الاختبار النّهائي - المدّة: ثلاث ساعات

1 - **الهندسة الاقليديّة:** نعتبر في المستو الاقليدي $\mathbb{E}^2$ ، النّقط $A(0,1)$ ، $B(1,2)$ ، $C(2,-1)$ ، والنّقط $A'(0,0)$ ، $B'(1,1)$ ، $C''(-2,2)$.

١- اعط صيغة التّناظر بالنّسبة للمستقيم AC.

٢- بيّن أنّ المثلّثين ABC و $A'B'C''$ متطابقان وجد صيغة التّقايس الّذي يحوّل ABC إلى $A'B'C''$.

٣- حدّد نوع وجد عناصر تركيب التّقايسين الاقليديّين $T_2 \circ T_1$ حيث

$$T_2 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad T_1 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2- **الهندسة الكرويّة:** نعتبر في الكرة $\mathbb{S}^2$ ، النّقط $\xi_1\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ ، $\xi_2\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ ، $\xi_3\left(\frac{2-2\sqrt{3}}{6},\frac{2+\sqrt{3}}{6},\frac{1+2\sqrt{3}}{6}\right)$ ، والتّحويل $T:\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ المعرّف ب

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

١- احسب أطوال أضلاع المثلّث الكروي $\xi_1\xi_2\xi_3$.

٢- أثبت أنّ مجموع زوايا المثلّث الكروي $\xi_1\xi_2\xi_3$ يساوي $\frac{4\pi}{3}$.

٣- بيّن أنّ التّحويل T تقايس كروي، عيّن طبيعته، وحدّد عناصره.

3- **الهندسة الزّائديّة:** نعتبر في نصف المستو العلوي الزّائدي $\mathbb{H}^2$ ، النّقط $z_1 = 2+4i$ ، $z_2 = 5+5i$ ، $z_3 = 4+2i$ ، والنّقط $z_1' = 1+i$ ، $z_2' = 1+2i$ ، $z_3' = 2+i$.

١- بيّن أنّ المثلّثين الزّائديّين $z_1z_2z_3$ و $z_1'z_2'z_3'$ متطابقان.

٢- جد صيغة التّقايس الزّائدي $T:\mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ الّذي يحوّل $z_1z_2z_3$ إلى $z_1'z_2'z_3'$.

حلول الاختبار النهائي

١- الهندسة الاقليدية:

١- صيغة التناظر:
$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

٢- $A'B'=AB=\sqrt{2}$ ، $B'C'=BC=\sqrt{10}$ ، $C'A'=CA=2\sqrt{2}$

إذاً المثلثان متطابقان و صيغة التقايس:
$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

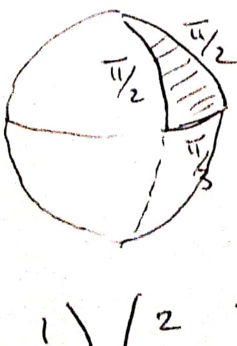
٣- تركيب التقايسين $T_2\circ T_1$ تناظر بالنسبة للمستقيم $4x-3y=5$.

٢- الهندسة الكروية:

١- $\xi_1\xi_2=\pi/2$ ، $\xi_2\xi_3=\pi/2$ ، $\xi_3\xi_1=\frac{\pi}{3}$

٢- مساحة المثلث $\xi_1\xi_2\xi_3$ هي $\frac{1}{2}\,\frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi}\times 4\pi=\frac{\pi}{3}$

وعليه فمجموع زوايا المثلث هي $\pi+\pi/3=\frac{4\pi}{3}$



٣- لدينا
$$\left(\frac{1}{3}\right)^2\,{}^t\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix}=Id$$

أي أن T تقايس كروي. T دوران مركزه $\xi_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ وزاويته $\cos^{-1}\frac{1}{3}$.

- الهندسة الزائدية :

$d(z_1, z_2) = d(z'_1, z'_2) = ch^{-1}\frac{5}{4}$ ، $d(z_2, z_3) = d(z'_2, z'_3) = ch^{-1}\frac{3}{2}$

$d(z_3, z_1) = d(z'_3, z'_1) = ch^{-1}\frac{3}{2}$.

٢- صيغة التقايس هي :

$$f : z \longmapsto \frac{z+10}{-z+10}$$