

د. برهان

الفصل الأول 1435/1436 هـ
الزمن: ثلاث ساعات

الاختبار النهائي
في المقرر 151 رياض

جامعة الملك سعود
كلية العلوم - قسم الرياضيات

إسم الطالب	
الرقم الجامعي	
رقم الشعبة	
إسم المدرس	

س1: (أ) بين فيما إذا كانت العبارة التالية مصدوقة أم لا . $[p \leftrightarrow (q \vee r)] \rightarrow [(\neg q \wedge \neg r) \vee p]$ (ثلاث درجات)
العبارة هي صدوقة لأن :

$$\begin{aligned} [p \leftrightarrow (q \vee r)] &\rightarrow [(\neg q \wedge \neg r) \vee p] \equiv \\ [p \rightarrow (q \vee r)] \wedge [(q \vee r) \rightarrow p] &\rightarrow [(\neg q \wedge \neg r) \vee p] \equiv \\ [(\neg p \vee (q \vee r)) \wedge (\neg(q \vee r) \vee p)] &\rightarrow [(\neg q \wedge \neg r) \vee p] \equiv \\ \neg [(\neg p \vee (q \vee r)) \wedge (\neg(q \vee r) \vee p)] \vee [(\neg q \wedge \neg r) \vee p] &\equiv \\ \neg [(\neg p \vee (q \vee r)) \wedge (\neg(q \vee r) \vee p)] \vee [(\neg q \wedge \neg r) \vee p] &\equiv \neg(\neg p \vee (q \vee r)) \vee T = T \end{aligned}$$

(ب) بين فيما إذا كان : $(u \wedge v) \rightarrow w \equiv (u \rightarrow w) \wedge (v \rightarrow w)$ (درجتان)

u	v	w	$u \wedge v$	$u \rightarrow w$	$v \rightarrow w$	$(u \wedge v) \rightarrow w$	$(u \rightarrow w) \wedge (v \rightarrow w)$
T	F	F	F	F	T	\oplus	\boxed{F}

خذ قيمة
 $u := T$
 $v := F$
 $w := F$

فإن $(u \wedge v) \rightarrow w$ هي T لأن $(u \rightarrow w) \wedge (v \rightarrow w)$ هي F .

(ج) باستخدام الإستقراء الرياضي، أثبت أن $2^n \geq n+12$ لكل عدد صحيح $n \geq 4$. (ثلاث درجات)

نضع $P(n) : 2^n \geq n+12$

خطوة الأساسية : $n=4$.

① $2^4 = 16 \geq 4+12$ صح إذن $P(4)$ حادب .

خطوة الاستقراء : نأخذ $k \geq 4$. ونفترض أن $P(k)$ حادب (يعني لدينا :

① $2^k \geq k+12$ فندلثرت حجة $P(k+1)$. $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$.

$$2^{k+1} \geq 2 \cdot (k+12) = 2k + 24 \geq (k+1) + 12 + k + 11 .$$

س2: (أ) لتكن R علاقة معرفة على مجموعة الأعداد $A = \{0,1,2,3,4,\dots\}$ كمايلي: $a = 2b \Leftrightarrow aRb$

بين فيما إذا كانت R انعكاسية، تناظرية، تخالفية، متعدية. (أربع درجات)

① R ليست انعكاسية لأن $(1,1) \notin R$.

① R ليست تناظرية لأن $(4,2) \in R$ لكن $(2,4) \notin R$.

① R تخالفية لأن إذا كان aRb و bRa فإن $a=b=0$.

① R ليست متعدية لأن $4R2$ و $2R1$ لكن $4 \not R 1$.

(ب) إذا علمت أن $S = \{(a,a), (b,b), (b,d), (c,c), (d,b), (d,d)\}$ علاقة تكافؤ على المجموعة $B = \{a,b,c,d\}$ فجد جميع فصول التكافؤ. (درجة واحدة)

① $[a] = \{a\}$
 ① 3 فصول تكافؤ مختلفة: $[b] = \{b,d\} = [d]$
 $[c] = \{c\}$

(ج) لتكن T علاقة ترتيب جزئي على $E = \{1,2,3,4,5\}$ ممثلة بشكل هاس أدناه.

(i) اكتب T كمجموعة أزواج مرتبة. (درجة واحدة)

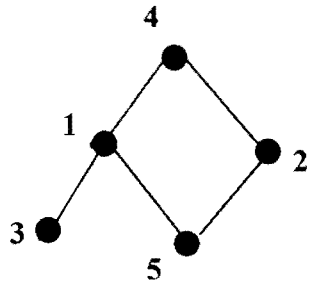
① $T = \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (3,1); (3,4); (1,4); (5,1); (5,4); (5,2); (2,4)\}$

(ii) هل T علاقة ترتيب كلي؟ (برر إجابتك). (درجة واحدة)

T ليست علاقة ترتيب كلي لأنها لا تتمتع

بخاصية المقارنة

$3 \not T 5$
 $5 \not T 3$



(د) أوجد مصفوفة الإغلاق المتعدي للعلاقة الممثلة بالمصفوفة التالية. (ثلاث درجات)

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

① * مصفوفة الإغلاق المتعدي $M_{T(R)} = M + M^{[2]} + M^{[3]}$

① $M^{[2]} = M \odot M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

① $M^{[3]} = M^{[2]} \odot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

① $M_{T(R)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

س3: لتكن f دالة بولية ممثلة بشكل كارنو أدناه:

	zw	zw'	z'w'	z'w
xy	0	1	0	0
xy'	0	1	1	1
x'y	0	0	1	1

(أ) اكتب f على شكل CSP . (درجة)

$$CSP(f) = xyzw' + xy'zw' + xy'z'w' + xy'z'w + x'y'zw' + x'y'z'w + x'y'z'w' + x'y'z'w.$$

(ب) اكتب f على شكل MSP . (درجتان)

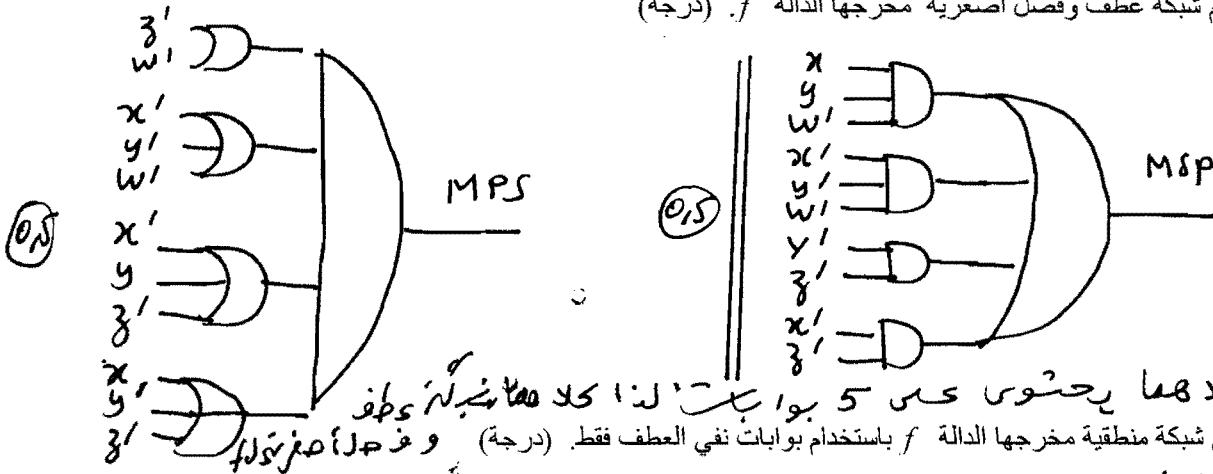
$$MSP(f) = xzw' + x'y'w' + y'z' + x'z'.$$

(ج) اكتب f على شكل MPS . (درجتان)

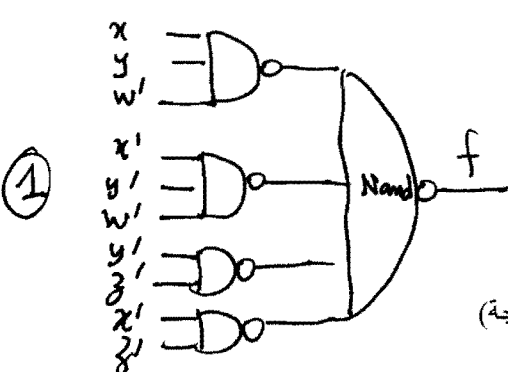
$$MSP(f) = z'w + xzw + xy'z + x'y'z.$$

$$MPS(f) = (z' + w') \cdot (x' + y' + w') \cdot (x' + y + z') \cdot (x + y' + z')$$

(د) صمم شبكة عطف وفصل أصغرية مخرجها الدالة f . (درجة)



كلها يحتاجون على 5 بوابات لنذا كلاهما مضروب



(هـ) صمم شبكة منطقية مخرجها الدالة f باستخدام بوابات نفي الفصل فقط. (درجة)

$$MPS(f) = (z' + w') \cdot (x' + y' + w') \cdot (x' + y + z') \cdot (x + y' + z')$$

$$= [(z' + w')' + (x' + y' + w')' + (x' + y + z')' + (x + y' + z')']'$$

س4: (أ) هل يوجد رسم (بسيط) متتالية درجات رؤوسه 1,2,3,3,3,4,5؟ (برر إجابتك). (درجة)

لا يوجد لأنه لا يحقق للعلاقة $\sum \deg(v_i) = 2|E|$ $\sum \deg(v_i) = 21$ هو عدد فردي

(ب) هل يمكن أن يكون رسم ذو 8 رؤوس و 18 ضلعاً منتظماً؟ لماذا؟ (درجة)

لا يمكن لأن لو افترضنا أنه يوجد رسم منتظم ذات $n=8$ رأس

و منتظم من نوع r فإن $18 = |E| = \frac{nr}{2} = 4r$

يعني $r = \frac{18}{4} = 9/2$ وهو ليس عدداً صحيحاً.

(ج) إذا كان عدد أضلاع الرسم التام K_n هو $4n$ ، فجد عدد رؤوسه. (درجتان)

K_n له n رأس و $\frac{n(n-1)}{2}$ ضلع. إذن لدينا $4n = \frac{n(n-1)}{2}$

فدونا $n-1=8$ $n=9$ إذن K_9

(د) أوجد العدد الصحيح k إذا علمت أنه توجد شجرة متتالية درجات رؤوسها 1,1,1,1,2,2,k,2k. (درجتان)

بما أن $\sum \deg v = 2|E|$ فهي رسم بسيط ذات 8 رؤوس و 7 أضلاع

$$\sum \deg v = 2|E|$$

$$1+1+1+1+2+2+k+2k = 3k+8 = 2(8-1)$$

$$3k+8=14$$

$$3k=6$$

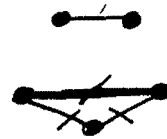
(2)

يعني $k=2$

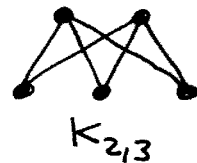
س5: (أ) مثل $\overline{K_{2,3}}$ متمم الرسم $K_{2,3}$ ، ثم بين فيما إذا كان $\overline{K_{2,3}}$ ثنائي التجزئة. (درجتان)

$\overline{K_{2,3}}$ ليس ثنائي التجزئة لأنه يحتوي على دورة فردية

(1)



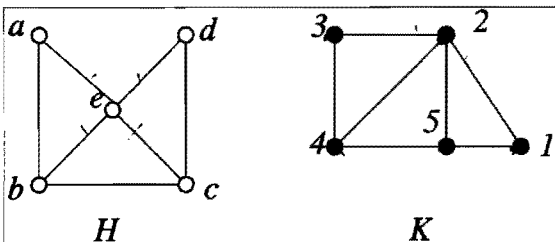
فإن



له 5 رؤوس و 6 أضلاع

$\overline{K_{2,3}}$ له 5 رؤوس و 10 أضلاع (لأن $K_{2,3} \cup \overline{K_{2,3}} = K_5$)

(ب) بين فيما إذا كان الرسمان K, H أدناه متماثلين أم لا. (درجتان)



H و K متماثلين لأنه

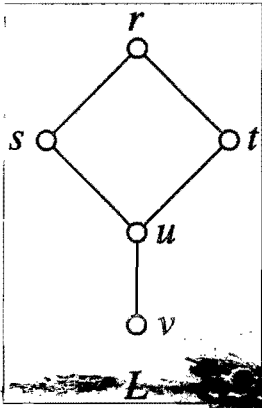
يوجد تطابق تماثلي f

اسحب العدد 2 إلى الوسط
و قسم بقسمة 1 إلى الأعلى
نحصل على H
الرسم K .

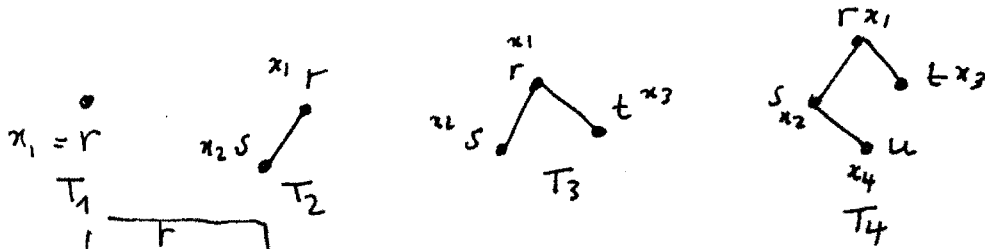
$x \in V(H)$	a	b	c	d	e
$f(x) \in V(K)$	3	4	5	1	2

(2)

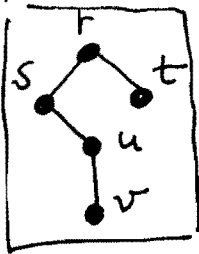
(أ) ليكن الرسم L أدناه



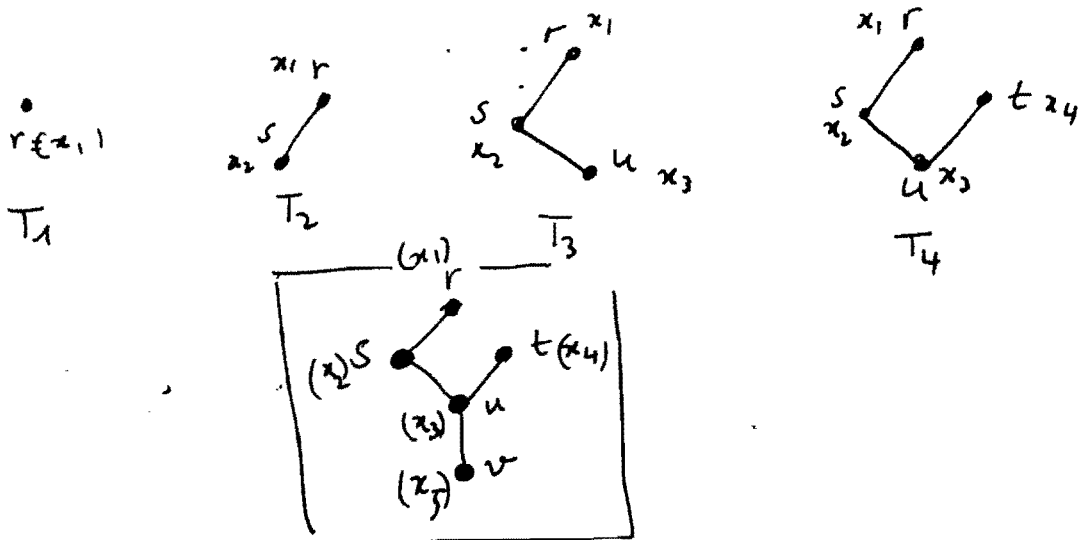
(i) جد شجرة تقصٍ عرضي جذرها r . (درجتان)



شجرة تقصٍ
عرضي جذرها r



(ii) جد شجرة تقصٍ عمقي (طولي) جذرها r . (درجتان)



شجرة تقصٍ عمقي جذرها r