الاختبار الفصلي الثّاني - المدّة: ساعة ونصف

1- اعط معادلة المستقيم الكروي المار بالنّقطتين $\xi_1\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ و $\xi_2\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

2- نعتبر $\xi_1\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ ، $\xi_2\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ ، $\xi_3\left(1,0,0\right)$. احسب أطوال أضلاع وزوايا المثلّث الكروي (ξ_1,ξ_2,ξ_3) ، وتأكد أن قاعدة الجيوب الكرويّة محقّقة فيه.

3- (تتمّة) نعتبر $\xi_1'\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{2}{3}\right)$ ، $\xi_2'\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{2}{3}\right)$ ، $\xi_3'\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$. أثبت أنّ المثلّث الكروي (ξ_1',ξ_2',ξ_3') مطابق للمثلّث الكروي (ξ_1,ξ_2,ξ_3) واعط صيغة التّقايس بينهما.

4- بيّن أنّ التّحويل $\mathcal{T}:\mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^2$ المعرّف بـ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

تقايس كروي، وعيّن نوعه، وحدّد عناصره.

5- نعتبر في نصف المستوى الزّائدي $\mathbb{H}^2$ المثلّث $z_1=i$ ، $z_2=1+i$ ، $z_3=1+3i$. ارسم أضلاع المثلّث الزّائدي (z_1,z_2,z_3) واحسب أطوالها.

6- (تتمّة) نعتبر تحويل موبيوس $f:\mathbb{H}^2\to\mathbb{H}^2,\ z\mapsto\dfrac{2z+1}{5z+3}$. تحقّق حسابيّا من كون المثلّثين الزائديين (z_1,z_2,z_3) و $(f(z_1),f(z_2),f(z_3))$ متطابقين.

٣٧٩ ريض - الهندسة الاقليدية و اللا اقليدية

حلول الاختبار الفصلي الثاني

١- معادلة المستقيم الكروي :
$$\begin{cases} 6x - 2y - 5z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

٢-
$$\xi_1\xi_2 = \cos^{-1}\frac{8}{9} \ , \quad \xi_2\xi_3 = \cos^{-1}\frac{2}{3} \ , \quad \xi_3\xi_1 = \cos^{-1}\frac{1}{3}$$
$$\hat{\xi}_1 = \sin^{-1}\frac{3\sqrt{34}}{34} \ , \quad \hat{\xi}_2 = \sin^{-1}\frac{6\sqrt{85}}{85} \ , \quad \hat{\xi}_3 = \sin^{-1}\frac{\sqrt{10}}{10}$$

لدينا قاعدة الجيوب الكروية

$$\frac{\sin \xi_1\xi_2}{\sin \hat{\xi}_3} = \frac{\sin \xi_2\xi_3}{\sin \hat{\xi}_1} = \frac{\sin \xi_3\xi_1}{\sin \hat{\xi}_2} = \frac{\sqrt{170}}{9}$$

٣-
$$\xi_1'\xi_2' = \xi_1\xi_2 = \cos^{-1}\frac{8}{9} \ , \quad \xi_2'\xi_3' = \xi_2\xi_3 = \cos^{-1}\frac{2}{3} \ , \quad \xi_3'\xi_1' = \xi_3\xi_1 = \cos^{-1}\frac{1}{3}$$

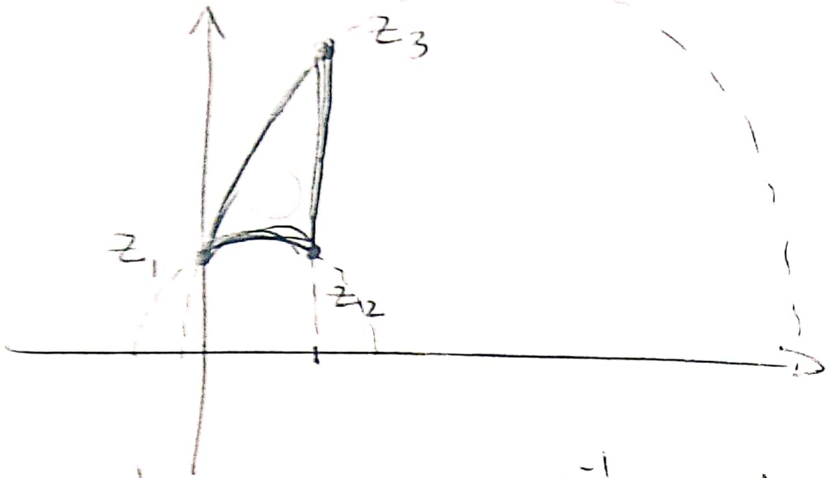
إذاً المثلثان متطابقان و التقايس :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

٤- لدينا

$$\frac{1}{7^2}\,{}^t\!\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} = Id$$

إذاً T تقايس و هو تناظر بالنسبة للمستوي $x - y - z = 0$ و دوران زاويته $\cos^{-1}\frac{13}{14}$ و مركزه $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$



$d(z_3, z_1) = ch^{-1}\frac{11}{6}$ $\quad$ $d(z_2, z_3) = ch^{-1}\frac{5}{3}$ $\quad$ $d(z_1, z_2) = ch^{-1}\frac{3}{2}$

$f(z_3) = \frac{114+3i}{289}$ ، $f(z_2) = \frac{34+i}{89}$ ، $f(z_1) = \frac{13+i}{34}$

$d(f(z_3), f(z_1)) = ch^{-1}\frac{11}{6}$ ، $d(f(z_2), f(z_3)) = ch^{-1}\frac{5}{3}$ ، $d(f(z_1), f(z_2)) = ch^{-1}$

إذاً المثلثان (z_1, z_2, z_3) و $(f(z_1), f(z_2), f(z_3))$
متطابقان.