جامعة الملك سعود كلية العلوم- قسم الرياضيات	الاختبار النهائي في المقرر 151 ريض	الفصل الصيفي 1433/1432 هـ الزمن: ثلاث ساعات
الاسم:	الرقم:	رقم الشعبة:

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
رمز الجواب	أ	ج	د	ج	د	ب	أ	ج	د	ب	ب	ب

الجزء الأول: اختر الإجابة الصحيحة (درجتان لكل سؤال).

(1) العبارة $\neg(p \to q) \to p$ **هي :**

أ) مصدوقة ب) تناقض ج) مخلوطة د) لا شيء مما ذكر.

(2) العبارة $(p \wedge q) \to r$ **متكافئة منطقيا لـ:**

أ) $(p \vee \neg q) \to r$ ب) $(p \wedge \neg r) \to q$ ج) $(p \wedge \neg r) \to \neg q$ د) $\neg(p \to r) \wedge q$

(3) المكافئ العكسي للعبارة التالية " إذا كان $a+b=0$ **و** $a>0$ **فإن** $b<0$ **" هي:**

أ) إذا كان $a+b \neq 0$ و $a \leq 0$ فإن $b \geq 0$ ب) إذا كان $b \geq 0$ فإن $a+b \neq 0$ و $a \leq 0$

ج) إذا كان $b<0$ فإن $a+b \neq 0$ أو $a \leq 0$ د) إذا كان $b \geq 0$ فإن $a+b \neq 0$ أو $a \leq 0$.

(4) إذا كانت R **علاقة تكافؤ على** $A=\{a,b,c,d\}$ **بحيث فصول التكافؤ هي :** $\{a,d\},\{b\},\{c\}$ **, فإن** R **هي:**

أ) $\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$ ب) $\{(a,d),(d,a),(b,b),(c,c)\}$

ج) $\{(a,a),(a,d),(b,b),(c,c),(d,a),(d,d)\}$ د) $A \times A$.

(5) إذا كانت R **علاقة تكافؤ على** $A=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ **المعرفة بالقاعدة:**

$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow$ $(a+c)$ **عدد زوجي و** $(b+d)$ **عدد زوجي فإن** $\left|A/R\right|$ **يساوي:**

أ) 2 ب) ∞ ج) 6 د) 4.

(6) الإغلاق المتعدي للعلاقة $T=\{(1,1),(1,2),(3,1)\}$ **المعرفة على المجموعة** $A=\{1,2,3\}$ **يساوي:**

أ) T ب) T^2 ج) $A \times A$ د) لا شيء مما ذكر.

(7) إذا كان B **جبر بولي و** $x,y \in B$ **بحيث** $xy=y$ **فإن :**

أ) $x+y=x$ ب) $x+y=y$ ج) $x=1$ د) لا شيء مما ذكر.

(8) الشكل CSP **للدالة البولية** $f(x,y,z)=(xy+z)(xz+y')$ **هو:**

أ) $xyz+xy'z'+y'z'$ ب) $xyz+xy'z'+x'yz+x'y'z'$

ج) $xyz+xy'z'+x'y'z'$ د) $xy'z'+x'y'z'+x'y'z''$.

(9) إذا كانت $g(x,y,z)=xy'z''+x'y'+yz+y'z'$ **دالة بولية, فإن** $MSP(g)$ **هو :**

أ) $xy'+x'y'+yz+y'z'$ ب) $xy'+xz+x'y'+x'z'$

ج) $xy'+x'y'+y'$ د) $xy'+x'y'+z$.

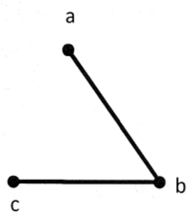
(10) ليكن G **رسما منتظم من نوع 3 عدد رؤوسه** n **و عدد أضلاعه** 15 **فإن** n **يساوي :**

أ) 5   ب) 10   ج) 30   د) 45.

(11) ليكن G **رسما بسيطا عدد رؤوسه** n **وعدد أضلاعه** 56 **و عدد أضلاع متمم** G **يساوي** 80 **فإن** n **يساوي :**

أ) 16   ب) 17   ج) 18   د) لا شيء مما ذكر.

(12) عدد المسارات المختلفة من a **إلى** b **طولها 3 للرسم التالي هو:**



أ) 1   ب) 2   ج) 3   د) 4.

<u>الجزء الثاني</u> : أجب عن الأسئلة التالية:

(1) أثبت أن $\frac{1^2}{4\times1^2-1}+\frac{2^2}{4\times2^2-1}+\frac{3^2}{4\times3^2-1}+\ldots+\frac{n^2}{(4n^2-1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$ **لكل** $n\geq1$ $(n\in\mathbb{N})$.

(4 درجات)

نستخدم المبدأ الأول للاستقراء الرياضي :

نضع $\mathcal{P}(n)$: " $\frac{1^2}{4\times1^2-1}+\cdots+\frac{n^2}{(4n^2-1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$ "

• <u>الخطوة الأساسية</u>: $n=1$; $\frac{1^2}{4\times1^2-1}=\frac{1}{4-1}=\frac{1}{3}=\frac{2}{2\times3}$ لأن $\mathcal{P}(1)$ صادق.

• <u>خطوة الاستقراء</u>: نأخذ $k\geq1$ نفترض أن $P(k)$ صادق (يعني ليس $\frac{1^2}{4\times1^2-1}+\cdots+\frac{k^2}{4k^2-1}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$)

فلنثبت أن $P(k+1)$ يبقى صادق.

$$\frac{1^2}{(4\times1^2-1)}+\frac{2^2}{(4\times2^2-1)}+\cdots+\frac{k^2}{(4k^2-1)}+\frac{(k+1)^2}{(4(k+1)^2-1)}\overset{?}{=}\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

$$\underbrace{\frac{1^2}{4\times1^2-1}+\frac{2^2}{4\times2^2-1}+\cdots+\frac{k^2}{(4k^2-1)}}_{=}+\frac{(k+1)^2}{(4(k+1)^2-1)}=$$

$$\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{4(k+1)^2-1}=\frac{(k+1)}{2}\left[\frac{k}{2k+1}+\frac{(k+1)}{2(k+1)^2-1/2}\right]$$

$$=\frac{(k+1)}{2}\left[\frac{k}{2k+1}+\frac{k+1}{2k^2+4k+3/2}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{k+1}\frac{n^2}{4n^2-1}\quad=\left(\frac{k+1}{2}\right)\left[\frac{k}{2k+1}+\frac{2k+2}{4k^2+8k+3}\right]=\left(\frac{k+1}{2}\right)\left[\frac{k}{2k+1}+\frac{2(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}\right]$$

إذن $P(k+1)$ هو تعبير صائب.

$$=\left(\frac{k+1}{2}\right)\left[\frac{k(2k+3)+2(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}\right]=\left(\frac{k+1}{2}\right)\left(\frac{2k^2+5k+2}{(2k+1)(2k+3)}\right)=\left(\frac{k+1}{2}\right)\left(\frac{\cancel{(2k+1)}(k+2)}{\cancel{(2k+1)}(2k+3)}\right)$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

(2) أثبت أن $\sqrt{7}$ عدد غير كسري. **(3 درجات)**

نستخدم طريقة البرهان بالتناقض

نفترض أن $\sqrt{7}$ هو عدد كسري إذن يوجد $a,b\in\mathbb{N}$, $b\neq 0$

بحيث $\sqrt{7}=\frac{a}{b}$ و $\gcd(a,b)=1$ 1

بما أن $\sqrt{7}=\frac{a}{b}$ فإن $\frac{a^2}{b^2}=7$ يعني $a^2=7b^2$ إذن

$7|a^2 \Rightarrow 7|a$ (1) يعني يوجد $c\in\mathbb{N}$ بحيث $a=7c$)

بالتعويض نجد $49c^2=7b^2 \Leftrightarrow b^2=7c^2$ إذن $7|b^2$

هذا يؤدي إلى أن $7|b$ (2). (1) و (2) $\Rightarrow \gcd(a,b)\geq 7$ ↯ 1

وهذا تناقض مع $\gcd(a,b)=1$. فنستنتج أن $\sqrt{7}$ هو عدد غير كسري. 1

(3) إذا كانت R علاقة معرفة على الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ كالتالي: $a\,R\,b \Leftrightarrow a|b$.

(5 درجات)

أ) أثبت أن R علاقة ترتيب جزئي. يكفي أن نثبت أن R انعكاسية، تخالفية ومتعدية على $\mathbb{N}$

• R انعكاسية على $\mathbb{N}$. بما أن لكل $a\in\mathbb{N}$, $a|a$ إذن aRa . 1

• R تخالفية على $\mathbb{N}$. نأخذ $a,b\in\mathbb{N}$ نفترض أن $a|b$ و $b|a$

فلنثبت أن $a=b$.

بما أن $a|b$ إذن يوجد $k\in\mathbb{N}$ بحيث $b=ak$ (1) 1

كذلك $b|a$ إذن يوجد $k'\in\mathbb{N}$ بحيث $a=bk'$ (2)

بالتعويض قيمة b في (2) نحصل: $a=akk' \Leftrightarrow a(1-kk')=0$

بما أن $a\neq 0$ فإن $kk'=1$ وبما أن $k,k'\in\mathbb{N}$ فإذا $k=k'=1$

فنستنتج من خلال (1) و (2) أن $a=b$

• R متعدية على $\mathbb{N}$. نفترض أن aRb و bRc فلنثبت أن aRc .

(1) بما أن aRb إذا $a|b$ يعني توجد $k\in\mathbb{N}$ بحيث $b=ka$

كذلك bRc إذا $b|c$ يعني توجد $k'\in\mathbb{N}$ بحيث $c=k'b$

هذا يؤدي إلى $c=kk'a$ ، $c=ma$ حيث $m=kk'\in\mathbb{N}$ يعني $a|c \Rightarrow aRc$

ب) هل R علاقة ترتيب كلي ؟ لماذا ؟

لا , لأن الخاصية المقارنة لم تتحقق .

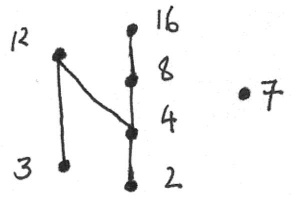
(1) مثال $3\not R 5$ لأن $3\nmid 5$

و $5 \not R 3$ لأن $5\nmid 3$.

ج) أوجد شكل هاس إذا كانت R معرفة فقط على المجموعة $A=\{2,3,4,7,8,12,16\}$.

بما أن $A\subset\mathbb{N}$ فإن (A,R) هي مجموعة مرتبة جزئيا .

(1)



شكل هاس.

(4) ليكن الشكل التالي هو شكل كارنو للدالة f: (7 درجات)

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy	0	0	1	1
xy'	0	1	1	0
$x'y'$	0	0	1	1
$x'y$	0	0	1	1

(أ) جد $MSP(f)$. (2 درجتان)

(2) $MSP(f) = yz' + x'z' + xy'w'$

(ب) جد $MPS(f)$. (2 درجتان)

1

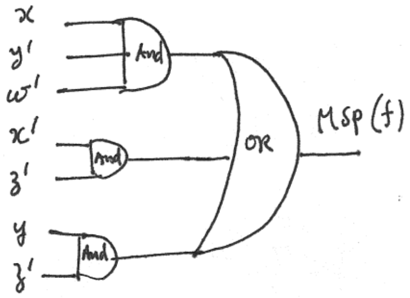
$$MPS(f) = (MSP(f'))'$$

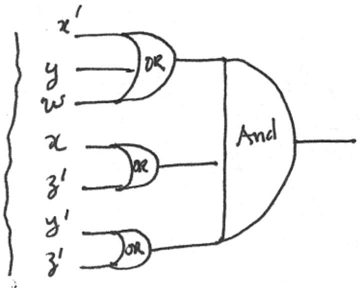
$$MSP(f') = x'z + yz + xy'w$$

1

$$MPS(f) = (x+z')\cdot(y'+z')\cdot(x'+y+w')$$

(ج) صمم دارة عطف و فصل أصغرية مخرجها f. (درجة واحدة)



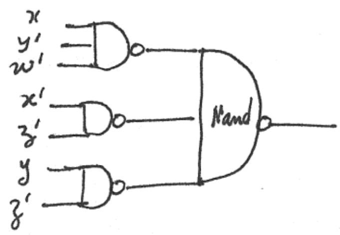


1

كلاً من الدارتين تحتوي على نفس عدد البوابات وهي 4.
إذن كلاً من الدارتين تعتبر دارة عطف وفصل أصغرية مخرجها f

(د) صمم دارة مخرجها f مستخدما بوابات نفي العطف فقط. (درجة واحدة)

$$MSP(f) = xy'w' + x'z' + yz'$$
$$= [(xy'w' + x'z' + yz')']' = [(xy'w')'\cdot(x'z')'\cdot(yz')']'$$

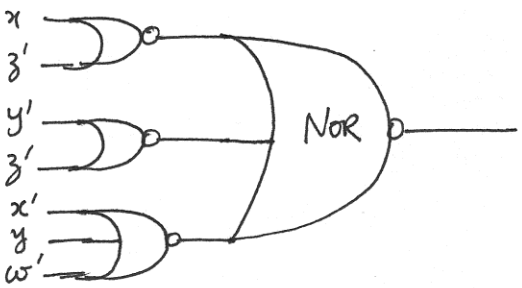


1

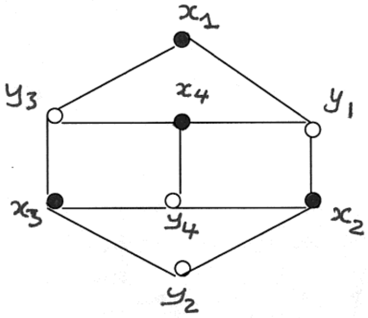
(هـ) صمم دارة مخرجها f مستخدما بوابات نفي الفصل فقط. (درجة واحدة)

$$MPS(f) = (x+z')(y'+z')(x'+y+w')$$
$$= [((x+z')\cdot(y'+z')\cdot(x'+y+w'))']'$$
$$= [(x+z')'+(y'+z')'+(x'+y+w')']'$$

1

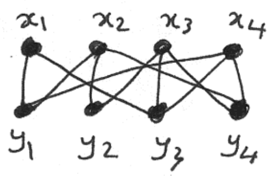


(5) بيّن فيما إذا كان الرسم التالي ثنائي التجزئة أم لا ؟ (درجتان)

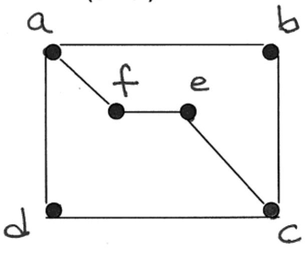


- بما أن الرسم لا يحتوي على دورات فردية فهو ثنائي التجزئة.

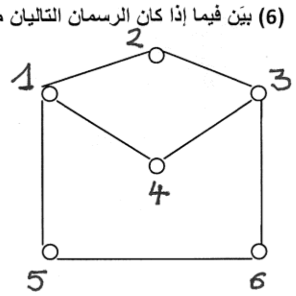
2



(6) بيّن فيما إذا كان الرسمان التاليان متماثلين أم لا ؟ (درجتان)



G



H

• نعم G و H متماثلين لأنه يوجد تطبيق f تقابلي يحقق الخاصية: إذا $e=\{x,y\}\in E(G)$ فإن $\{f(x),f(y)\}\in E(H)$.

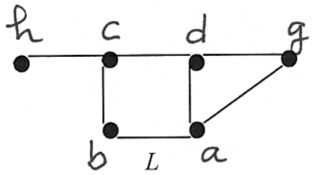
1

①

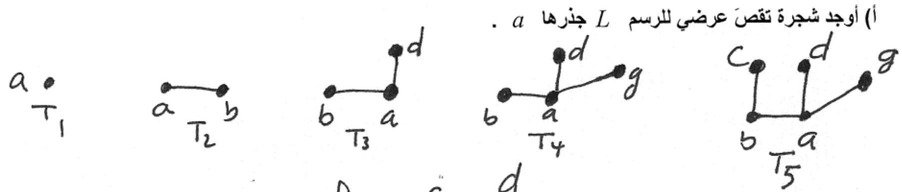
x	a	b	c	d	e	f
$f(x)$	1	2	3	4	6	5

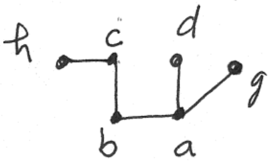
$G \simeq H$

(7) ليكن L هو الرسم المقابل (3 درجات)



أ) أوجد شجرة تقصٍ عرضي للرسم L جذرها a .

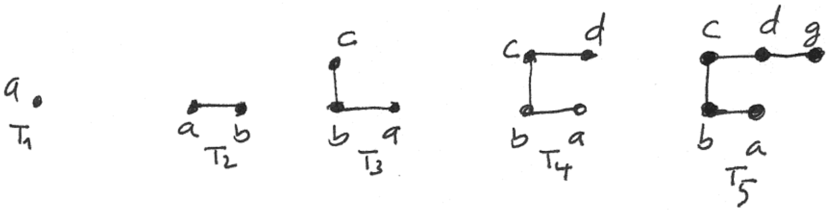


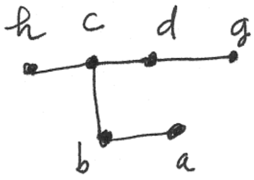


1.5

شجرة تقصٍ عرضي لـL جذرها a .

ب) أوجد شجرة تقصٍ عمقي للرسم L جذرها a .





شجرة تقصٍ عمقي للرسم L جذرها a .

1.5