

دا برهان

جامعة الملك سعود كلية العلوم- قسم الرياضيات	الاختبار الفصلي الأول في المقرر 151 رياض	الفصل الثاني 1437/1436 هـ الزمن: ساعة ونصف
--	---	---

اسم الطالب	
الرقم الجامعي	

السؤال الأول

أ- بين فيما إذا كانت العبارتان $A = (p \leftrightarrow q) \wedge r$ و $B = (p \wedge r) \leftrightarrow (q \wedge r)$ متكافئتين منطقياً.
(3 درجات)

العبارتين ليست متكافئتين لأن عندنا ما يلي:

③

p	q	r	A	B
T	T	F	F	T

ب- بدون استخدام الجداول، أثبت أن $(x \vee y) \rightarrow (-x \rightarrow y)$ مصدوقة. (3 درجات)

$$\textcircled{3} \quad (x \vee y) \rightarrow (x \rightarrow y) \equiv \neg (x \vee y) \vee (x \rightarrow y) \equiv \neg A \vee A \equiv T$$

السؤال الثاني

أ- ليكن a, b عددين حقيقيين. استخدم طريقة البرهان البديل لإثبات ما يلي:
"إذا كان $a+b=4$ فإن $a \neq 2$ أو $b \neq 3$ ". (درجتان)

$$p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r \quad \begin{array}{l} p: a+b=4 \\ q: a \neq 2 \\ r: b \neq 3 \end{array}$$

نفترض أن $a+b=4$ و $a=2$

فإن $b=2$ إذن $b \neq 3$

②

ب- استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أن " $1 \times 2 \times \dots \times n > 2^{n+1}$ " لكل عدد صحيح $n \geq 5$.
(3 درجات)

$$P(n): n! > 2^{n+1}$$

خطوة الأساس: $n=5$

$$5! = 120 > 2^6 = 64 \quad \text{حيث } P(5) \text{ حاد}$$

①

خطوة الاستقراء: نأخذ $k \geq 5$. نفترض أن $P(k)$ حاد (أي لدينا

$$k! > 2^{k+1} \quad \text{فإنثبت صحة } P(k+1) \quad (k+1)! > 2^{k+2}$$

$$(k+1)! = (k+1)k! > 2 \cdot k! > 2 \cdot 2^{k+1} = 2^{k+2}$$

ونستنتج من خلال المبدأ الأول للاستقراء الرياضي أن لكل $n \geq 5$, $n! > 2^{n+1}$

②

ج- لتكن $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية معرفة كما يلي:

$$u_1=1, u_2=2, u_3=3 \quad \text{و} \quad u_n = 3u_{n-1} - u_{n-2} - u_{n-3} - 2 \quad \text{لكل عدد صحيح } n \geq 4$$

أثبت أن $u_n = n$ لكل عدد صحيح $n \geq 1$. (4 درجات)

نستخدم المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي:

نضع " $u_n = n$ "

$$P(n):$$

خطوة الأساس:

①

$$\begin{array}{l} n=3 \\ u_3 \stackrel{?}{=} 3 \\ \text{حيث } P(3) \text{ حاد} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} n=2 \\ u_2 \stackrel{?}{=} 2 \\ \text{حيث } P(2) \text{ حاد} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} n=1 \\ u_1 \stackrel{?}{=} 1 \\ \text{حيث } P(1) \text{ حاد} \end{array}$$

خطوة الاستقراء: نأخذ $k \geq 3$. نفترض أن $P(1), \dots, P(k)$ جميعها حاد. فإنثبت صحة $P(k+1)$.

①

$$u_{k+1} = 3u_k - u_{k-1} - u_{k-2} - 2$$

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 3k - (k-1) - (k-2) - 2 \\ &= 3k - k + 1 - k + 2 - 2 \\ &= k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_k &= k \\ u_{k-1} &= k-1 \\ u_{k-2} &= k-2 \end{aligned}$$

بما أن $P(k), P(k-1), P(k-2)$ حاد، فإن

②

السؤال الثالث

أ- لتكن R علاقة على $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ معرفة كما يلي: $mRn \Leftrightarrow n = m^2$.

1- اكتب العلاقة R كمجموعة أزواج مرتبة. (درجتان)

$$R = \{(m, n) \in A^2 / n = m^2\}$$

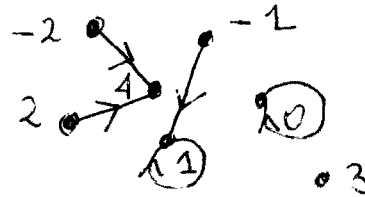
$$R = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$$

2- أوجد كلا من مجال ومدى العلاقة R . (درجة)

$$D_R = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \text{ هو } R$$

$$Im R = \{4, 1, 0\} \text{ هو } R$$

3- مثل العلاقة R برسم موجه. (درجة)



ب- لتكن $S = \{(a, c), (b, a), (c, b)\}$ علاقة على $B = \{a, b, c\}$.

1- أوجد M_S ، مصفوفة العلاقة S . (درجة)

$$M_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2- أوجد العلاقة $\bar{S} - S^{-1}$. (درجتان)

$$\bar{S} = B \times B - S = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

$$= \{(a, c), (b, a), (c, b)\}$$

$$\bar{S} = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, a), (c, c)\}$$

$$\bar{S} - S^{-1} = \bar{S} - \{(c, a), (a, b), (b, c)\} = \{(a, a), (b, b), (c, c)\} = I_B$$

3- أوجد كلا من S^2 و S^3 . (3 درجات)

$$S^2 = S \circ S = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$$

$$S^3 = S^2 \circ S = \{(a, a), (b, b), (c, c)\} = I_B$$