الفصل الثاني 1436/1435 هـ الزمن: 3 ساعات	الاختبار النهائي في المقرر 151 ريض	جامعة الملك سعود كلية العلوم- قسم الرياضيات

د/برهان

اسم الطالب	
الرقم الجامعي	

السؤال الأول (4 درجات)

(أ) بدون استخدام الجداول أثبت أن : $p \leftrightarrow (\neg q \wedge \neg r) \equiv \neg p \leftrightarrow (q \vee r)$. (درجتان)

$$p \leftrightarrow (\neg q \wedge \neg r) \equiv (p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)) \wedge ((\neg q \wedge \neg r) \rightarrow p) .$$
$$\equiv (\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)) \wedge ((q \vee r) \vee p) .$$
$$\equiv (\neg (q \vee r) \vee \neg p) \wedge (p \vee (q \vee r)) .$$
$$\equiv ((q \vee r) \rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \rightarrow (q \vee r)) .$$
$$\equiv \neg p \leftrightarrow (q \vee r) .$$

2

(ب) بين فيما إذا كانت العبارة : $[\neg(A \rightarrow B)] \wedge [B \wedge \neg D]$ تناقضا أم لا . (درجتان)

$$[\neg(A \rightarrow B)] \wedge [B \wedge \neg D] \equiv$$
$$[\neg(\neg A \vee B)] \wedge [B \wedge \neg D] \equiv$$
$$[A \wedge \neg B] \wedge [B \wedge \neg D] \equiv$$
$$(A \wedge \neg D) \wedge (B \wedge \neg B] \equiv (A \wedge \neg D) \wedge F \equiv F.$$

تناقضا

2

السؤال الثاني (5 درجات)

(أ) ليكن P التقرير التالي : " إذا كان $a+b \leq 4$ فإن $a \leq 1$ أو $b \leq 3$" . أكتب حرفيا المكافئ العكسي Q لـ P ثم استخدمه لإثبات صواب P . (درجتان)

- نضع $A: a+b \leq 4$; $B: a \leq 1$; $C: b \leq 3$

التقرير P على الصورة الرمزية $P: A \rightarrow (B \vee C)$

المكافئ العكسي لـ P هو Q : $\neg(B \vee C) \rightarrow \neg A$

$\equiv (\neg B \wedge \neg C) \rightarrow \neg A$

1 "إذا كان $a>1$ و $b>3$ فإن $a+b>4$"

الإثبات: نفترض أن $a>1$ و $b>3$ فنستنتج أن $a+b>1+3=4$. 1

(ب) استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أن: $5n^2 - 3n - 2 \geq 0$ لكل عدد صحيح $n \geq 1$. (3 درجات)

نضع: $P(n) : 5n^2 - 3n - 2 \geq 0$

① • الخطوة الأساسية: $n = 1$

$5 \times 1^2 - 3 \times 1 - 2 = 0 \geq 0$ إذن $P(1)$ صائب.

• خطوة الاستقراء:

ليكن $k \geq 1$. نفترض أن $P(k)$ صائب (يعني لدينا $5k^2 - 3k - 2 \geq 0$)

فلنثبت صحة $P(k+1)$ (يعني $5(k+1)^2 - 3(k+1) - 2 \overset{?}{\geq} 0$)

② $$5(k+1)^2 - 3(k+1) - 2 = 5(k^2 + 2k + 1) - 3k - 3 - 2$$
$$= 5k^2 + 10k + 5 - 3k - 3 - 2$$
$$= [5k^2 - 3k - 2] + \underbrace{10k + 2}_{\geq 0} \geq 0$$
$$= \geq 0$$

لأن $k \geq 1$

ونستنتج أن $P(k+1)$ صائب

نستنتج أن: لكل $n \geq 1$، $P(n)$ صائب

السؤال الثالث (5 درجات)

لتكن R العلاقة المعرفة على المجموعة $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ كما يلي: $x \; R \; y \Leftrightarrow x + y$ عدد زوجي.

(i) أثبت أن R علاقة تكافؤ. (3 درجات)

• R انعكاسية على $\mathbb{N}$ لأن عندما نأخذ $x \in \mathbb{N}$، $x + x = 2x$ وهو عدد زوجي يعني $x R x$. ①

① • R تناظرية على $\mathbb{N}$ لأن عندما نأخذ $x, y \in \mathbb{N}$ ونفترض أن $x R y$ فإن $(x+y)$ هو زوجي. هذا يؤدي أن $(y+x)$ أيضا هو زوجي يعني أن $y R x$.

① • R متعدية على $\mathbb{N}$ لأن عندما نأخذ $x, y, z \in \mathbb{N}$ ونفترض أن $x R y$ و $y R z$ فإن $(x+y)$ زوجي و $(y+z)$ زوجي هذا يؤدي

$\begin{cases} x+y = 2a \\ y+z = 2b \end{cases} \Rightarrow x + z = 2a + 2b - 2y = 2(\underbrace{a+b-y}_{\text{عدد صحيح}})$

إذن $x R z$

(ii) أوجد $[2]$. (درجة)

①
$$[2] = \{x \in \mathbb{N} \;/\; x R 2\}$$
$$[2] = \{x \in \mathbb{N} \;/\; (x+2) = \text{زوجي}\}$$
$$[2] = \{x \in \mathbb{N} \;/\; x \text{ زوجي}\} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

(iii) بيّن فيما إذا كانت العلاقة R تخالفية. (درجة)

① • R ليست تخالفية لأن $2 R 4$ و $4 R 2$ لكن $2 \neq 4$.

السؤال الرابع (13 درجة)

(أ) لتكن الدالة البولية $f(x,y,z) = xy + z$.

(i) جد $CSP(f)$. (درجتان)

$$f(x,y,z) = xy + z$$
$$= xy(z+z') + (x+x')(y+y')z$$
$$= xyz + xyz' + xyz + xy'z + x'yz + x'y'z$$

2

$$\boxed{CSP(f) = xyz + xyz' + xy'z + x'yz + x'y'z}$$

(ii) جد $CPS(f)$. (درجتان)

$$CPS(f) = (CSP(f'))'$$

1

$$f' = (xy+z)' = (x'+y')\cdot z'$$
$$= x'z' + y'z' = x'(y+y')z' + (x+x')y'z'$$
$$= x'yz' + x'y'z' + xy'z' + x'y'z'.$$
$$CSP(f') = xy'z' + x'yz' + x'y'z'.$$

1

$$\boxed{CPS(f) = (x'+y+z)\cdot(x+y'+z)\cdot(x+y+z)}$$

(ب) لتكن g دالة بولية ممثلة بشكل كارنو أدناه :

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy	1	0	1	1
xy'	1	0	1	0
$x'y'$	0	0	1	0
$x'y$	0	0	1	1

(i) أكتب g على شكل MSP. (درجتان)

$$MSP(g) = z'w' + yz' + xzw$$

2

(ii) أكتب g على شكل MPS. (درجتان)

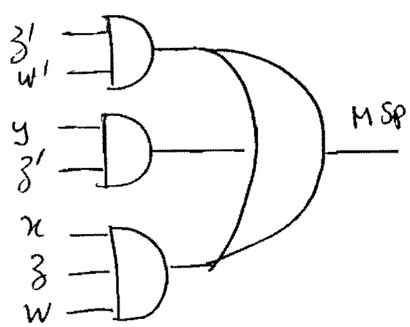
$$MPS(g) = \left(MSP(g')\right)'$$

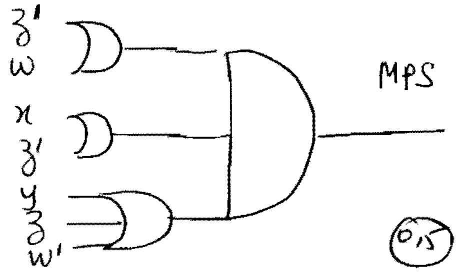
$$MSP(g') = zw' + x'z + y'z'w$$

(2) $$MPS(g) = (z'+w)\cdot(x+z')\cdot(y+z+w')$$

(iii) صمم شبكة عطف و فصل أصغريه مخرجها g. (درجة)

(0.5)





(0.5)

بما أن الشبكتين تحتوي كل 4 بوابات إذن كلاهما شبكة عطف وفصل أصغرية لـ g.

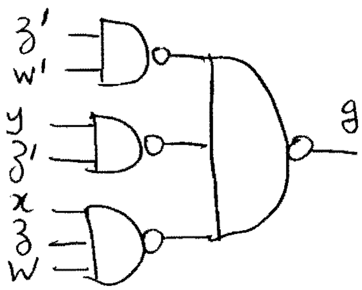
(iv) صمم شبكة منطقية مخرجها g باستخدام بوابات نفي العطف فقط. (درجة)

$$MSP(g) = z'w' + yz' + xzw$$

$$MSP(g) = \left[(z'w' + yz' + xzw)'\right]'$$

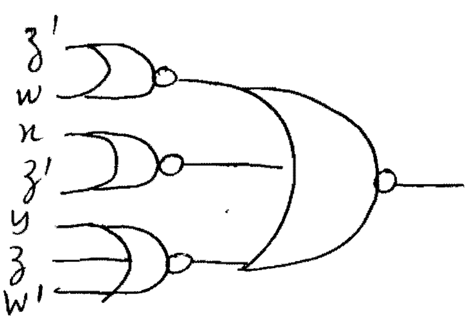
$$MSP(g) = \left[(z'w')'\cdot(yz')'\cdot(xzw)'\right]'$$

(1)



(v) صمم شبكة منطقية مخرجها g باستخدام بوابات نفي الفصل فقط. (درجة)

(1)



$$MPS(g) = (z'+w)(x+z')(y+z+w')$$

$$= \left[\left((z'+w)(x+z')(y+z+w')\right)'\right]'$$

$$= \left[(z'+w)' + (x+z')' + (y+z+w')'\right]'$$

(ج) ليكن B جبرا بوليا و $x, y, z \in B$. أثبت أن: $x = xz \wedge y = yz \Rightarrow (x+y)z' = 0$.

بما أن $x = xz$ و $y = yz$ بالتعويض قيم x و y (درجتان)

(2) $$(x+y)z' = xz' + yz' = (xz)z' + (yz)z'$$

$$= x.0 + y\cdot 0 = 0$$

السؤال الخامس (13 درجة)

(أ) إذا كان عدد رؤوس $K_{m,n}$ يساوي 16 و عدد أضلاعه يساوي 64 فأوجد كلا من m و n. (درجتان)

نعلم أن $K_{m,n}$ لديه $(m+n)$ رأسا و $(m.n)$ ضلعا. إذن لدينا

(*) $\begin{cases} m+n=16 \\ m.n=64 \end{cases} \Leftarrow$ $m=16-n$ بالتعويض في (2): $(16-n)n=64 \Leftrightarrow n^2-16n+64=0$

$\Delta=(16)^2-4\times 64=0$

2 $n=\frac{16}{2}=8$

$m=8$ عندئذ

إذن $K_{8,8}$

(ب) أوجد عدد أضلاع الرسم المتمم لـ $K_{12,8}$ ثم بين فيما إذا كان الرسم $K_{12,8}$ ذاتي التتميم. (3 درجات)

$K_{20}=K_{12,8}\cup\overline{K_{12,8}}$ (رسم تام)

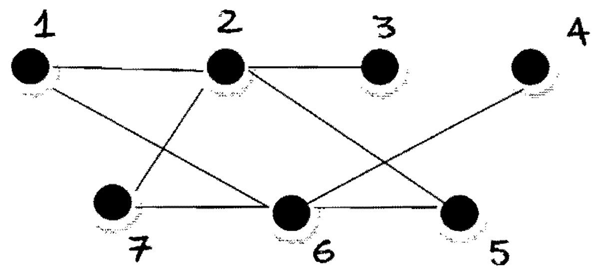
K_{20} لديه $\frac{20\times 19}{2}=190$ ضلع

2 $K_{12,8}$ لديه 96 ضلع

فنستنتج أن $\overline{K_{12,8}}$ له $190-96=94$ ضلعا

1 $K_{12,8}$ ليس ذاتي التتميم لأن $K_{12,8}\ncong\overline{K_{12,8}}$ (ليس لهما نفس عدد الأضلاع)

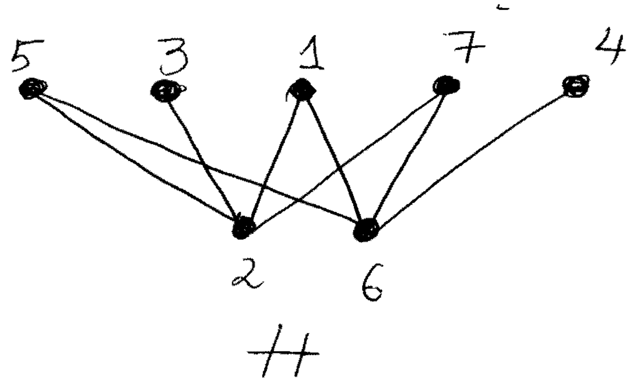
(ج) بيّن فيما إذا كان الرسم G أدناه ثنائي التجزئة أم لا , و إذا كان ثنائي التجزئة فأوجد تمثيلا ثنائي التجزئة له. (درجتان)



G

G هو رسم ثنائي التجزئة لأنه لا يحتوي على دورات فردية.

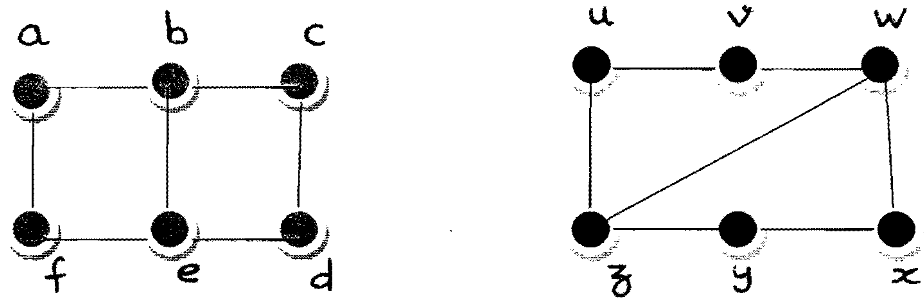
2



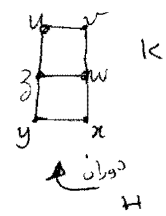
H

مثلا

(د) بيّن فيما إذا كان الرسمان التاليان متماثلين : (درجتان)



H K



نعم $H \simeq K$ لأنه يوجد تطبيق تماثلي f :

2

$x\in V(H)$	a	b	c	d	e	f
$f(x)\in V(K)$	v	w	x	y	z	u

(هـ) إذا كانت T شجرة تحتوي بالضبط 20 رأسا درجة كل واحد منها 2 و x رأسا درجة كل واحد منها 1 فأوجد x. (درجتان)

نستخدم مبرهنة مجموع درجاته يساوي ضعف عدد أضلاعه.

1

$$\sum_{x\in V(T)} \deg x = 2|E|$$

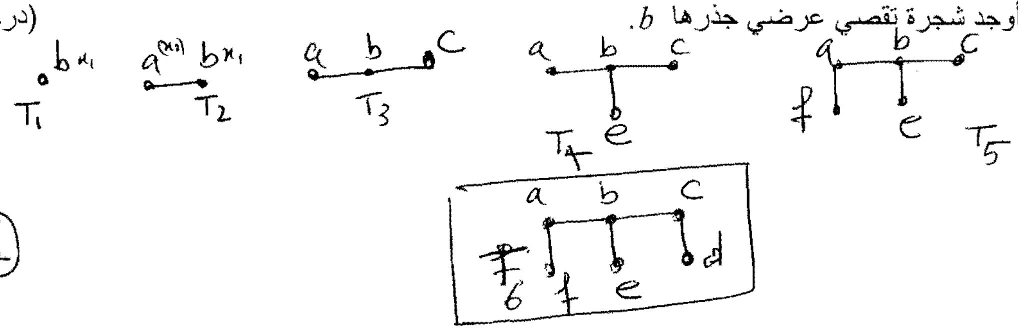
T لديها $(x+20)$ رأسا وبما أن T شجرة فإن $19+x=|E|$

1

إذن $x+40 = 2(19+x) \Leftarrow x=2$.

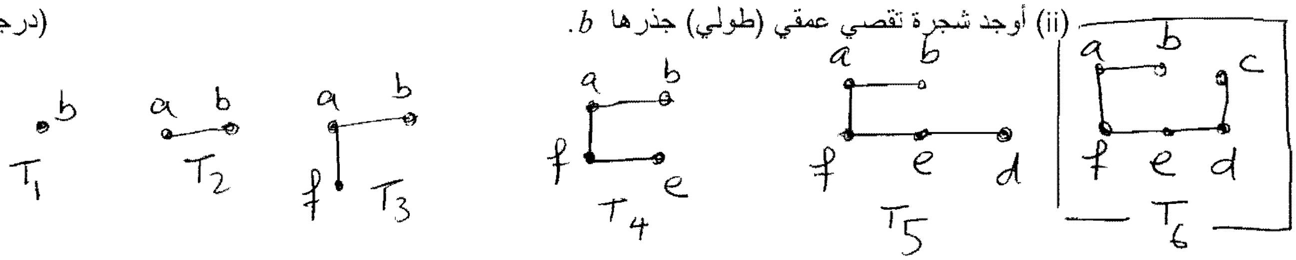
(و) للرسم H أعلاه (في الفقرة (د)) :

(i) أوجد شجرة تقصي عرضي جذرها b. (درجة)



1

(ii) أوجد شجرة تقصي عمقي (طولي) جذرها b. (درجة)



1