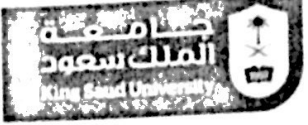


<p>الاختبار الشهري الأول للمقرر 151 رياض للفصل الثاني 1436-1437 هـ</p>	<p>كلية علوم الحاسب والمعلومات فرع المزاومية</p> 
<p>الزمن : ساعة ونصف. الدرجة :</p>	<p>الاسم : الرقم الجامعي :</p>

السؤال الأول (5 درجات):

(1) اثبت أن : $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$. (3 درجات)

$$\begin{aligned}
 (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \\
 &\equiv \neg p \vee (q \wedge r). \\
 &\equiv p \rightarrow (q \wedge r).
 \end{aligned}$$

(2) بدون استخدام الجداول, اثبت أن : $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ هي مصادوقة. (درجتان)

$$\begin{aligned}
 (p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q) &\equiv \\
 \neg (p \wedge q) \vee (\neg p \vee q) &\equiv \\
 \neg p \vee \neg q \vee \neg p \vee q &\equiv \\
 \neg p \vee (q \vee \neg q) &\equiv \neg p \vee T \\
 &\equiv T
 \end{aligned}$$

السؤال الثاني (11 درجة):

(1) اثبت أن: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ لكل عدد صحيح $n \geq 1$. (3 درجات)

نضع $P(n): 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

خطوة الأساسية: $n=1$

①

لنحسب $P(1)$ ونرى $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$

خطوة الاستقراء: نأخذ $k \geq 1$ ونفترض أن $P(k)$ حاد (يعني $1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$)

②

فلنثبت صحة $P(k+1)$:
 $1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$
 $= \frac{(k+1)^2}{4} [k^2 + 4k + 4] = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

لذا $P(k+1)$ حاد

باستخدام المبدأ الأول، $P(n)$ حاد لكل $n \geq 1$.

(2) لتكن $(a_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة كالتالي:

$$a_0 = 1; a_1 = 2; a_2 = 3$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2a_{n-3}, \forall n \geq 3$$

(4 درجات)

اثبت أن: $a_n \leq 3^n$ لكل عدد صحيح $n \geq 0$.

- نستخدم المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي:

نضع $P(n): "a_n \leq 3^n"$

①

$n=2$

$$a_2 = 3 \leq 3^2 = 9$$

لذا $P(2)$ حاد

$n=1$

$$a_1 = 2 \leq 3^1 = 3$$

لذا $P(1)$ حاد

$n=0$

$$a_0 = 1 \leq 3^0 = 1$$

لذا $P(0)$ حاد

خطوة الاستقراء: نأخذ $k \geq 2$. نفترض أن $P(0), P(1), P(2), \dots, P(k)$ جميعها حادية

ولنثبت صحة $P(k+1)$: $(a_{k+1} \leq 3^{k+1})$

①

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} + 2a_{k-2}$$

②

$$a_k \leq 3^k$$

$$a_{k-1} \leq 3^{k-1}$$

$$a_{k-2} \leq 3^{k-2}$$

$$a_{k+1} \leq 3^k + 3^{k-1} + 2 \times 3^{k-2} = 3^{k-2} [9 + 3 + 2] = 27 \times 3^{k-2} = 3^3 \times 3^{k-2} = 3^{k+1}$$

①

(درجتان)

(3) اثبت أن: "إذا كان n عدد فرديا فإن $(5n+6)$ هو عدد فردي".

يعاين n فرديا، لنأخذ $n = 2k+1$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

①

$$5n = 10k + 5$$

$$5n + 6 = 10k + 11$$

$$= 10k + 10 + 1$$

$$= 2[5k + 5] + 1$$

$$5n + 6 = 2L + 1$$

حيث L عدد صحيح

①

فإن $(5n+6)$ هو فردي.

(4) لتكن a, b, c اعداد صحيحة. استخدم طريقة البرهان بالمكافئ العكسي لاثبات ما يلي: "إذا كان $(a+b-c)$ زوجيا فإن a زوجي أو b زوجي أو c زوجي". (درجتان)

المفاد في العكسي للعبارة هي: "إذا كان a فردي و b فردي و c فردي فإن $(a+b-c)$ هو فردي" (1)

بما أن a فردي فإن $a = 2k + 1$ حيث k عدد صحيح
كذلك b فردي فإن $b = 2L + 1$ حيث L عدد صحيح
و c فردي فإن $c = 2m + 1$ حيث m عدد صحيح

$$\begin{aligned} a+b-c &= (2k+1) + (2L+1) - (2m+1) \\ &= 2(k+L-m) + 1 \\ &= 2X + 1 \end{aligned}$$

إذن $(a+b-c)$ هو عدد فردي

حيث $X = k+L-m$ هو عدد صحيح.

السؤال الثالث (4 درجات):

لتكن R علاقة معرفة على المجموعة $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ كما يلي: $x R y \Leftrightarrow xy \geq 2$.

(درجتان)

(أ) اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة.

$$(2) \quad R = \{(-2, -2); (-2, -1); (-1, -2); (1, 2); (2, 2); (2, 1)\}$$

(درجة)

(ب) أوجد مجال ومدى R .

$$(0.5) \quad \text{مجال } R \text{ هو } D_R = \{-2, -1, 1, 2\}$$

$$(0.5) \quad \text{مدى } R \text{ هو } \text{Im } R = \{-2, -1, 1, 2\}$$

(درجة)

(ج) أوجد M_R , مصفوفة العلاقة R .

(1)

$$M_R = \begin{matrix} & \begin{matrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$