إذا كان $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ فضاء ضرب داخلي و إذا كانت $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ مجموعة عيارية و متعامدة و $u \in E$ فإن

$$u = \langle u, e_1\rangle e_1 + \ldots 9 + \langle u, e_n\rangle e_n.$$

مبرهنة 1.3.3 (خوارزمية جرام شميدت)
إذا كان $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ و $(v_1, \ldots, v_n)$ مجموعة مستقلة خطيا في E. إذا توجد مجموعة وحيدة عيارية و متعامدة $(e_1, \ldots, e_n)$ بحيث

1. لكل $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k),$$

2. لكل $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\langle e_k, v_k\rangle > 0.$$

البرهان
نبحث في الأول على مجموعة متعامدة $(u_1, \ldots, u_n)$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_1 &= & v_1 \\ u_2 &= & v_2 - \dfrac{\langle u_1, v_2\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \\ &\vdots & \\ u_n &= & v_n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \dfrac{\langle u_i, v_n\rangle}{\|u_i\|^2} u_i. \end{cases}$$

نتحصل على المجموعة $(e_1, \ldots, e_n)$ من المجموعة $(u_1, \ldots, u_n)$ كما يلي:

$$e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}, \quad k \in \{1, \ldots, n\}.$$

مثال 1.3.1

1.4 تمارين الباب االخامس

تمرين 1 :

ليكن الفضاء الجزئي F من $\mathbb{R}^4$ المولد بالمتجهات
$$S = \{u = (1,1,0,0),\ v = (1,0,-1,0),\ w = (0,0,1,1)\}.$$

1. أثبت أن S هو أساس للفضاء الجزئي F.
2. أوجد أساسا عياريا متعامدا للفضاء الجزئي F باستعمال خوارزمية جرام شميد. (حيث الضرب الداخلي هو الضرب الإقليدي).

تمرين 2 :

1. أثبت أن $\langle (a,b),(x,y)\rangle = ax + ay + bx + 2by$ تمثل ضربا داخليا في $\mathbb{R}^2$.
2. إستعمل طريقة جرام شميت لتحويل الأساس
   $\{u_1 = (1,-1), u_2 = (1,2)\}$ إلى أساس عياري و متعامد.

1.5 إصلاح تمارين الباب االخامس

حل التمرين 1:
ليكن الفضاء الجزئي F من $\mathbb{R}^4$ المولد بالمتجهات
$$S=\{u=(1,1,0,0),\ v=(1,0,-1,0),\ w=(0,0,1,1)\}.$$

1. لتكن $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ والتي أعمدتها u,v,w.
الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة A هي $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ وهذا يبين أن S هو أساس للفضاء الجزئي F.
2. $u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$، $u_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2,0)$، $u_3=\frac{1}{\sqrt{12}}(1,-1,1,3)$.
$\{u_1,u_2,u_3\}$ هو أساس عياري متعامد للفضاء الجزئي F

حل التمرين 2:

1. - $\langle (a,b)+(c,d),(x,y)\rangle=(a+c)x+(a+c)y+(b+d)x+2(b+d)y=\langle (a,b),(x,y)\rangle+\langle (c,d),(x,y)\rangle$
   - $\langle (a,b),(x,y)\rangle=ax+ay+bx+2by=\langle (x,y),(a,b)\rangle$
   - $\langle \lambda(a,b),(x,y)\rangle=\lambda ax+\lambda ay+\lambda bx+2\lambda by=\lambda\langle (a,b),(x,y)\rangle$
   - $\langle (a,b),(a,b)\rangle=a^2+2ab+2b^2=(a+b)^2+b^2\geq 0$
   - $\langle (a,b),(a,b)\rangle=0 \iff a+b=0=b \iff a=b=0$
2. المتجه u_1 عياري والمتجه الثاني هو $v_2=(1,0)$ إذا $\{v_1=(1,-1),v_2=(1,0)\}$ هو أساس عياري و متعامد.