جامعة الملك سعود

كلية العلوم | **قسم الرياضيات** | **الإختبار النهائي**

الفصل الأول 1442 هـ | **481 ريض** | **الزمن ثلاث ساعات**

أجب عن خمس أسئلة من الست أسئلة التالية:

السؤال 1 :

1. أوجد قيمة النهاية التالية: $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{kx}{n}\right)$ ، حيث $x\in\mathbb{R}$.
2. ادرس تقارب التكامل المعتل $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}dx$.

السؤال 2 :

1. أثبت أن $\lim_{n\to+\infty} nx^n=0$ ، لكل $x\in(-1,1)$.
2. ادرس تقارب المتسلسلتين التاليتين $\sum_{n\geq1}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ و $\sum_{n\geq1}\frac{x^n}{1+x^n}$، حيث $x\in[0,+\infty)$.
3. لتكن $(a_n)_n$ متتالية من الأعداد الحقيقية حيث $a_0=1$, $a_1=-2$ و $a_{n-1}+2a_n+a_{n+1}=0$ لكل $1\leq n$.
   أوجد a_n لكل $2\leq n$.

السؤال 3 :

1. اعط تعريف التقارب المنتظم لمتتالية دوال $(f_n)_n$ على فترة I.
2. ادرس التقارب البسيط و التقارب المنتظم على الفترة $[0,1]$ لمتتالية الدوال $(f_n)_n$ حيث $f_n(x)=\frac{3^nx}{1+n3^nx^2}$.

3. احسب $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$ و $\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$.

السؤال 4 :

1. ادرس التقارب البسيط للمتسلسلة $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ على الفترة $[0,+\infty)$.
2. ادرس التقارب المنتظم والمعياري للمتسلسلة على كل فترة محدودة و مغلقة في $[0,+\infty)$.

السؤال 5 :

1. اعط تعريف سيجما جبر على $\mathbb{R}$.
2. اعط مبرهنة التقارب المطرد و مبرهنة التقارب المسقوف.
3. أثبت مع التبرير أن: $\int_0^{+\infty}\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

السؤال 6 :

1. أوجد قيمة التكاملين $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{1+e^x}dx$ و $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1+e^x}dx$.
2. أوجد قيمة النهاية $\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+e^x}dx$. (علل إجابتك).
3. أوجد قيمة مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+t}$, لكل $t\in[0,+\infty)$.
4. أوجد قيمة النهاية $\lim_{t\to+\infty}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n+t}$. (علل إجابتك).