جامعـــة الملك سعـــود　　　كليـة العلــوم　　　قســو الريـاضيـــات

151 ريض / الإختبار النهائي للفصل الصيفي 1434- 1435هـ / الزمن، ثلاث ســــاعات

د. برهان

الاسم :..

الرقم الجامعي :...............................

الجزء الأول (10 درجات) (انتبه إلى كون الأسئلة مستقلة عن بعضها)

(1) دون استخدام جداول الصواب , أثبت أن :

(أ) $\neg(p\to q)\wedge\neg(p\to\neg q)$ هي تناقض.　　　(درجة و نصف)

$$\neg(p\to q)\wedge\neg(p\to\neg q)\equiv\neg(\neg p\vee q)\wedge\neg(\neg p\vee\neg q)$$ 0,5

$$\equiv(p\wedge\neg q)\wedge(p\wedge q)$$ 0,5

$$\equiv(p\wedge p)\wedge(q\wedge\neg q)$$

$$\equiv p\wedge F\equiv F$$ 0,5

(ب) $(p\wedge\neg q)\to(p\vee q)$ هي مصدوقة.　　　(درجة و نصف)

$$(p\wedge\neg q)\to(p\vee q)\equiv\neg(p\wedge\neg q)\vee(p\vee q)$$ 0,5

$$\equiv(\neg p\vee q)\vee(p\vee q)$$ 0,5

$$\equiv(\neg p\vee p)\vee(q\vee q)$$

$$\equiv T\vee q\equiv T$$ 0,5

(2) بيّن صحة أو خطأ كل واحدة من العبارات التالية مع التعليل :

(أ) $\exists x\in\mathbb{Z}\mid\ (x^2+3x\le 2)$.　　　(درجة و نصف)

صح , خذ $x=0$: 0,5

$0=0^2+3\times 0\le 2$ 1

(ب) $\forall y \in \mathbb{R} \mid \quad (y^2+y \geq 0)$. (درجة و نصف)

0.5 خاطئ. خذ $y=-1/2$

1 $$y^2+y=(-1/2)^2+(-1/2)$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\leq 0$$

(3) باستخدام الاستقراء الرياضي, أثبت أن : (4 درجات)

$1\times 2+2\times 2^2+3\times 2^3+....+n\times 2^n=(n-1)2^{n+1}+2$ لكل عدد صحيح $n\geq 1$

نضع $P(n)$: " $1\times 2+2\times 2^2+\dots+n\times 2^n=(n-1)2^{n+1}+2$ "

• خطوة الأساسية : $n=1$:

1 $$1\times 2^1 \overset{?}{=} (1-1)2^2+2$$

$2=2$ صح إذن $P(1)$ صائب.

• خطوة الاستقراء: نأخذ $k\geq 1$. نفترض أن $P(k)$ صائب

1 (يعني لدينا : $1\times 2+2\times 2^2+\dots+k2^k=(k-1)2^{k+1}+2$)

فلنثبت أن التقرير $P(k+1)$ يبقى صائب

(يعني $1\times 2+2\times 2^2+\dots+k2^k+(k+1)2^{k+1}\overset{?}{=}k2^{k+2}+2$

2 $$\underbrace{1\times 2+2\times 2^2+\dots+k2^k}+(k+1)2^{k+1}=$$
$$(k-1)2^{k+1}+2+(k+1)2^{k+1}=$$
$$(k-1+k+1)2^{k+1}+2=2k.2^{k+1}+2$$
$$=k2^{k+2}+2$$

إذن $P(k+1)$ صائب.

ونستنتج من خلال المبدأ الأول للاستقراء الرياضي أن لكل $n\geq 1$, $P(n)$ صائب

يعني لدينا $1\times 2+2\times 2^2+\dots+n\times 2^n=(n-1)2^{n+1}+2$ لكل $n\geq 1$.

الجزء الثاني (9 درجات)

(**1**) أوجد أصغر علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة $A = \{1,2,3\}$ وتحتوي على الأزواج التالية : $(1,2);(2,3)$. (3 درجات)

$$R = \{ (1,2);(2,3);(1,1);(2,2);(3,3);(2,1);(3,2);(1,3);(3,1) \} = A \times A$$

③ هي أصغر علاقة تكافؤ على $A = \{1,2,3\}$
وتحتوي على $\{(1,2);(2,3)\}$

. طريقة ثانية : $R_1 = \{(1,2);(2,3)\}$; $R = \tau(\sigma(\rho(R_1)))$

ρ الانغلاق الانعكاسي ; σ الانغلاق التناظري ; τ الانغلاق المتعدي .

(**2**) لتكن R علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{Z}^+ = \{1,2,3,....\}$ بالقاعدة :

$m \; R \; n$ إذا وفقط إذا كان $\frac{m}{n}$ هو عدد فردي.

(i) أثبت أن R علاقة ترتيب جزئي. (3 درجات)

• R انعكاسية على $\mathbb{Z}^+$ لأن عندما نأخذ $m \in \mathbb{Z}^+$
فإن $\frac{m}{m} = 1$ وهو عدد فردي. إذن $m R m$. ①

• R تخالفية على $\mathbb{Z}^+$ لأن عندما نأخذ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ونفترض أن
$m R n$ و $n R m$ فإن لدينا
$\frac{m}{n} = k$ عدد فردي موجب. كذلك $\frac{n}{m} = k'$ وهو عدد فردي موجب ①
$1 = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = k k'$. هذا يؤدي $k = k' = 1$
إذن $m = n$.

• R متعدية على $\mathbb{Z}^+$ لأن عندما نأخذ $m, n, p \in \mathbb{Z}^+$ ونفترض أن
$m R n$ و $n R p$ فإن لدينا $\frac{m}{n} = k$ (عدد فردي) و $\frac{n}{p} = k'$ (عدد فردي)
$\frac{m}{p} = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{p} = k k' = L$ (ضرب عددين فرديين هو عدد فردي) ①
إذن $m R p$.

(ii) بيّن فيما إذا كانت R علاقة ترتيب كلي أم لا ؟ علل إجابتك. (درجة)

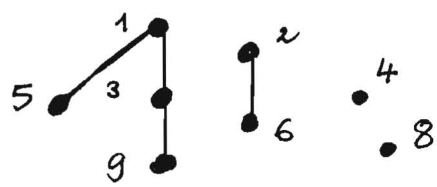
R ليست علاقة ترتيب كلي لأنه عندما نأخذ $m=2$ و $n=4$ (0,5)

فإن: $m \not R n$ و $n \not R m$ (0,5)

$(2 \not R 4)$ $(4 \not R 2)$

(iii) باقتصار R على المجموعة $A=\{1,2,3,4,5,6,8,9\}$, جد شكل هاس . (درجتان)

$$R/_A = \{(1,1),(2,2);\ldots,(9,9);(3,1);(5,1);(9,1);(6,2);(9,3)\}$$



شكل هاس . (2)

<u>الجزء الثالث (7 درجات)</u>

لتكن f دالة بولية ممثلة بشكل كارنو المقابل :

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy	1	1	1	1
xy'	0	1	1	0
$x'y'$	0	1	1	0
$x'y$	0	0	1	0

(i) أوجد شكل MSP للدالة f. (درجتان)

$$MSP(f) = xy + z'w' + y'w'.$$ (2)

(ii) أوجد شكل MPS للدالة f. (درجتان)

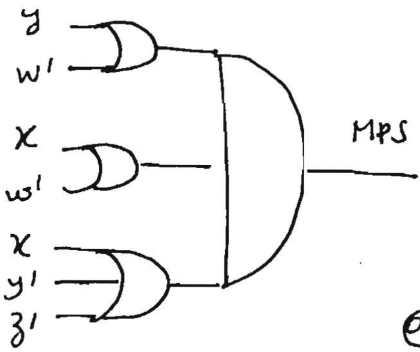
$$MPS(f) = (MSP(f'))'$$

$$MSP(f') = y'w + x'w + x'yz$$

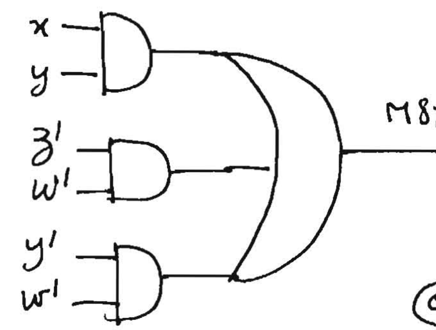
$$MPS(f) = (y+w')\cdot(x+w')\cdot(x+y'+z')$$

(2)

(iii) صمم شبكة عطف و فصل أصغرية مخرجها الدالة f. (درجة ونصف)



(0,5)



(0,5)

كلاهما تحتوي على 4 بوابات عطف و فصل إذن كلاهما تعتبر شبكة عطف وفصل أصغرية مخرجها f.

(0,5)

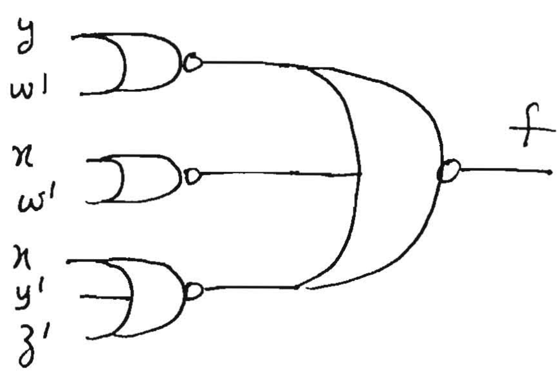
(iv) صمم شبكة منطقية مخرجها الدالة f باستخدام بوابات نفي الفصل فقط. (درجة ونصف)

$$MPS(f) = (y+w')(x+w')(x+y'+z')$$

$$= \left[\left((y+w')(x+w')(x+y'+z')\right)'\right]'$$

$$= \left[(y+w')' + (x+w')' + (x+y'+z')'\right]'$$

(1)



(0,5)

- شبكة نفي فصل -

<u>الجزء الرابع (14 درجة)</u> (انتبه إلى كون الأسئلة مستقلة عن بعضها)

(**1**) إذا كان G رسما بسيطا عدد رؤوسه n وعدد أضلاعه 56 وكان عدد أضلاع $\bar{G}$ هو 80 فاحسب n.

(3 درجات)

$G \cup \bar{G} = K_n$ إذن

1 $$|E(G)| + |E(\bar{G})| = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$56 + 80 = \frac{n(n-1)}{2}$$

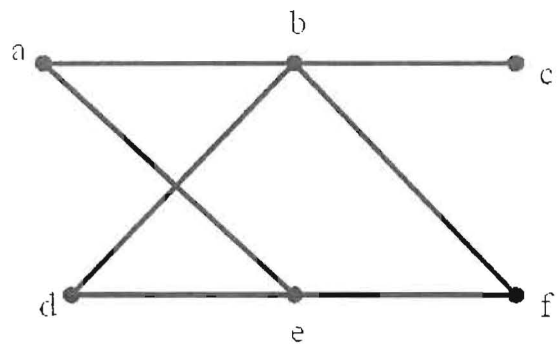
$$136 = \frac{n(n-1)}{2}$$

1 $$272 = n(n-1) \iff n^2 - n - 272 = 0$$

المميز $$\Delta = 1 + 4 \times 272 = 1089 = (33)^2$$

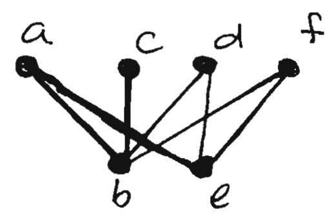
1 $\boxed{n = 17}$ إذن $$n_1 = \frac{1+33}{2} = 17 > 0$$
$$n_2 < 0$$

(**2**) بين فيما إذا كان الرسم H التالي ثنائي التجزئة أم لا ؟ علل إجابتك ؟ (3 درجات)

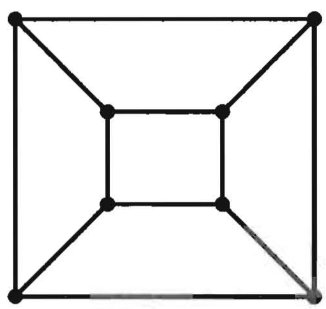


نعم H هو ثنائي التجزئة لأن جميع دوراته زوجية

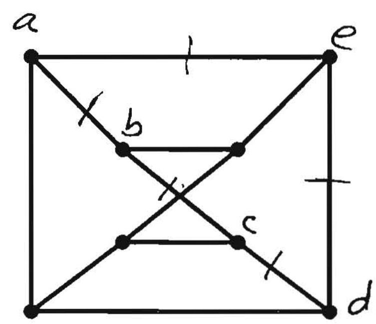
و مثال للرسم :



(3) بين فيما إذا كان الرسمان H و G متماثلين أم لا ؟ علل إجابتك ؟ (3 درجات)



G



H

1

G و H ليس متماثلين $G \not\cong H$

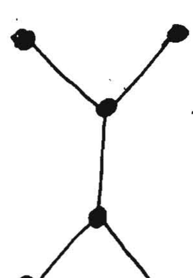
لأن جميع دورات G هي زوجية لكن H يحتوي

2

على دورة فردية طولها 5 : $abcdea$.

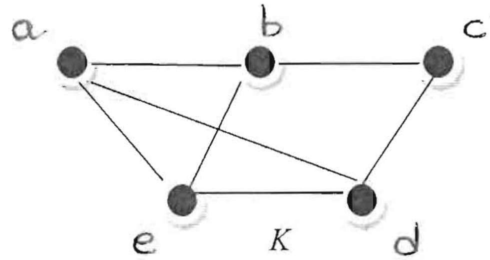
(4) هل يوجد شجرة متتالية درجات رؤوسها $3,3,1,1,1,1$ ؟ علل إجابتك ؟ (درجتان)

نعم , خذ الشجرة التالية :



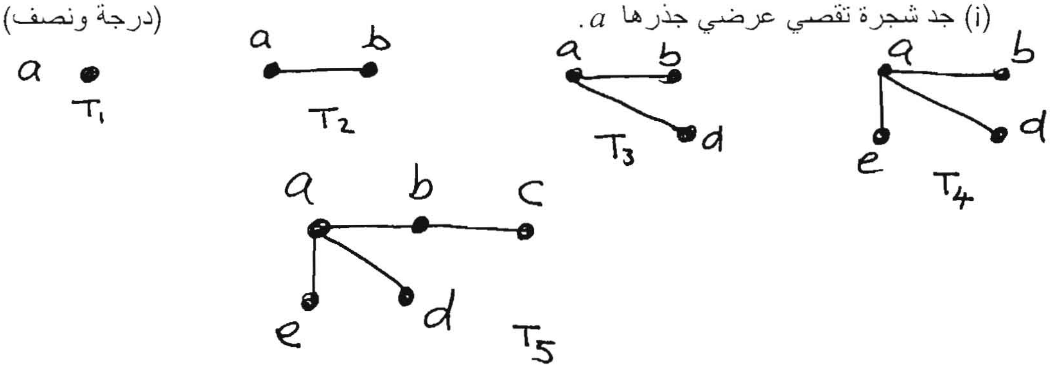
2

(5) ليكن K هو الرسم المبين أدناه



(i) جد شجرة تقصي عرضي جذرها a. (درجة ونصف)

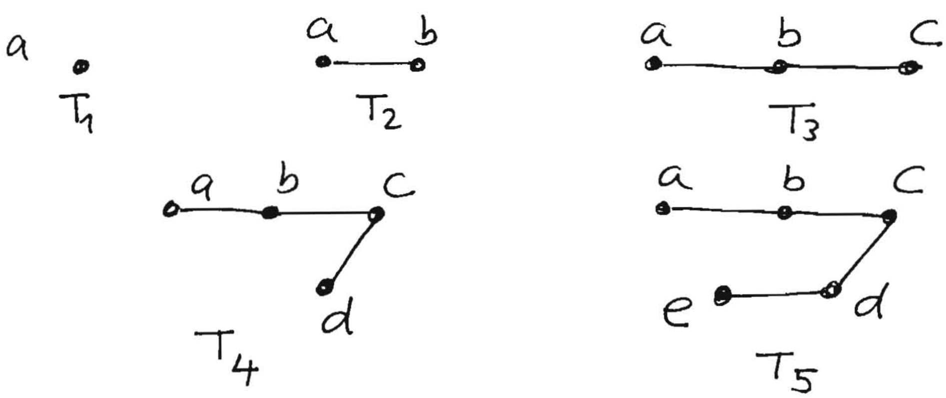
1,5



شجرة تقصي عرضي جذرها a

(ii) جد شجرة تقصي عمقي (طولي) جذرها a. (درجة ونصف)

1,5



شجرة تقصي عمقي
جذرها a