

### السؤال 1 :

1. ادرس تقارب التكاملين المعتلين  $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$  و  $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx$ .
2. ادرس تقارب المتسلسلة  $\sum_{n \geq 2} \ln(1 - \frac{1}{n^2})$  وأوجد مجموعها.
3. ادرس تقارب متتالية الدوال  $(f_n)_n$  حيث  $f_n(x) = \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$  و  $x \in \mathbb{R}$ .

### السؤال 2 :

1. ادرس تقارب متتالية الدوال  $(f_n)_n$  على الفترة  $[0, +\infty[$ ، حيث  $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ .
2. أوجد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ .
3. ادرس التقارب المنتظم للمتتالية  $(f_n)_n$  على الفترة  $[0, 1]$ .
4. ادرس التقارب البسيط و التقارب المنتظم للمتسلسلة  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$  على الفترة  $[0, \pi]$ .

### السؤال 3 :

1. أوجد متسلسلة القوى للدالة  $f(x) = \frac{1-x}{1-x+x^2}$ .
2. لتكن  $(a_n)_n$  متتالية من الأعداد الحقيقية حيث  $a_0 = 1$  و  $a_1 = -1$  و  $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2$  لكل  $n \geq 1$ .  
أوجد قيمة  $a_n$  لكل  $n \in \mathbb{N}$ .

## السؤال 4 :

1. لتكن الدالة  $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty[$  المعرفة بما يلي

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{إذا } A = \emptyset \\ 10 & \text{إذا } A \neq \emptyset \end{cases}$$

أثبت أن الدالة قياس خارجي و أوجد المجموعات القابلة للقياس بالنسبة لهذا القياس الخارجي.

2. أوجد مع التبرير النهاية التالية:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(e^x)}{1 + nx^2} dx$

3. أثبت مع التعليل أن  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1 + e^x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$