د/ برهان

كلية العلوم- قسم الرياضيات جامعة الملك سعود	الاختبار الفصلي الأول في المقرر 151 ريض	الفصل الثاني 1437/1436 هـ الزمن: ساعة ونصف

اسم الطالب	
الرقم الجامعي	

السؤال الأول

أ- بين فيما إذا كانت العبارتان $A=(p\leftrightarrow q)\wedge r$ و $B=(p\wedge r)\leftrightarrow(q\wedge r)$ متكافئتين منطقيا. (3 درجات)

العبارتين ليست متكافئتين لأن عندما نأخذ :

3

p	q	r	A	B
T	T	F	$\boxed{F}$	$\boxed{T}$

ب-بدون استخدام الجداول، أثبت أن $(x\vee y)\to(\neg x\to y)$ مصدوقة. (3 درجات)

3 $(x\vee y)\to(\neg x\to y)\equiv\neg(x\vee y)\vee(x\vee y)\equiv\neg A\vee A\equiv T$

السؤال الثاني

أ- ليكن a,b عددين حقيقين. استخدم طريقة البرهان البديل لإثبات ما يلي:
"إذا كان $a+b=4$ فإن $a\neq 2$ أو $b\neq 3$". (درجتان)

$p \to (q \vee r) \equiv (p \wedge \neg q) \to r$ $\quad$ $p: a+b=4$

$q: a\neq 2$

$r: b\neq 3$

2

نفترض أن $a+b=4$ و $a=2$

فإن $b=2$ إذن $b\neq 3$

ب-استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أن "$1\times 2\times \ldots \times n > 2^{n+1}$" لكل عدد صحيح $n\geq 5$.
(3 درجات)

$P(n): \quad n! > 2^{n+1}$

• خطوة الأساس: $n=5$

1

$5! = 120 \overset{?}{>} 2^6 = 64$ صح إذن $P(5)$ صائبة

• خطوة الاستقراء: نأخذ $k\geq 5$. نفترض أن $P(k)$ صائبة أي لدينا $(k! > 2^{k+1})$ فلنثبت صحة $P(k+1)$ $\left((k+1)! \overset{?}{>} 2^{k+2}\right)$

2

$2^{k+2} = 2 \cdot 2^{k+1} < 2 \cdot k! < (k+1)\, k! = (k+1)!$

فنستنتج من خلال المبدأ الأول للاستقراء الرياضي أن لكل $n\geq 5$، $n! > 2^{n+1}$

ج- لتكن $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية معرفة كما يلي:
$u_1=1, u_2=2, u_3=3$ و $u_n = 3u_{n-1} - u_{n-2} - u_{n-3} - 2$ لكل عدد صحيح $n\geq 4$.
أثبت أن $u_n = n$ لكل عدد صحيح $n\geq 1$. (4 درجات)

نستخدم المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي:

نضع $P(n)$: "$u_n = n$"

• خطوة الأساس:

1

$n=1$	$n=2$	$n=3$
$u_1 \overset{?}{=} 1$ معطى	$u_2 \overset{?}{=} 2$ صح	$u_3 \overset{?}{=} 3$ صح
$P(1)$ صائبة	$P(2)$ صائبة	$P(3)$ صائبة

• خطوة الاستقراء: نأخذ $k\geq 3$. نفترض أن $P(1), \ldots, P(k)$ جميعها صائبة فلنثبت صحة $P(k+1)$.

1

$u_{k+1} = 3u_k - u_{k-1} - u_{k-2} - 2$

بما أن $P(k)$، $P(k-1)$، $P(k-2)$ صائبة إذن $u_k = k$، $u_{k-1} = k-1$، $u_{k-2} = k-2$

2

فإن $u_{k+1} = 3k-(k-1)-(k-2)-2 = 3k-k+1-k+\cancel{2}-\cancel{2}$

$u_{k+1} = k+1$

فنستنتج لكل $n\geq 1$: $u_n = n$.

السؤال الثالث

أ- لتكن R علاقة على $A=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$ معرفة كما يلي: $mRn \Leftrightarrow n=m^2$.

1- اكتب العلاقة R كمجموعة أزواج مرتبة. (درجتان)

$R=\{(m,n)\in A^2 \ / \ n=m^2\}$

2 $R=\{(-2,4);(-1,1);(0,0);(1,1);(2,4)\}$

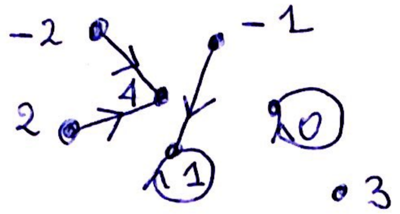
2- أوجد كلا من مجال ومدى العلاقة R. (درجة)

0,5 مجال R هو $D_R=\{-2,-1,0,1,2\}$

0,5 مدى R هو $Im\,R=\{4,1,0\}$

3- مثل العلاقة R برسم موجه. (درجة)

1



ب- لتكن $S=\{(a,c),(b,a),(c,b)\}$ علاقة على $B=\{a,b,c\}$.

1- أوجد M_S، مصفوفة العلاقة S. (درجة)

1 $$M_S=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

2- أوجد العلاقة $\overline{S}-S^{-1}$. (درجتان)

$\overline{S}=B\times B-S=\{(a,a);(a,b);(a,c);(b,a);(b,b);(b,c);(c,a);(c,b);(c,c)\}$
$-\{(a,c);(b,a);(c,b)\}.$

1 $\overline{S}=\{(a,a);(a,b);(b,b);(b,c);(c,a);(c,c)\}.$

1 $\overline{S}-S^{-1}=\overline{S}-\{(c,a);(a,b);(b,c)\}=\{(a,a);(b,b);(c,c)\}=I_B.$

3- أوجد كلا من S^2 و S^3. (3 درجات)

1,5 $S^2=S\circ S=\{(a,b);(b,c);(c,a)\}$

1,5 $S^3=S^2\circ S=\{(a,a);(b,b);(c,c)\}=I_B$