الاختبار الفصلي الثّاني ـ المدّة: ساعة ونصف

د. مالك طالبي

نعتبر على الكرة $\mathbb{S}^2$ المستقيمين الكرويّين $\ell_1 : x+y=0$ ، $\ell_2 : x+z=0$ ، والنّقط $\xi_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ ، $\xi_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ، $\xi_3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{6},0\right)$.

١ـ اعط معادلة المستقيم الكروي المار بالنّقطتين ξ_1 و ξ_2.

٢ـ اعط صيغة المسار $p:[0,\frac{\pi}{4}]\to\mathbb{S}^2$ الّذي يحقّق، لكلّ $0\le t_1<t_2\le\frac{\pi}{4}$:

$p(0)=\xi_1$ ، $p\left(\frac{\pi}{4}\right)=\xi_2$ و $d(p(t_1),p(t_2))=|t_1-t_2|$ ،

حيث d هي المسافة الكرويّة على $\mathbb{S}^2$.

٣ـ احسب مساحة المثلّث الكروي $\xi_1\xi_2\xi_3$.

٤ـ تأكّد من تحقق قاعدة الجيوب الكرويّة في المثلّث $\xi_1\xi_2\xi_3$.

٥ـ نعتبر على $\mathbb{S}^2$ النّقط $\xi_1'(1,0,0)$ ، $\xi_2'\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ ، $\xi_3'\left(\frac{\sqrt{6}}{3},0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. بيّن أنّ المثلّثين $\xi_1\xi_2\xi_3$ و $\xi_1'\xi_2'\xi_3'$ متطابقان واعط صيغة التّقايس الّذي يحوّل $\xi_1'\xi_2'\xi_3'$ إلى $\xi_1\xi_2\xi_3$.

٦ـ اعط صيغة الانعكاس الكروي Ω_{ℓ_1} بالنّسبة للمستقيم ℓ_1.

٧ـ عيّن طبيعة تركيب الانعكاسين $\Omega_{\ell_2}\circ\Omega_{\ell_1}$ بالنّسبة للمستقيمين ℓ_1 ، ℓ_2 وحدّد عناصره.

٨ـ بيّن أنّ التّحويل $\mathcal{T}:\mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^2$ المعرّف بـ

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2&-3&-6\\6&-2&3\\3&6&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

تقايس كروي، عيّن نوعه، وحدّد عناصره.

حلول الاختبار الفصلي الثاني

١: $x-y=0$

٢: $p(\theta)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta;\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta;\sin\theta\right)$

٣: $\hat{\xi}_1=\pi/2$ ، $\hat{\xi}_2=\pi/4$ ، $\hat{\xi}_3=\pi/3$

وعليه المساحة $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}-\pi=\frac{\pi}{12}$

٤: $\frac{\sin\hat{\xi}_1}{\sin\widehat{\xi_2\xi_3}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{3}}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$; $\frac{\sin\hat{\xi}_2}{\sin\widehat{\xi_1\xi_3}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{1-\frac{2}{3}}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$\frac{\sin\hat{\xi}_3}{\sin\widehat{\xi_1\xi_2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

٥: $\xi_1'\cdot\xi_2'=\xi_1\cdot\xi_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\xi_2'\cdot\xi_3'=\xi_2\cdot\xi_3=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ، $\xi_1'\cdot\xi_3'=\xi_1\cdot\xi_3=\frac{\sqrt{6}}{3}$

فالمثلثان متطابقان

٦/أ: $T:\xi_1'\xi_2'\xi_3'\to\xi_1\xi_2\xi_3$

$$T:\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

٦: $$\Omega_{e_1}:\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

٧: دوران مركزه $\begin{pmatrix}\sqrt{3}/3\\-\sqrt{3}/3\\-\sqrt{3}/3\end{pmatrix}$ وزاويته $-\frac{2\pi}{3}$

٨: لدينا ${}^tAA=Id$ فهو تقايسي

$\det A=-1$ و ${}^tA\neq-A$