

التحويلات الخطية

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

4 أكتوبر 2017

المحتويات

1 تعريف التحويلات الخطية

2 نواة وصورة التحويل الخطي

3 مصفوفة التحويل الخطي و تغيير الأساس

تعريف

ليكن كل من V و W فضاء متجهات و ليكن $T: V \longrightarrow W$ تطبيقاً. نقول أن T تحويل خطي إذا كان لكل $u, v \in V, \alpha \in \mathbb{R}$

$$T(u + v) = T(u) + T(v) \quad 1$$

$$T(\alpha u) = \alpha T(u) \quad 2$$

ملاحظات

إذا كان $T: V \longrightarrow W$ تحويلًا خطيًا فإن

$$1. T(0) = 0$$

$$2. T(-u) = -T(u)$$

$$3. T(u - v) = T(u) - T(v)$$

حدد من الدوال التالية من هي تحويل خطي:

$$\begin{aligned}T_1: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & T_1(x, y, z) &= (x + y + z, x - z + y) \\T_2: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & T_2(x, y, z) &= (xy, z) \\T_3: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & T_3(x, y, z) &= (x + y - 3z, z + y - 1) \\T_4: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & T_4(x, y, z) &= (x + y, z + y, x^2) \\T_5: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & T_5(x, y, z) &= (x + y, z + y, 0) \\T_6: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & T_6(x, y, z) &= (-x + 2z, y + 2z, 2x + 2y) \\T_7: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}, & T_7(x, y, z) &= x + y - z.\end{aligned}$$

الحل

- T_1 تحويل خطي.
- T_2 ليس تحويل خطي
- T_3 ليس تحويل خطي لأن $T(0) \neq 0$.
- T_4 ليس تحويل خطي
- T_5 تحويل خطي.
- T_6 تحويل خطي.
- T_7 تحويل خطي.

مثال

ليكن الفضاء $V = M_n(\mathbb{R})$.
نعرف الدالة $T: V \rightarrow \mathbb{R}$ بما يلي: $T(A) = \det A$.
هل الدالة T خطية.
الدالة T ليست خطية لأن $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

مبرهنة

إذا كان $T: V \rightarrow W$ تطبيقا فإن T تحويلا خطيا إذا و فقط

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v) \quad \forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

ملاحظات

- 1 إذا كان $T: V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا فإن

$$T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_n T(u_n).$$
- 2 إذا كان $T: V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا و $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ أساسا للفضاء V .
 إذا التحويل الخطي يصبح معرفا إذا حدد $T(u_1), \dots, T(u_n)$.
- 3 التحويلات الخطية الوحيدة $T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ هي $T(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$.
- 4 التحويلات الخطية الوحيدة $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ هي $T(x, y) = ax + by$, $a, b \in \mathbb{R}$.

مبرهنة

إذا كانت $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ فإن التطبيق $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ المعرف بالقاعدة
للكل $X \in \mathbb{R}^n$ هو تحويلا خطيا و يسمى التحويل الخطي المقابل
للمصفوفة A .

مبرهنة

ليكن $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ تحويلا خطيا و ليكن $B = (e_1, \dots, e_n)$ أساسا للفضاء \mathbb{R}^n و $C = (u_1, \dots, u_m)$ أساسا للفضاء \mathbb{R}^m . عندئذ $T = T_A$ حيث $A = [a_{i,j}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ أعمدتها $[T(e_1)]_C, \dots, [T(e_n)]_C$.
تسمى المصفوفة A المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي T بالنسبة للأساس B و الأساس C .

مبرهنة

ليكن V, W فضاءي متجهات و $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ أساسا للفضاء V و w_1, \dots, w_n مجموعة من المتجهات في الفضاء W .
إذا يوجد تحويلا خطيا وحيدا $T: V \longrightarrow W$ يحقق $T(v_j) = w_j$ لكل $1 \leq j \leq n$.

تعريف

ليكن $T: V \rightarrow W$ تحويلًا خطيًا. نعرف نواة التحويل T والتي نرمز بها بالرمز $\ker T$ المجموعة التالية

$$\ker T = \{v \in V; T(v) = 0\}.$$

كما نعرف صورة التحويل T والتي نرمز بها بالرمز $\text{Im} T$ المجموعة التالية

$$\text{Im} T = \{T(v); v \in V\}.$$

مبرهنة

إذا كان $T: V \rightarrow W$ تحويلًا خطيًا فإن $\ker T$ فضاء جزئي من V و $\text{Im } T$ فضاء جزئي من W .

تعريف

إذا كان $T: V \rightarrow W$ تحويلًا خطيًا فإن بعد الفضاء $\ker T$ يسمى صفرية التحويل T و نرمز بالرمز $(\text{nullity}(T))$ ، كذلك بعد الفضاء $\text{Im} T$ يسمى رتبة التحويل T و نرمز بالرمز $(\text{rank}(T))$

إذا كانت $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ و $T_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ المعرفة بالمعادلة $T_A(X) = AX$ فإن $\text{rank } T = \text{rank } A$ و $\text{Im } T = \text{col } A$.

ليكن $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ التحويل الخطي المعرف بما يلي:

$$T(x, y, z) = (2x - y + 3z, x - 2y + z)$$

$$(x, y, z) \in \ker T \iff \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$(x, y, z) \in \ker T \iff \text{إذاً، } \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \text{ المصفوفة الموسعة لهذا النظام الخطي هي:}$$

$$x = 5y, z = -3y.$$

$$\ker T = \langle (5, 1, -3) \rangle.$$

$$\text{إذاً } T(x, y, z) = x(2, 1) + y(-1, -2) + z(3, 1)$$

$$\text{Im } T = \langle (2, 1), (-1, -2), (3, 1) \rangle = \langle (2, 1), (-1, -2) \rangle.$$

مبرهنة

إذا كان $T: V \longrightarrow W$ تحويلًا خطيًا و $\{v_1, \dots, v_n\}$ أساسًا للفضاء V فإن المجموعة $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ تولد الفضاء $\text{Im } T$.

مبرهنة البعد للتحويلات

إذا كان $T: V \rightarrow W$ تحويلًا خطيًا و كان $\dim V = n$ فإن

$$\text{nullity}(T) + (\text{rank}(T) = n.$$

أي

$$\dim \ker(T) + \dim \text{Im}(T) = n.$$

تعريف

إذا كان $T: V \longrightarrow W$ تحويلًا خطيًا.

نقول أن T أحادي أو متباين إذا تحقق لكل $u, v \in V$ ما يلي

1

$$T(u) = T(v) \Rightarrow u = v.$$

نقول أن T شامل أو غامر إذا كان $\text{Im}(T) = W$.

2

مبرهنة

إذا كان $T: V \rightarrow W$ تحويلًا خطيًا.
يكون التحويل T أحاديًا إلا و إذا كان $\ker(T) = \{0\}$.

نتيجة

إذا كان $T: V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا و $\dim V = \dim W = n$ عندئذ يكون التحويل T أحاديا إذا و فقط إذا كان T تحويلا شاملا.

عين أساسا لصورة ونواة التحويل الخطي $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ المعرف بالقاعدة

$$T(x, y, z, t) = (x - y, 2z + 3t, y + 4z + 3t, x + 6z + 6t).$$

$(x, y, z, t) \in \text{Ker } T \iff x = y = 3t = -2z$.
إذا $(6, 6, -3, 2)$ هو أساس لنواة التحويل الخطي.
صورة التحويل الخطي T مولد بأعمدة المصفوفة التالية

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

والمصفوفة

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

هي صيغة درجية صفية للمصفوفة. إذا

$$\{(1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (0, 2, 4, 6)\}$$

هو أساس لصورة التحويل الخطي.

ليكن V, W فضاءين و $T: V \longrightarrow W$ تحويل خطي.
إذا كان التحويل أحادي و $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ مجموعة مستقلة خطيا فإن المجموعة $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ مجموعة مستقلة خطيا.

$$\begin{aligned}a_1 T(u_1) + \dots + a_n T(u_n) = 0 &\iff T(a_1 u_1 + \dots + a_n u_n) = 0 \\ &\iff a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = 0\end{aligned}$$

لأن T أحادي. و بما أن المجموعة S مستقلة خطيا فإن $a_1 = \dots = a_n = 0$.

مبرهنة

ليكن $T: V \rightarrow W$ تحويلًا خطيًا و ليكن $B = (u_1, \dots, u_n)$ أساسًا للفضاء V و $C = (v_1, \dots, v_m)$ أساسًا للفضاء W . عندئذٍ توجد مصفوفة وحيدة $[T]_B^C$ والتي أعمدتها $[T(u_1)]_C, \dots, [T(u_n)]_C$. المصفوفة $[T]_B^C$ تسمى مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للأساس B و الأساس C . و تحقق

$$[T(v)]_C = [T]_B^C [v]_B; \quad \forall v \in V.$$

إذا كان $V = W$ و $B = C$ نكتب المصفوفة $[T]_C^C$ عوضاً عن $[T]_B^C$.

مثال

ليكن $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ التحويل الخطي المعرف بما يلي:

$$T(x, y, z) = (2x - y + 3z, x - 2y + z)$$

مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للأساس الطبيعي للفضاء \mathbb{R}^3 هي: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

إعط مصفوفة التحويل الخطي في الأساس الطبيعي للفضاء \mathbb{R}^3 و أوجد $T_j(x, y, z)$ إذا كان

$$, T_1((0, 1, 0)) = (1, 2, 2) , T_1((1, 0, 0)) = (1, 1, 1) \quad 1$$

$$T_1((0, 0, 1)) = (1, 2, 3)$$

$$, T_2((0, 1, 0)) = (-1, 1, 1) , T_2((1, 0, 0)) = (1, -1, 1) \quad 2$$

$$T_2((0, 0, 1)) = (-1, -1, 1)$$

$$, T_3((0, 1, 0)) = (1, 2, 1) , T_3((1, 0, 0)) = (1, 1, 1) \quad 3$$

$$. T_3((0, 0, 1)) = (2, -2, 1)$$

$$, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$.T_1(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + 2z, x + 2y + 3z)$$

$$, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 2$$

$$.T_2(x, y, z) = (x - y - z, -x + y - z, x + y + z)$$

$$, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 3$$

$$.T_3(x, y, z) = (x + y + 2z, x + 2y - 2z, x + y + z)$$

مبرهنة

إذا كان $T: V \rightarrow V$ تحويلًا خطيًا و كان كل من B و C أساسًا للفضاء V فإن

$$[T]_B = {}_B P_C [T]_C {}_C P_B.$$

مثال

ليكن $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ التحويل الخطي والذي مصفوفته بالنسبة للأساس المعتاد C للفضاء \mathbb{R}^3 هي

$$[T]_C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

أوجد مصفوفة التحويل الخطي $[T]_B$ بالنسبة للأساس B التالي

$$B = \{u = (1, 1, 1), v = (1, 1, 0), w = (0, 1, -1)\}.$$

الحل

مصفوفة التحويل من الأساس B إلى الأساس C هي

$${}_CP_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

إذا مصفوفة التحويل من الأساس S إلى الأساس B هي

$${}_BP_C = {}_SP_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

و

$$[T]_B = {}_BP_C[T]_C{}_CP_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

ليكن التحويل الخطي $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ المعرفة بما يلي

$$T(x, y, z) = (3x + 2y, 3y + 2z, 9x - 4z).$$

- 1 اعط مصفوفة التحويل الخطي T .
- 2 اعط نواة و صورة التحويل الخطي T .
- 3 أوجد مصفوفة التحويل الخطي T في الأساس $S = \{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$.

الحل

1 مصفوفة التحويل الخطي T هي $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 9 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

2 المصفوفة الموسعة للنظام الخطي $AX = 0$ هي : $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right]$ هذه

المصفوفة متكافئة مع المصفوفة $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$

إذاً $\ker T = \{0\}$ و صورة التحويل الخطي T هي: \mathbb{R}^3 .

3 لتكن المصفوفة $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

مثال

ليكن $u_3 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$, $u_2 = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$, $u_1 = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$

1 أثبت أن $\{u_1, u_2, u_3\}$ هو أساس عياري و متعامد للفضاء \mathbb{R}^3 .

2 نعرف التحويل الخطي $T: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ بما يلي:

$T(e_1) = u_1$, $T(e_2) = u_2$ و $T(e_3) = u_3$ ، مع $\{e_1, e_2, e_3\}$ الأساس الطبيعي للفضاء \mathbb{R}^3 .

أوجد P مصفوفة التحويل T بالنسبة للأساس $\{e_1, e_2, e_3\}$ و أوجد $T(x, y, z)$.

3 نعرف التحويل الخطي $S: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ بما يلي:

$S(x, y, z) = (-x + 2z, y + 2z, 2x + 2y)$

أثبت أن S هي تحويل خطي و أوجد مصفوفته A بالنسبة للأساس $\{e_1, e_2, e_3\}$.

4 أوجد مصفوفة S بالنسبة للأساس $\{u_1, u_2, u_3\}$ ثم أوجد A^n , لكل $n \in \mathbb{N}$.

1 بما أن المحدد

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -27$$

إذا $\{u_1, u_2, u_3\}$ هو أساس. و بما أن $\|u_1\| = \|u_2\| = \|u_3\| = 1$ و
 $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = 0$ إذا
 أثبت أن $\{u_1, u_2, u_3\}$ هو أساس عياري و متعامد للفضاء \mathbb{R}^3 .

2

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

و

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. نعرف التحويل الخطي $T: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$

المعرف بالمصفوفة A بالنسبة للأساس الطبيعي (e_1, e_2, e_3) للفضاء \mathbb{R}^3 .

1 أوجد $T(x, y, z)$.

2 أوجد أساسا متعامدا (u_1, u_2, u_3) للفضاء \mathbb{R}^3 بحيث $T(u_1) = 3u_1$ و $T(u_2) = 4u_2$.

3 أوجد مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للأساس (u_1, u_2, u_3) .

4 نعرف الآن التحويل الخطي $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ بما يلي: $S(e_1) = u_1$, $S(e_2) = u_2$ و $S(e_3) = u_3$.

أوجد P مصفوفة التحويل الخطي S بالنسبة للأساس الطبيعي.

- 1 أثبت أن المصفوفة P لها معكوس و أوجد P^{-1} .
- 2 ليكن التحويل الخطي U المعروف بالمصفوفة P^{-1} بالنسبة للأساس الطبيعي. أوجد $U(u_k)$ لكل $k = 1, 2, 3$.
- 3 ليكن $F = U \circ T \circ S$. احسب $F(e_1), F(e_2), F(e_3)$. أوجد مصفوفة التحويل الخطي F واستنتج A^n لكل $n \in \mathbb{N}$.

الحل

1

$$T(x, y, z) = (2x - 2y + 3z, -2x + 2y + 3z, 3x + 3y - 3z).$$

2 ليكن $u = (x, y, z)$.

$$T(u) = 3u \iff \begin{cases} -x - 2y + 3z = 0 \\ -2x - y + 3z \\ 3x + 3y - 6z = 0 \end{cases} \iff x = y = z.$$

نأخذ $u_1 = (1, 1, 1)$.

$$T(u) = 4u \iff \begin{cases} -2x - 2y + 3z = 0 \\ -2x - 2y + 3z \\ 2x + 2y - 7z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}.$$

1 المصفوفة P لها معكوس لأن (u_1, u_2, u_3) أساس.

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2 $U(u_3) = (0, 0, 1), U(u_2) = (0, 1, 0), U(u_1) = (1, 0, 0)$

3 $F = U \circ T \circ S$

$$,F(e_1) = U \circ T(u_1) = 3U(u_1) = 3(1, 0, 0)$$

$$,F(e_2) = U \circ T(u_2) = 4U(u_2) = 4(0, 1, 0)$$

$$.F(e_3) = U \circ T(u_3) = -6U(u_3) = -6(0, 0, 1)$$

مصفوفة التحويل الخطي F هي

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$