

القيم والمتجهات المميزة والإستقطار

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

4 أكتوبر 2017

المحتويات

1 القيم والمتجهات المميزة

2 الإستقطار

القيم والمتجهات المميزة

تعريف

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة و كان $\lambda \in \mathbb{R}$. نقول أن λ هي قيمة مميزة للمصفوفة A إذا وجد $X \in \mathbb{R}^n$ و $X \neq 0$ بحيث $AX = \lambda X$ و في هذه الحالة يسمى X متجه مميز بالنسبة للقيمة المميزة λ .

مبرهنة

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة و $\lambda \in \mathbb{R}$. فإن λ قيمة مميزة للمصفوفة A إلا وإذا كان $|\lambda I - A| = 0$.

تعريف

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة فإن
 $|\lambda I - A| = 0$ يسمى كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A .

مثال

أوجد القيم المميزة للمصفوفات التالية

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

تعريف

نقول أن مصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$ قابلة للإستقطار (diagonalizable) إذا وجدت مصفوفة $P \in M_n(\mathbb{R})$ لها معكوس بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية.

مبرهنة

تكون مصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$ قابلة للإستقطار إلا وإذا وفقط إذا كان لها n متجه مميز مستقلة خطيا. وفي هذه الحالة تشكل هذه المتجهات أساسا لـ \mathbb{R}^n .

أمثلة

أثبت أن المصفوفات التالية قابلة للإستقطار و أوجد $P \in M_n(\mathbb{R})$ لها معكوس بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية ثم أوجد A^{15} .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

تعريف

لتكن مصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$ و λ قيمة مميزة للمصفوفة A ، نعرف

$$E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n; AX = \lambda X\}$$

ويسمى الفضاء المميز للقيمة المميزة λ .

ملاحظة

إذا كانت λ قيمة مميزة لمصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$ ، فإن
 $E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n; AX = \lambda X\}$ فضاء جزئي من \mathbb{R}^n .

تعريف

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة و كانت كثيرة الحدود المميزة

$$q_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^m Q(\lambda)$$

بحيث $Q(\lambda_1) \neq 0$ فنقول أن القيمة المميزة λ_1 لها تعدد m و يسمى التعدد الجبري للقيمة المميزة λ_1 أما بعد الفضاء المميز $E_{\lambda_1} = \{X \in \mathbb{R}^n; AX = \lambda_1 X\}$ فيسمى التعدد الهندسي للقيمة المميزة λ_1 .

مبرهنة

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة و كانت كثيرة الحدود المميزة

$$q_A(\lambda) = C(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$$

فإن A قابلة للإستقطار إلا و إذا كان التعدد الهندسي يساوي التعدد الجبري لكل قيمة مميزة للمصفوفة.

ملاحظة

حالة خاصة

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة و لها n قيمة مميزة مختلفة فإن A قابلة للإستقطار.

تمرين

ابحث قابلية الإستقطار للمصفوفة التالية و أوجد المصفوفة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

الحل كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ -4 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2.$$

إذا المصفوفة ليست قابلة للإستقطار.

تمرين

ابحث قابلية الإستقطار للمصفوفة التالية و أوجد المصفوفة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية.

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -6 \\ 18 & 11 \end{pmatrix}$$

الحل كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -10 - \lambda & -6 \\ 18 & 11 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(1 + \lambda).$$

إذا المصفوفة قابلة للإستقطار.

$$E_2 = \langle (1, -2) \rangle \text{ و } E_{-1} = \langle (-2, 3) \rangle$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ المصفوفة القطرية هي}$$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ و المصفوفة } P \text{ هي}$$

تمرين

ابحث قابلية الإستقطار للمصفوفة التالية و أوجد المصفوفة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

الحل كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 0 & 4 \\ 2 & 1 - \lambda & 5 \\ -4 & 0 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^3.$$

إذا المصفوفة ليست قابلة للإستقطار.

تمرين

ابحث قابلية الإستقطار للمصفوفة التالية و أوجد المصفوفة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda).$$

$E_1 = \langle (0, 1, 0), (1, 0, -1) \rangle$ و $E_2 = \langle (0, 1, -1) \rangle$. إذا المصفوفة قابلة للإستقطار.

المصفوفة القطرية هي $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

و المصفوفة P هي $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

تمرين

ابحث قابلية الإستقطار للمصفوفة التالية و أوجد المصفوفة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 - \lambda & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)(3 - \lambda)(2 - \lambda)^2.$$

تكون المصفوفة قابلة للإستقطار إلا وإذا كان بعد الفضاء المميز E_2 يساوي 2.

.إذا المصفوفة A قابلة للإستقطار. $E_2 = \langle (1, 1, -1, 0), (-1, 2, 0, 1) \rangle$

$E_3 = \langle (3, 2, 0, 0) \rangle$ و $E_5 = \langle (1, 0, 0, 0) \rangle$

المصفوفة القطرية هي $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

و المصفوفة P هي $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

تمرين

ابحث قابلية الإستقطار للمصفوفة التالية و أوجد المصفوفة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 & -1 \\ 1 & 3 - \lambda & -1 \\ -1 & -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 5).$$

المصفوفة القطرية هي $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ و المصفوفة P هي $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ إذا المصفوفة A قابلة للاستقطار.

تمرين

ابحث قابلية الإستقطار للمصفوفة التالية و أوجد المصفوفة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

الحل كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & 4 & 16 \\ 2 & 5 - \lambda & 8 \\ -2 & -2 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 3)^2(\lambda - 1).$$

$E_1 = \langle (2, 1, -1) \rangle$, $E_3 = \langle (1, -1, 0), (4, 0, -1) \rangle$ إذا المصفوفة A قابلة للاستقطار.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ هي المصفوفة } P \text{ و } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ هي المصفوفة القطرية}$$

تمرين

ابحث قابلية الإستقطار للمصفوفة التالية و أوجد المصفوفة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

الحل كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 - \lambda & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda)^3.$$

تكون المصفوفة قابلة للاستقطار إلا وإذا كان بعد الفضاء المميز E_2 يساوي 3.
 $E_2 = \langle (-1, 1, 0, 2), (-1, 0, 1, 0) \rangle$. إذا المصفوفة ليست قابلة للاستقطار.