تعريف: نقول أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على الفترة I اذا كان:

$$\boxed{F'(x) = f(x), \ \forall x \in I}$$

مثال: لتكن $F(x) = x^2 + x - 1$ و $f(x) = 2x + 1$.

بما أن $F'(x) = f(x)$ اذا $F(x)$ تعتبر دالة اصلية للدالة $f(x)$.

مثال: لتكن $F(x) = \sin(x) + x$ و $f(x) = \cos(x) + 1$.

بما أن $F'(x) = f(x)$ اذا $F(x)$ تعتبر دالة اصلية للدالة $f(x)$

نظرية: اذا كانت $F(x)$ و $G(x)$ دوالتين اصليتين للدالة $f(x)$ فان

$$F(x) = G(x) + c$$

هذه النظرية تعني أنه اذا كان هاك دالتين اصليتين $F(x)$ و $G(x)$ للدالة $f(x)$ فان الفارق بين الدالتين هو ثابت c : $F(x) - G(x) = c$

مثال: لتكن $F(x) = 2x$ فان الدوال التالية

$$F(x) = x^2$$

$$F(x) = x^2 + 2$$

$$F(x) = x^2 + \sqrt{3}$$

و غيرها تعتبر دوال اصلية للدالة $f(x)$.

بشكل عام، الدالة $F(x) = x^2 + c$ بحيث c ثابت.

تمرين: أوجد الدالة الأصلية للدالة $F(x) = \cos x$.

تعريف: لتكن $f(x)$ دالة متصلة على فترة I . التكامل الغير محدد للدالة $f(x)$ هي الدالة الاصلية العامة للدالة $f(x)$ و يرمز له بالرمز

رمز التكامل → $\boxed{\int f(x)\, dx = F(x) + c}$ ← ثابت التكامل

ملاحظة:

١. الرمز x في التكامل ممكن استبداله بأي رمز u ، v ، t .
٢. رمز التكامل يحتوي على dx و هذا يوحي بالعلاقة بين الاشتقاق و التكامل.

التكاملات الغير محدودة:

(١)

$$\boxed{\int x^n \ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad where\ n \neq -1}$$

مثال: أوجد التكاملات التالية:

2) $\int x^{-3} \ dx$	1) $\int x^2 \ dx$
4) $\int \sqrt{x} \ dx$	3) $\int \frac{1}{x^2} \ dx$

حالة خاصة:

$$\boxed{\int 1\, dx = x + c}$$

القائمة الأساسية للتكاملات الغير محددة:

التكامل	المشتقة
$\int 1\,dx = x + c$	$\frac{d}{dx}(x) = 1$
$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ where $n \neq -1$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^{n+!}$
$\int \cos(x)\ dx = \sin(x) + c$	$\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x)$
$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + c$	$\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x)$
$\int sec^2(x)\,dx = \tan(x) + c$	$\frac{d}{dx}(\tan(x)) = sec^2(x)$
$\int csc^2(x)\,dx = -\cot(x) + c$	$\frac{d}{dx}(\cot(x)) = -csc^2(x)$
$\int \sec(x)\tan(x)\ dx = \sec(x) + c$	$\frac{d}{dx}(\sec(x)) = \sec(x)\tan(x)$
$\int \csc(x)\cot(x)\ dx = -\csc(x) + c$	$\frac{d}{dx}(\csc(x)) = -\csc(x)\cot(x)$

خصائص التكامل الغير محدد:

لتكن f و g دالتين قابلة للتكامل، فان

1. $\frac{d}{dx}\int f(x)\ dx = f(x)$.
2. $\int \frac{d}{dx}(F(x))\ dx = F(x) + c$.
3. $\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\ dx = \int f(x) \pm \int g(x)\ dx$.
4. $\int kf(x)\ dx = k\int f(x)\ dx$, *where k is a constant*

(٢)

$$\int \cos(x)\ dx = \sin(x) + c, \qquad \int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + c$$

$$\int sec^2(x)\,dx = \tan(x) + c, \qquad \int csc^2(x)\,dx = -\cot(x) + c$$

$$\int \sec(x)\tan(x)\ dx = \sec(x) + c, \qquad \int \csc(x)\cot(x)\ dx = -\csc(x) + c$$

مثال: أوجد التكاملات التالية:

1) $\int \frac{1}{cos^2x}\ dx$	2) $\int \frac{1}{sin^2x}\ dx$
3) $\int \frac{\tan x}{\cos x}\ dx$	4) $\int \frac{\cos x}{sin^2x}\ dx$

مثال: اوجد قيمة التكاملات التالية:

1) $\int x^2+x+1 \ \ dx$	2) $\int \sin x - x + 1 \ \ dx$
3) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} \ \ dx$	4) $\int \sqrt[3]{x} \ + \ sec^2 x \ \ dx$

رمز المجموع:

تعريف: لتكن $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ مجموعة من الاعداد. الرمز $\sum_{k=1}^{n} a_k$ يعطي مجموع هذه الاعداد:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots . + a_n$$

مثال (١): أوجد الناتج لما يلي:

1) $\sum_{k=1}^{3} k^2$	2) $\sum_{j=1}^{4} (j+1)$

خصائص رمز المجموع:

1. $\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c+c+\ldots+c}_{\text{n-times}} = nc.$
2. $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k.$
3. $\sum_{k=1}^{n} c\ a_k = c\ \sum_{k=1}^{n} a_k$ for any $c \in \mathbb{R}$.

مثال: اوجد ما يلي:

1) $\sum_{k=1}^{10} 15$
2) $\sum_{k=1}^{4} 2k+1$
3) $\sum_{k=1}^{3} 3(k^2+1)$

نظرية (١):

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

مثال: اوجد ما يلي:

1) $\sum_{k=1}^{100} k$
2) $\sum_{k=1}^{10} k^2$

مجموع ريمان:

تعريف: مجموعة الاعداد $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ تسمى تجزيء للفترة المغلقة $[a,b]$ اذا $a = x_0 <$
$x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$

لاي عدد صحيح موجب n .

ملاحظة:

١. تقسيم الفترة $[a,b]$ باستخدام التجزيء $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ يعطي n فترة جزئية:
$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$
٢. طول كل فترة جزئية $[x_{k-1}, x_k]$ هو $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$
٣. مقياس التجزيء P هو اكبر طول للفترات الجزيئة $\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_n$

أي أن :

$$\|P\| = \max\{\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$$

مثال: $P = \{0, 1.2, 2.3, 3.6, 4\}$ تجزيء للفترة *[0, 4]* فأوجد المقياس.

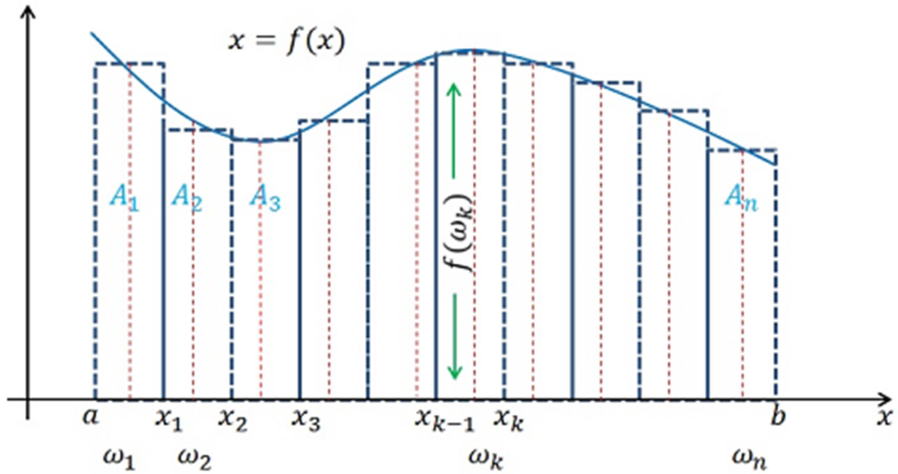
ملاحظة:

١. يقال أن التجزيء P منتظم اذا
$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = \Delta x.$$
٢. اذا كان التجزيء P منتظما فان
$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad and \quad x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}\ .$$

مثال: اوجد تجزيء منتظم يقسم الفترة *[1, 4]* الى 4 فترات منتظمة.

تعريف: لتكن f دالة معرفة على فترة مغلقة $[a,b]$ و ليكن $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ تجزيء لتلك الفترة. لتكن $\omega_k \in [x_{k-1}, x_k]$ علامة على التجزيء P . مجموع ريمان للدالة f على التجزيء P

$$S(f, P, \omega) = \sum_{k=1}^{n} f(\omega_k)\Delta x_k$$



مثال: باستخدام مجموع ريمان ، أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_0^2 (4x-3)\ dx$

مثال: أوجد مجموع ريمان $S(f,P,\omega)$ للدالة $f(x)=2x-1$ على التجزيء المنتظم $P=\{-2,0,2,4,6\}$ للفترة $[-2,6]$ بحيث أن العلامة ω_k هي الطرف الايمن من كل فترة جزئية.

تمرين: باستخدام مجموع ريمان ، أوجد قيمة التكامل التالي: $\int_{-1}^2 1+x^2\ \ dx$

التكامل المحدد:

تعريف: لتكن f دالة معرفة على فترة مغلقة $[a,b]$. اذا الدالة f قابلة للتكامل علة تلك الفترة، فان التكامل المحدد يعرف كالتالي:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\|p\|\to 0} \sum_k f(\omega_k)\,\Delta x_k}$$

الأعداد a و b تسمى حدود التكامل.

ملاحظة: لايجاد التكامل المحدود $\int_a^b f(x)\ dx$ نقوم اولا بايجاد قيمة التكامل $\int f(x)dx = F(x)$ ثم نعوض بحدود التكامل في الدالة F(x) . أي أن اذا

$$\int f(x)\ dx = F(x) + c$$

فان

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)}$$

مثال: اوجد قيمة التكاملات التالية:

2) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$	1) $\int_{-1}^2 2x+1\ dx$
4) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} sec^2 x\ \ dx$	3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ \ dx$

تذكر: قيم الدوال المثلثية لبعض الدوال المثلثية

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	undefined	0

خصائص التكامل المحدد:

- $\int_a^b c\ dx\ =\ c(b-a)$
- $\int_a^a f(x)\,dx\ = 0$
- $\int_a^b f(x)\ dx\ =\ -\int_b^a f(x)\ dx$

- $\int_a^b (f(x)\ dx \pm g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\ dx \pm \int_a^b g(x)\ dx$
- $\int_a^b k\ f(x)\ dx = k \int_a^b f(x)\ dx$
- اذا كان $f(x) \ge g(x)$ فان $\int_a^b f(x)\ dx \ge \int_a^b g(x)\ dx$
- اذا كان $f(x) \ge 0$ لكل x ينتمي للفترة $[a,b]$ فان $\int_a^b f(x)\ dx \ge 0$
- اذا كانت *f(x)* دالة قابلة للتكامل على الفترات *[a,c]* و *[c,b]* فان *f(x)* قابلة للتكامل على الفترة *[a,b]* و أن

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

مثال: اوجد قيمة التكاملات التالية:

1) $\int_2^4 3\ dx$	2) $\int_{-2}^{-2} 5\,x\ dx$

مثال: اذا كان $\int_a^b f(x)\ dx = 3$ و $\int_a^b g(x)\ dx = 4$ فأوجد $\int_b^a \left(f(x) + \frac{g(x)}{2} \right)\ dx$

مثال: اوجد قيمة التكامل: $\int_0^2 |x-1|\ dx$

<u>مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل:</u>

اذا كانت f متصلة على *[a,b]*، فانه يوجد على الاقل $c \in (a,b)$ بحيث :

$$\boxed{\int_a^b \boldsymbol{f(x)\ dx = f(c)(b-a)}}$$

مثال: تحقق من مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$ على الفترة $[-1,3]$.

مثال: اوجد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^2 + 1$ على $[-1,2]$.

مبرهنة: اذا كانت g, h قابلة للاشتقاق على الفترة I و مداها محتوى في الفترة [a.b] حيث أن f متصلة فان

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(x)\,dx = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)}$$

مثال: اذا كانت $G(x) = \int_5^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\ dt$ فاوجد $G'(2)$.

المبرهنة الاساسية لحساب التفاضل و التكامل: انظر الكتاب صـ٣١ـ

التكامل بالتعويض:

مبرهنة:

لتكن الدالة g قابلة للاشتقاق على الفترة $[a,b]$ و مشتقتها متصلة. و لتكن f دالة متلة على فترة I تحتوي مدى g. اذا كانت F دالة اصلية للدالة f على I فان:

$$\boxed{\int f(g(x))\, g'(x)\, dx \ = \ F(g(x)) + c}$$

مثال (١): أوجد التكاملات التالية:

1) $\int (x+1)^3 \quad dx$	2) $\int (2x+1)^3 \quad dx$
3) $\int 6x\sqrt{3x^2+1} \quad dx$	4) $\int \cos(5x+1)\ \ dx$

6) $\int \sin x \, \cos x \ \ dx$	5) $\int \frac{\sin(\sqrt{x}\,)}{\sqrt{x}} \ \ dx$
8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \ sec^2 x \ \ dx$	7) $\int_0^1 x\,(x^2+1)^5 \ \ dx$

<u>الواجب رقم (١) و (٢):</u>

<u>السؤال ١:</u> أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$ على الفترة $[-2,6]$.

<u>السؤال ٢:</u> أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) =$ على الفترة المعطاه .

1) $f(x) = x^2 , \quad [-2,0]$	2) $f(x) = \sqrt{x+1} , \quad [-1,8]$
3) $f(x) = x^2+1 , \quad [-1,2]$	4) $f(x) = \sqrt[3]{x} , \quad [0,1]$

<u>السؤال ٣:</u> استخدم مجموع ريمان لحساب قيمة التكامل $\int_1^2 (6x-5) \ \ dx$.

<u>السؤال ٤:</u> استخدم مجموع ريمان لحساب قيمة التكاملات التالية:

1) $\int_0^2 (4x-3) \ \ dx$	2) $\int_1^2 (3x^2-1) \ \ dx$
3) $\int_1^2 \frac{x}{3} \ \ dx$	4) $\int_{-1}^1 5-x^2 \ \ dx$

<u>السؤال ٥:</u> اذا كانت $F(x) = \int_{\cos x}^{1+\sin} \sqrt{1+t} \ \ dt$ فأوجد $F'(0)$.

<u>السؤال ٦:</u> اذا كانت $G(x) = \int_x^0 \frac{\sin t}{t+1} \ \ dt$ فأوجد $G'(0)$.

<u>السؤال ٧:</u> احسب التكاملات التالية:

1) $\int \frac{5}{x^4} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \ \ dx$	2) $\int_2^4 \frac{2x-3}{\sqrt{x}} \ \ dx$	3) $\int_0^1 x\sqrt{8+x^2} \ \ dx$
4) $\int_0^1 \lvert 2x-1 \rvert \ dx$	5) $\int \frac{x^2+x+1}{x} \ \ dx$	6) $\int x(x^2+5)^7 \ \ dx$
7) $\int \sqrt{x}(x+1)^2 \ \ dx$	8) $\int \cos x - x \ \ dx$	9) $\int sec^2 x - 4 \ \ dx$
10) $\int \frac{\tan x}{\cos x} \ \ dx$	11) $\int \sqrt{x^5} \ \ dx$	12) $\int x^2+3x-1 \ \ dx$
13) $\int_0^{\pi/2} \sin x \ \ dx$	14) $\int \sin x \, (cos^3 x+1) \, dx$	15) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4-1}} \ \ dx$

الدالة اللوغارتمية الطبيعية

كما ذكرنا سابقا $\int f x^r = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$ بحيث أن $r \neq -1$. ماذا لو أن $r = -1$ ؟

أي أننا نريد دالة أصلية للدالة $\frac{1}{x}$.

تعريف: تعرف الدالة اللوغاتمية الطبيعية على النحو التالي:

$$\ln : (0, \infty) \to R, \quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

ملاحظات:

١. مجال الدالة ln هو $(0, \infty)$.

٢. المدى هو R بحيث

$$ln\, x = \begin{cases} > 0 \; if \;\; x > 1 \\ < 0 \;\; if \;\; x < 1 \\ = 0 \;\; if \;\; x = 1 \end{cases}$$

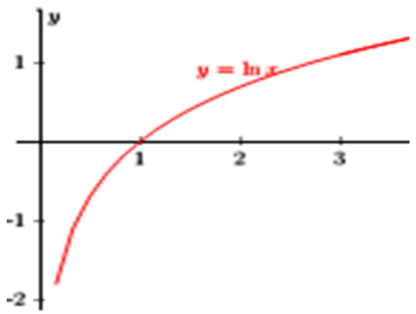
٣. الدالة ln قابلة للاشتقاق وأن

$$\frac{d}{dx}(lnx) = \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{x} \,, \forall\, x > 0$$

٤. الدالة ln تزايدية فعلا

$$\lim_{x \to 0^+} lnx = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$$



مبرهنة:

لكل $a, b > 0$ و لكل $r \in Q$

١. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

٢. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

٣. $\ln(a^r) = r \ln a$

مشتقة الدالة اللوغارتمية الطبيعية:

اذا كانت $u=g(x)$ دالة قابلة للاشتقاق فان

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln |u|) = \frac{1}{u}\, u'}$$

حالة خاصة:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}}$$

تمرين: احسب مشتقة الدوال التالية:

2) $f(x) = x\, \boldsymbol{ln}\, \boldsymbol{x}$	1) $f(x) = \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{5})$
4) $y = \sqrt{\ln x}$	3) $y = \sin(\ln x)$

تمرين: احسب المشتقة التالية:

$$y = \sqrt[5]{\frac{x-1}{x+1}}$$

بما أن $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$

فان

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c}$$

وبشكل عام اذا كانت $u=g(x)$ قابلة للاشتقاق فان

$$\boxed{\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + c}$$

تمرين: اوجد التكاملات التالية:

1) $\int \frac{1}{x+1}\,dx$	2) $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$
3) $\int_1^2 \frac{3x^2-1}{x^3-x}\,dx$	4) $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$
5) $\int \frac{x+1}{x^2+2x}\,dx$	6) $\int_1^3 \frac{x^1+1}{x}\,dx$

الدالة الاسية الطبيعية

الدالة اللوغارتمية الطبيعية هي دالة متباينة و شاملة (دالة متقابلة)، هذا معناه أن لها دالة عكسية. هذه الدالة تسمى الدالة الاسية الطبيعية.

تعريف: الدالة الاسية الطبيعية تعرف كالتالي:

$$exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty) \ ,$$
$$y = exp(x) \Leftrightarrow \ln y = x$$

ملاحظات:

١. مجال الدالة الاسية الطبيعية هو R
٢. مدى الدالة الاسية هو $(0, \infty)$ بحيث

$$\exp(x) = \begin{cases} > 1 : x > 0 \\ = 1 : x = 0 \\ < 1 : x < 0 \end{cases}$$

٣. غالبا نستخدم الرمز e^x بدلا من الرمز $\exp(x)$.
٤. $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ و $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
٥. $ln(e) = 1$

مبرهنة: اذا كانت $a, b > 0$ و كانت $r \in Q$

1) $e^a e^b = e^{a+b}$
2) $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
3) $(e^a)^r = e^{ar}$

تمرين: اوجد قيمة x :

2) $\ln x = 8$	1) $x\, e^{2\ln x}$

مشتقة الدالة الاسية الطبيعية:

اذا كانت $u = g(x)$ دالة قابلة للاشتقاق فان

$$\boxed{\frac{d}{dx} e^u = e^u\, u', \ \ \forall\, x \in I}$$

حالة خاصة:

$$\boxed{\frac{d}{dx} e^x = e^x}$$

تمرين: احسب مشتقة الدوال التالية:

2) $y = e^{\cos x}$	1) $y = e^{3x}$
4) $y = e^{\tan x} \ln x$	3) $y = e^x \tan x$

بما أن $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\, u'$ فان

$$\boxed{\int e^u\, u' \; dx = e^u + c \qquad \int e^x \; dx = e^x + c}$$

تمرين: احسب التكاملات التالية:

1) $\int 5\, e^{5x} \; dx$	2) $\int 6x\, e^{3\,x^2} \; dx$
3) $\int \frac{e^{\tan x}}{cos^2 x} \; dx$	4) $\int_0^1 x\, e^{x^2} \; dx$
5) $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \; dx$	6) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \; dx$

الدوال اللوغارتمية و الاسية العامة

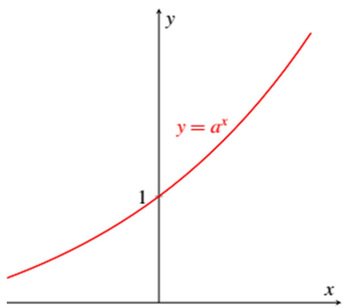
الدالة الاسية العامة

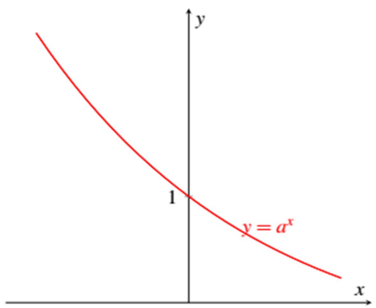
تعريف: تعرف الدالة اللوغارتمية العامة كالتالي

$a^x: R \to (0, \infty)$	بما أن $\ln a^x = x \ln a$ لكل $x \in Q$ فان $a^x = e^{x \ln a}$

ملاحظات:

١. المجال هو R و المدى هو $(0, \infty)$.
٢. اذا كانت $a > 1$ فان الدالة متزايدة، لكن اذا كانت $a < 1$ فان الدالة متناقصة.





مبرهنة: لكل $x, y > 0$ و $a, b \in R$ فان

1. $x^a x^b = x^{a+b}$.
2. $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$.
3. $(x^a)^b = x^{a\,b}$.
4. $(xy)^a = x^a y^a$.

مشتقة الدالة الاسية العامة:

اذا كانت $u = g(x)$ دالة قابلة للاشتقاق فان

$$\boxed{\frac{d}{dx} a^u = a^u \, u' \ln a}$$

عليه نجد أن

$$\boxed{\int a^u \, u' \ dx = \frac{1}{\ln a} \, a^u + c}$$

تمرين: احسب مشتقة الدوال التالية:

1) $y = 5^{\ln x}$	2) $y = sin(3^x)$

تمرين: احسب التكاملات التالية:

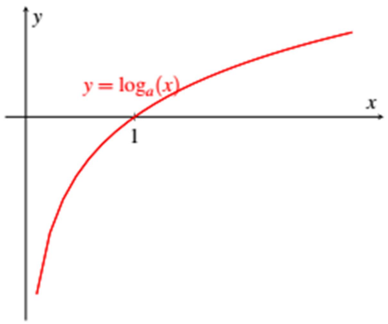
1) $\int \frac{5^{\cos x}}{\csc x} \ dx$	2) $\int \frac{2^x}{2^x + 1} \ dx$

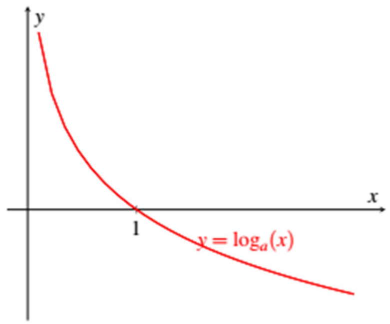
الدالة اللوغارتمية العامة

تعريف: تعرف الدالة اللوغارتمية العامة كالتالي

$$\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R} \,,$$
$$x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a(x) \,.$$

لوغاريتم x للاساس a .





ملاحظات:

١. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

٢. اذا كانت $a > 0$ فان $\log_a x$ دالة متزايدة، لكن اذا كانت $0 < a < 1$ فان $\log_a x$ دالة متناقصة.

٣. $\ln x = \log_e x$ و $\log_{10} x = \log x$ وأن $\log_a a = 1$

مبرهنة: لكل $x, y > 0$ و $r \in R$ فان

$$1.\ \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)\ .$$

$$2.\ \log_a\left(\tfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)\ .$$

$$3.\ \log_a(x^r) = r\log_a(x)\ .$$

مشتقة الدالة اللوغارتمية العامة:

اذا كانت $u = g(x)$ دالة قابلة للاشتقاق فان

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u\ln a}.u'} \quad \boxed{\int \frac{1}{u\ln a}.u'\,dx = \log_a(u) + c}$$

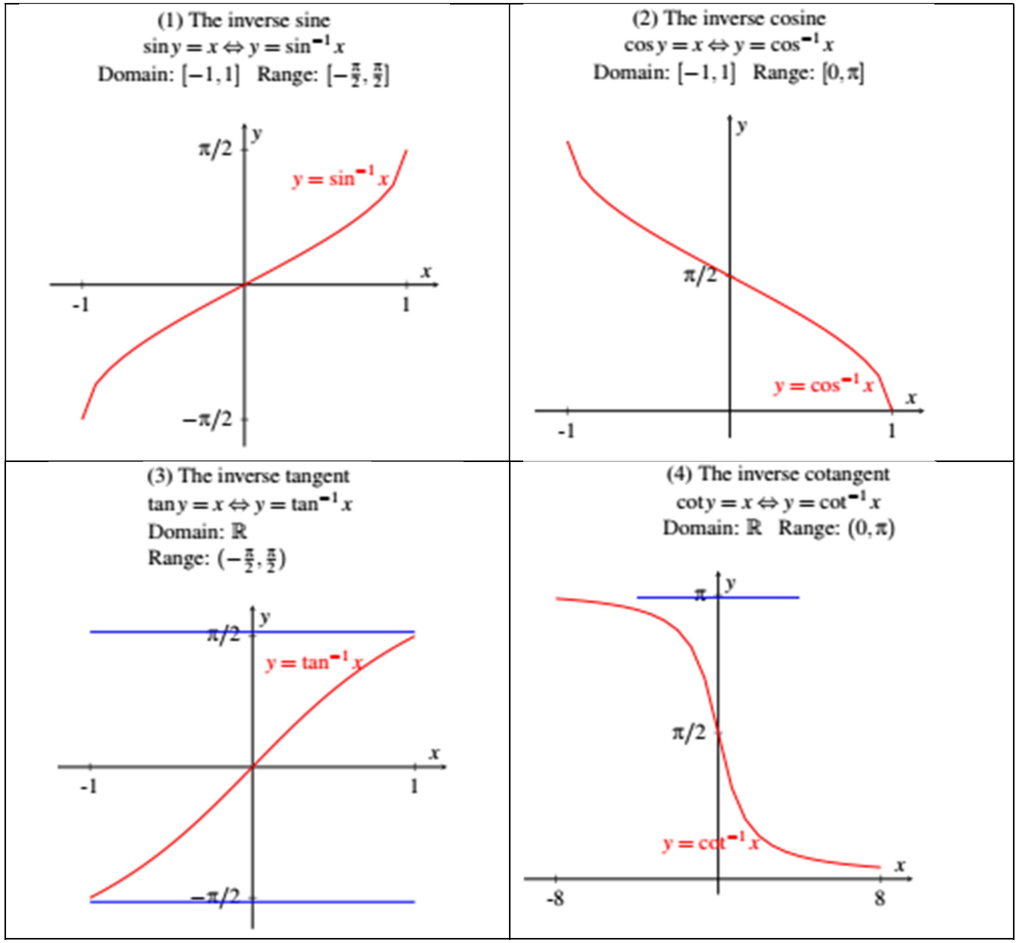
تمرين: احسب مشتقة الدوال التالية:

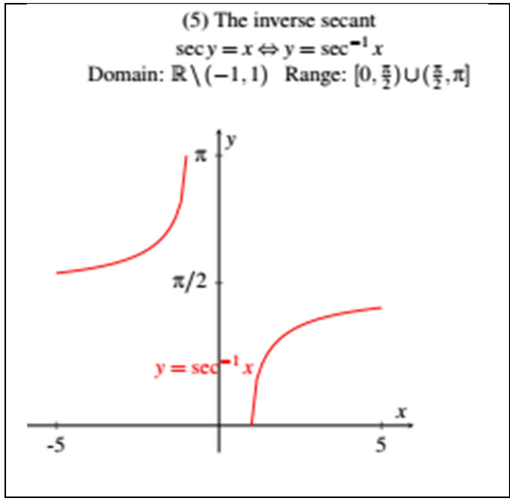
1) $y = \ log_3 sin\,x$	2) $y = \ log\sqrt{x}$

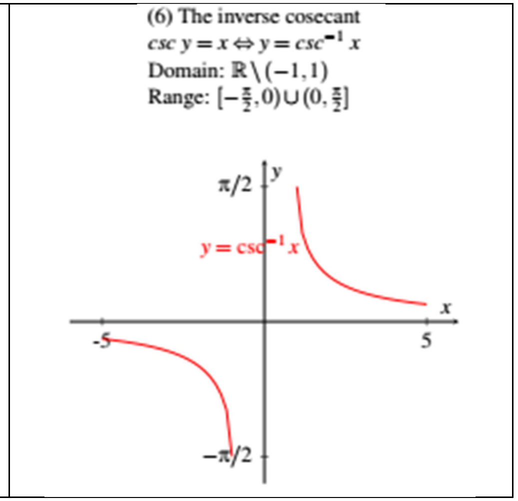
الدوال المثلثية العكسية:

الدوال المثلثية العكسية هي معكوس الدوال المثلثية $sin(x), cos(x), tan(x), cot(x), sec(x)\ , csc(x)$

الدوال المثلثية العكسية تعطي زوايا من أي نسبة مثلثية. عادة نكتب معكوس الدوال المثلثية كالتالي:







ملاحظة: $sin^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{\sin(x)}$

الاشتقاق و التكامل

اذا كانت $u = g(x)$ دالة قابلة للاشتقاق فان

1. $\frac{d}{dx}\sin^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
2. $\frac{d}{dx}\cos^{-1}u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
3. $\frac{d}{dx}\tan^{-1}u = \frac{1}{u^2+1}u'$
4. $\frac{d}{dx}\cot^{-1}u = \frac{-1}{u^2+1}u'$
5. $\frac{d}{dx}\sec^{-1}u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}u'$
6. $\frac{d}{dx}\csc^{-1}u = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}}u'$

من هذا نجد أن

For $a > 0$,

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$.
2. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$.
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$.

تمرين: احسب مشتقة الدوال التالية:

1) $y = sin^{-1}(5x)$	2) $y = sec^{-1}(2x)$
3) $y = tan^{-1}(e^x)$	4) $y = sin^{-1}(x-1)$

تمرين: احسب التكاملات التالية:

1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-25\,x^2}}\,dx$	2) $\displaystyle\int \frac{1}{9x^2+5}\,dx$
3) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^6-4}}\,dx$	4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx$

الواجب (٣):

السؤال ١: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لما يلي:

1) $y = \sqrt{x}\ \ln x$	2) $y = e^{2x+1}$	3) $y = 10^{3x}$
4) $y = \tan(2^{\sin x})$	5) $y = \log_3(6x+1)$	6) $y = \ln(\sin(e^x))$
7) $y = (e^x+1)sin^3x$	8) $y = e^{x\tan x}$	9) $y = x\ sin^{-1}x$
10) $y = \ln x\ \ tan^{-1}x$	11) $y = x^2\ sec^{-1}x$	12) $y = (\tan x)^{tan^{-1}x}$
13) $y = \sqrt[5]{\frac{x-1}{x+1}}$	14) $y = \frac{\sqrt{x}\ \ \cos x}{(x+1)\sin x}$	15) $y = \left(\frac{x\sec x^2}{\sqrt{x}\ \ (x+1)}\right)^{\frac{7}{2}}$

السؤال ٢: احسب التكاملات التالية:

1) $\int \frac{5^{tan^{-1}x}}{x^2+1}\ dx$	2) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\ dx$	3) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
4) $\int \frac{tan^{-1}x}{x^2+1}\ dx$	5) $\int 2^{3x+1}\ dx$	6) $\int x\ e^{x^2}\ dx$
7) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\ dx$	8) $\int \frac{e^{\tan x}}{cos^2x}\ dx$	9) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$
10) $\int 5^x + \frac{1}{2^x}\ dx$	11) $\int 2^x + \frac{3^{4x}}{9^{x+1}}\ dx$	12) $\int \frac{1}{x\ \log x}\ dx$
13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\ \ln\sqrt{x}}$	14) $\int 2^x\cos(2^x+1)\ dx$	15) $\int 7^{3x}\sqrt{7^{3x}+1}\ dx$

الدوال المثلثية الزائدية تعتمد الدوال المثلثية الزائدية في تعريفها على الدوال الاسية الطبيعية.

تعريف: تعرف دالة الجيب الزائدية $(sinh)$ و دالة جيب التمام الزائدي $(cosh)$ كما يلي:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \forall x \in \mathbb{R}\ .$$

بقية الدوال الزائدية تعرف من الدالتين السابقتين كالتالي:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},\quad \forall x \neq 0$$

$$sech\ x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}},\quad \forall x \in \mathbb{R}$$

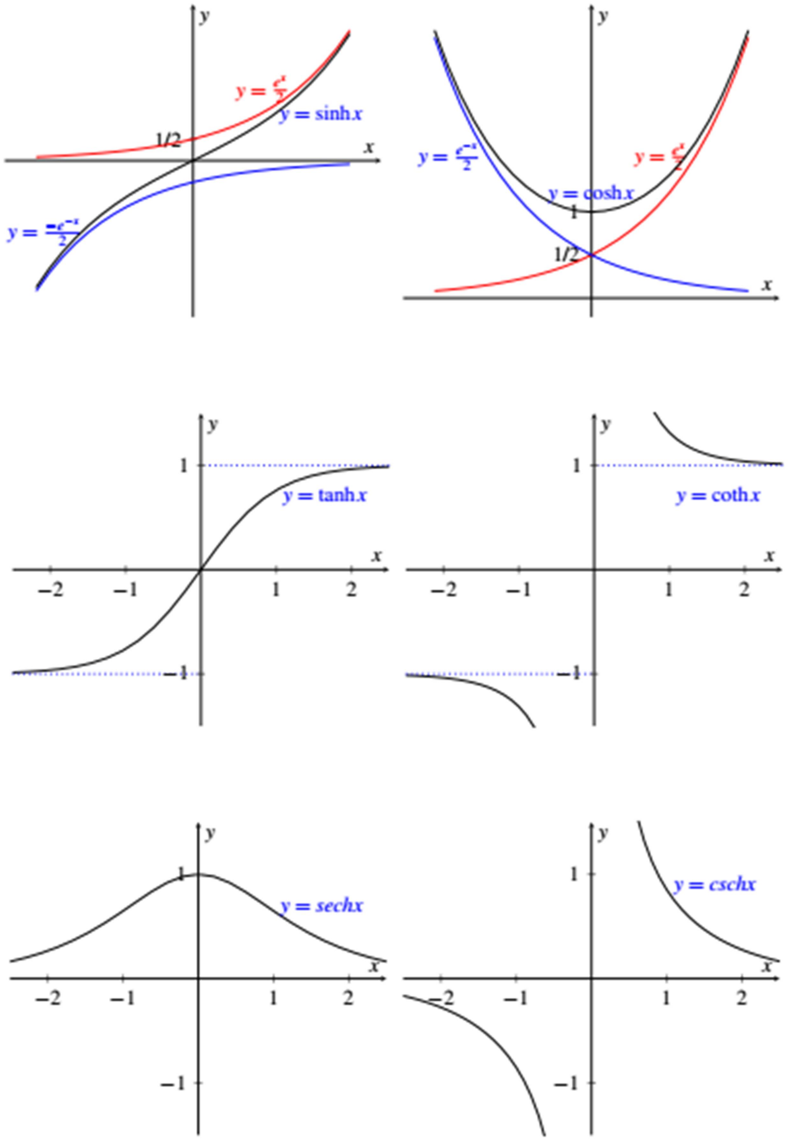
$$csch x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}},\quad \forall x \neq 0$$

ملاحظات:

١. الدالة $sinh$ دالة فردية و الدالة $cosh$ دالة زوجية، الدوال tanh،coth و csch دوال فردية و الدالة $sech$ دالة زوجية.

٢. المتطابقة $\boxed{cosh^2 x - sin^2 x = 1}$

وهذا يختلف عن المتطابقة $cosh^2 x + sin^2 x = 1$



الاشتقاق و التكامل:

1. $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$	4. $\frac{d}{dx}\coth x = -csch^2\, x$
2. $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$	5. $\frac{d}{dx}sech\, x = -sech\, x\, \tanh x$
3. $\frac{d}{dx}\tanh x = sech^2\, x$	6. $\frac{d}{dx}csch\, x = -csch\, x\, \coth x$

$$\int \sinh x\, dx = \cosh x + c \qquad \int csch^2 x\, dx = -\coth x + c$$

$$\int \cosh x\, dx = \sinh x + c \qquad \int sech\, x\, \tanh x\, dx = -sech\, x + c$$

$$\int sech^2\, x\, dx = \tanh x + c \qquad \int csch\, x\, \coth x\, dx = -csch\, x + c$$

تمرين: احسب مشتقة الدوال التالية:

1) $y = \sinh x^2$	2) $y = \sqrt{x}\cosh x$

تمرين: احسب التكاملات التالية:

1) $\int e^{\cosh x} \sinh x \quad dx$	2) $\int e^x\, \text{sech}\, x \quad dx$

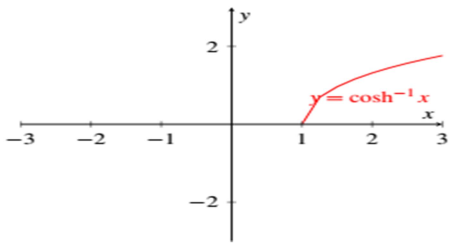
متطابقات: الكتاب صـ٩٢ـ

1. $\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y$.
2. $\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y$.
3. $\sinh(2x)=2\sinh x\cosh x$.
4. $\cosh(2x)=2\cosh^2 x-1=2\sinh^2 x+1=\cosh^2 x+\sinh^2 x$.
5. $1-\tanh^2 x=sech^2\, x$.
6. $\coth^2 x-1=csch^2 x$.
7. $\tanh(x\pm y)=\dfrac{\tanh x\pm\tanh y}{1\pm\tanh x\tanh y}$.
8. $\tanh(2x)=\dfrac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$.

الدوال المثلثية الزائدية العكسية

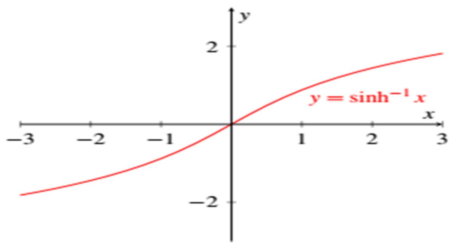
$\cosh^{-1}:[1,\infty)\to[0,\infty)$

$\cosh y=x\Leftrightarrow y=\cosh^{-1}x$



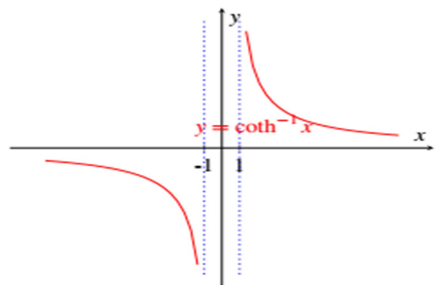
$\sinh^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\sinh y=x\Leftrightarrow y=\sinh^{-1}x$



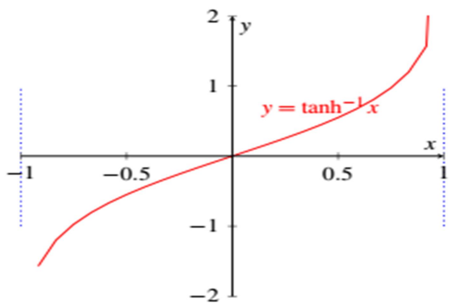
$\coth^{-1}:\mathbb{R}\setminus[-1,1]\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\coth y=x\Leftrightarrow y=\coth^{-1}x$



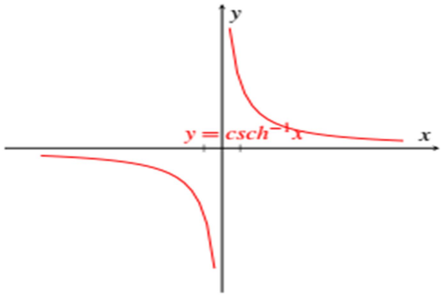
$\tanh^{-1}:(-1,1)\to\mathbb{R}$

$\tanh y=x\Leftrightarrow y=\tanh^{-1}x$



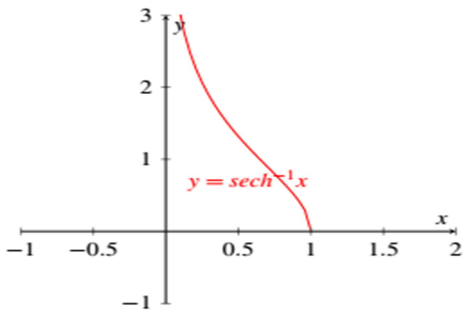
$csch^{-1}:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$csch\, y=x\Leftrightarrow y=csch^{-1}\,x$



$sech^{-1}:[0,\infty)\to(0,1]$

$sech y=x\Leftrightarrow y=sech^{-1}\,x$



مبرهنة (٤-٤): صـ١٠٤ـ

الاشتقاق و التكامل:

1. $\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
2. $\frac{d}{dx}\cosh^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ \forall x\in(1,\infty)$.
3. $\frac{d}{dx}\tanh^{-1}x=\frac{1}{1-x^2},\ \forall x\in(-1,1)$.
4. $\frac{d}{dx}\coth^{-1}x=\frac{1}{1-x^2},\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus[-1,1]$.
5. $\frac{d}{dx}sech^{-1}\,x=\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}},\ \forall x\in(0,1)$.
6. $\frac{d}{dx}csch^{-1}\,x=\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2+1}},\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

- $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx=\sinh^{-1}\frac{x}{a}+c.$
- $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx=\cosh^{-1}\frac{x}{a}+c,\ x>a.$
- $\int\frac{1}{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a}+c,\ |x|<a.$
- $\int\frac{1}{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{x}{a}+c,\ |x|>a.$
- $\int\frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=-\frac{1}{a}sech^{-1}\frac{|x|}{a}+c,\ |x|<a.$
- $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}\,dx=-\frac{1}{a}csch^{-1}\frac{|x|}{a}+c,\ |x|>a.$

تمرين: احسب مشتقة الدوال:

1) $y = sinh^{-1}(\sqrt{x})$	2) $y = \sqrt{x}\ sinh^{-1}x$
3) $y = tanh^{-1}(e^{x})$	4) $y = tanh^{-1}(1/x)$
5) $y = cosh^{-1}(2x)$	6) $y = lnx\ csch^{-1}x$

تمرين: احسب التكاملات التالية:

1) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\ dx$	2) $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+9}}\ dx$
3) $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+9}}\ dx$	4) $\int_0^1 \frac{1}{16-x^2}\ dx$
5) $\int_5^7 \frac{1}{16-x^2}\ dx$	6) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^6}}\ dx$

الواجب ٤:

السؤال ١: أوجد مشتقة الدوال التالية:

1) $y=\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\tanh(\sqrt{x})$	2) $y=\ln x\ sin^{-1}x$
3) $y=\ln(\sinh(2x))$	4) $y=\ cosh^{-1}(\sqrt{x})$
5) $y=\ e^{3x}\cosh(2x)$	6) $y=\ x^2\sinh(4x+1)$

السؤال ٢: احسب التكاملات التالية:

1) $\displaystyle\int \frac{\tanh(\ln x)}{x}\ dx$

2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^4-16}}\ dx$

3) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-16}}\ dx$

السؤال ٢: احسب التكاملات التالية:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-2}}\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1-e^{2x}}\,dx$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^4}}\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+25}}\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-25}}\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{\sec\,x(1-\sin^2 x)}\,dx$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^6+2}}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-e^{2x}}}\,dx$

(١) التكامل بالتجزيء:

نظرية: اذا كانت $u=f(x)$ و $v=g(x)$ بحيث أن $f'(x)$ و $g'(x)$ متصلة، فان

$$\boxed{\int u\,dv = uv-\int v\,du}$$

شرح: نعلم أن $\frac{d}{dx}(f(x)g(x))=f(x)g'(x)+f'(x)g(x).$

و منه $f(x)g'(x)=\frac{d}{dx}(f(x)g(x))-f'(x)g(x).$

بتكامل الطرفين نجد

$$\int f(x)g'(x)\,dx=\int \frac{d}{dx}(f(x)g(x))\,dx-\int f'(x)g(x)\,dx$$
$$=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx\,.$$

و هذا يعني

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du\,.$$

تمرين: احسب التكاملات التالية:

1) $\int x\cos x\ \ dx$	2) $\int x\,e^{x}\ \ dx$

(١) الدوال المثلثية

(A) تكامل قوى الدوال المثلثية

سنحسب تكاملات من النوع

$$\int \sin^n x \cos^m x\, dx, \int \tan^n x \sec^m x\, dx \text{ and } \int \cot^n x\, csc^m x\, dx$$

النموذج ١:

$$\int \sin^n x \cos^m x\, dx$$

طريقة الحل:

١. اذا كان n فردي، نكتب $sin^n x\, cos^m x = sin^{n-1} x\, cos^m x \sin x$

ثم نستخدم المتطابقة $cos^2 x + sin^2 x = 1$ و التعويض $u = cos\ x$.

٢. اذا كان m فردي، نكتب $cos^m x\, sin^n x = cos^{m-1} x\, sin^n x \cos x$

ثم نستخدم المتطابقة $cos^2 x + sin^2 x = 1$ و التعويض $u = \sin x$

٣. اذا كان m و n اعداد زوجية نستخدم المتطابقات:

$$cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \ , \quad sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

تمرين: احسب التكاملات التالية:

1) $\int cos^2 x\ \ dx$

3) $\int \ln x\ \ dx$

4) $\int_0^1 tan^{-1} x\ \ dx$

5) $\int e^x \cos x\ \ dx$

6) $\int x^2 e^x\ \ dx$

3) $\int cos^5x\, sin^4x \quad dx$	2) $\int sin^3x \quad dx$
4) $\int sin^2x\, cos^2x \quad dx$	

النموذج ٢: $\int tan^n(x)\, sec^m(x) \quad dx$

طريقة الحل:

١. اذا كان n=0 و

أ. m فردي، نكتب $sec^m x = sec^{m-2}x \; sec^2x$ ثم نستخدم طريقة التجزيء.

ب. m زوجي، نكتب $sec^m x = sec^{m-2}x \; sec^2x$ ثم نستخدم المتطابقة $sec^2x = 1 + tan^2x$ ثم التعويض u=tan x .

٢. اذا m=0 و n عدد فردي او زوجي، نكتب $tan^n x = tan^{n-2}x \tan x$ ثم نستخدم المتطابقة $tan^2x = sec^2x - 1$ ثم التعويض u=$tan\ x$.

٣. اذا n زوجي و m فردي ، نستخدم المتطابقة $tan^2x = sec^2x - 1$ لتغيير التكامل الى $\int sec^r x \quad dx$.

٤. اذا $m \geq 2$ زوجي، نكتب $sec^m x = sec^{m-2}x\, sec^2x$ ثم نستخدم المتطابقة $sec^2x = 1 + tan^2x$ ثم التعويض u=$tan\ x$.

مثال: احسب التكاملات التالية:

2) $\int tan^6 x \quad dx$	1) $\int tan^5 x \quad dx$
4) $\int tan^4 x\, sec^4 x \quad dx$	3) $\int tan^5 x\, sec^4 x \quad dx$

النموذج ٣: $\int cot^n(x)\, csc^m(x)\;\; dx$

تتم معالجة هذه التكاملات بنفس طريقة تعاملنا مع النموذج ٢ $\int \boldsymbol{tan^n(x)\; sec^m(x)\;\; dx}$

مثال: احسب التكامل التالي:

$\int cot^5\, x\; csc^4 x\;\; dx$

(B) تكاملات من النوع: $\int \cos u\, \sin v\;\; dx, \int \cos u \cos v\;\; dx, \int \sin u \sin\;\;\; dx$

نعالج هذه التكاملات بالعلاقات التالية:

$$\begin{aligned}
\sin ux\, \cos vx &= \frac{1}{2}\left(\sin(u-v)\,x + \sin(u+v)\,x\right),\\
\sin ux\, \sin vx &= \frac{1}{2}\left(\cos(u-v)\,x - \cos(u+v)\,x\right),\\
\cos ux\, \cos vx &= \frac{1}{2}\left(\cos(u-v)\,x + \cos(u+v)\,x\right).
\end{aligned}$$

مثال: احسب التكاملات التالية:

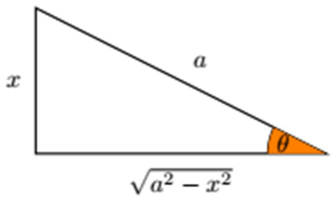
1) $\int \sin 4\,x \cos 2\,x\;\; dx$	2) $\int \sin 5\,x\; \sin 2\,x\;\; dx$

(٢) التعويضات المثلية:

سندرس تكاملات تحتوي على الجذور : $\sqrt{a^2-x^2},\; \sqrt{a^2+x^2}\,,\;\; \sqrt{x^2-a^2}$

$\boxed{1}$ $\sqrt{a^2-x^2} = a\;\cos\theta$ if $x = a\;\sin\theta$.
If $x = a\;\sin\theta$ where $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, then

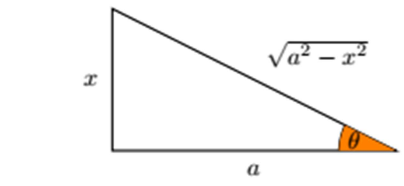
$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2-x^2} &= \sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\\
&= \sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}\\
&= \sqrt{a^2\cos^2\theta}\\
&= a\;\cos\theta\,.
\end{aligned}$$



$\boxed{2}$ $\sqrt{a^2+x^2} = a \sec\theta$ if $x = a \tan\theta$.

If $x = a \tan\theta$ where $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, then

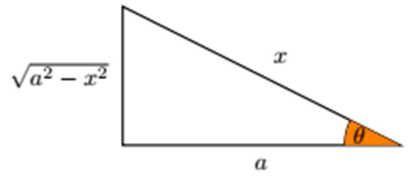
$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+x^2} &= \sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta}\\ &= \sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)}\\ &= \sqrt{a^2\sec^2\theta}\\ &= a \sec\theta\ .\end{aligned}$$



$\boxed{3}$ $\sqrt{x^2-a^2} = a \tan\theta$ if $x = a\sec\theta$.

If $x = a\ sec\theta$ where $\theta \in [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$, then

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-a^2} &= \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2}\\ &= \sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)}\\ &= \sqrt{a^2\tan^2\theta}\\ &= a \tan\theta\ .\end{aligned}$$



مثال: احسب التكاملات التالية:

1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

2) $\int \sqrt{x^2+9}\ \ dx$

(٣) <u>تكامل الكسور الجزئية:</u>

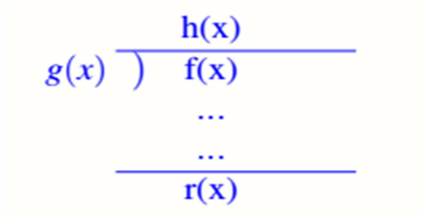
تمهيد: احسب التكاملات التالية:

1) $\int \frac{x}{1+x^2}\ dx$	2) $\int \frac{1}{1+x^2}\ \ dx$	3) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\ \ dx$

سندرس تكامل لدوال من النوع $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ بحيث أن $f(x)$ و $g(x)$ *كثيرات حدود.*

<u>طريقة الحل:</u>

١. اذا كانت درجة $g(x)$ أقل أو تساوي درجة $f(x)$ ، *نجري قسمة مطولة:*



من القسمة سيكون لدينا:

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

٢. نحلل المقام $g(x)$ الى عوامل لا يمكن تحليلها.

مثال على التحليل: $x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$

٣. نوجد الكسور الجزئية من الخطوة ٢:

$$q(x) = P_1(x) + P_2(x) + \cdots + P_n(x)$$

بحيث أن $P_i = \frac{A}{(ax+b)^m}$ أو $P_i = \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c\;^{m}}$ اذا $b^2 - 4ac < 0$

٤. نكامل الدوال الناتجة من خطوة ٣.

مثال: احسب التكاملات التالية:

$$1)\ \int \frac{x+1}{x^2-2x-8}\ dx$$

$$2)\ \int \frac{x^2}{x^2+1}\ dx$$

$$3)\ \int \frac{x^2+2x+2}{x+1}\ dx$$

4) $\int \frac{2x^2 - 25x - 33}{(x+1)^2(x-5)} \, dx$

(٤) تكامل الصيغ التربيعية:

سندرس طريقة جديدة للتكاملات التي تحتوي على صيغ تربيعية $ax^2 + bx + c$ $(b \neq 0)$ لا يمكن تحليلها. هذه الطريقة تسمى بطريقة اكمال المربع:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

مثال اكمال المربع: الصيغة التربيعية $x^2 - 6x + 13$ غير قابلة للاختزال. لاكمال المربع اضف و اطرح المقدار $(\frac{b}{2})^2$. أي أن

$$x^2 - 6x + 13 = \underbrace{x^2 - 6x + 9}_{=(x+3)^2} \underbrace{-9 + 13}_{=4}$$

و عليه يكون $x^2 - 6x + 13 = (x+3)^2 + 4$

مثال: احسب التكاملات التالية:

1) $\int \frac{1}{x^2 - 6x + 13} \, dx$	2) $\int \frac{x}{x^2 - 4x + 8} \, dx$
3) $\int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} \, dx$	4) $\int \sqrt{x^2 - 4x} \, dx$

(٥) تعويضات متفرقة:

(A) دوال كسرية تحتوي على sin (x) و cos(x) :

تكاملات الدوال الكسرية التي تحتوي على sin(x) و cos(x) تتم معالجتها باستخدام التعويض

$$u = \tan(x/2), -\pi < x < \pi$$

$$\Rightarrow du = \frac{sec^2(x/2)}{2}\, dx$$

بما أن $sec^2x = tan^2x + 1$ فان $du = \frac{u^2+1}{2}\, dx$. و ايضا

$$\sin(x) = \sin 2(\frac{x}{2}) = 2\ \sin(\frac{x}{2})\ \cos(\frac{x}{2}) = 2\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}\cos(\frac{x}{2})\ \cos(\frac{x}{2})$$

$$= 2\tan(\frac{x}{2})\ \cos^2(\frac{x}{2})$$

$$= 4 + \frac{4n^2+n}{2n^2}$$

$$= 2\frac{\tan(\frac{x}{2})}{\sec^2(\frac{x}{2})}$$

$$= \frac{2u}{u^2+1}\ .$$

من أجل *cos (x)* ، *لدينا*

$$\cos(\frac{x}{2}) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \text{ and } \sin(\frac{x}{2})) = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\ .$$

عليه

$$\cos(x) = \cos 2(\tfrac{x}{2}) = \cos^2(\tfrac{x}{2})) - \sin^2(\tfrac{x}{2})).$$

و بالتالي

$$\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}\ .$$

ملخص:

$$\boxed{u = \tan(x/2),\quad du = \frac{u^2+1}{2}\,dx,\quad \sin(x) = \frac{2u}{u^2+1},\quad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}\ .}$$

مثال: احسب التكاملات التالية:

1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}\ dx$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{2+\cos x}\ dx$

3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x+\cos x}\ dx$

(B) تكاملات تحتوي على قوى كسرية:

في هذه الحالة سنستخدم التعويض $u = x^{1/n}$ بحيث أن n *هو المضاعف المشترك الأصغر لمقامات هذه القوى:*

مثال: احسب التكامل التالي:

2) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \, dx$	1) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} \, dx$

(C) تكاملات تحتوي على $\sqrt[n]{f(x)}$:

مثال: احسب التكامل التالي:

2) $\int \sqrt{1+\sqrt{x}} \, dx$	1) $\int \sqrt{e^x+1} \, dx$

<u>الواجب ٥:</u>

<u>السؤال ١:</u> احسب التكاملات التالية:

1. $\int xe^{2x}\,dx$
2. $\int xe^{x^2}\,dx$
3. $\int x\sin x\,dx$
4. $\int x\cos 4x\,dx$
5. $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$
6. $\int \sin^{-1}x\,dx$
7. $\int x\sec^2 x\,dx$
8. $\int xe^{-4x}\,dx$
9. $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
10. $\int (\ln x)^2\,dx$
11. $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$
12. $\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx$
13. $\int \tan^2 x\sec^3 x\,dx$
14. $\int \tan^3 x\sec^3 x\,dx$
15. $\int \cot^2 x\csc^5 x\,dx$
16. $\int \cot^4 x\csc^4 x\,dx$
17. $\int \sin 3x\sin x\,dx$
18. $\int \cos 7x\sin 3x\,dx$
19. $\int \cos 4x\cos 2x\,dx$
20. $\int \sqrt{25-x^2}\,dx$

<u>تعرف النهايات:</u>

نهاية الدالة ممكن تعريفها على أنها قيمة الدالة عندما المتغير $x \to t$

مثال: احسب النهايات التالية:

1) $\lim_{x\to 3} 3 =$	2) $\lim_{x\to 1} x =$
3) $\lim_{x\to\infty} tan^{-1}x =$	4) $\lim_{x\to 8} \sqrt{x} =$

- **بعض قوانين النهايات**

If $\lim_{x\longrightarrow c} f(x) = L$ and $\lim_{x\longrightarrow c} g(x) = M$, then

1. **Sum Rule**

$$\lim_{x\longrightarrow c}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim_{x\longrightarrow c} f(x) + \lim_{x\longrightarrow c} g(x) = L + M$$

2. **Difference Rule**

$$\lim_{x\longrightarrow c}\left(f(x)-g(x)\right) = \lim_{x\longrightarrow c} f(x) - \lim_{x\longrightarrow c} g(x) = L - M$$

3. **Product Rule**

$$\lim_{x\longrightarrow c}\left(f(x).g(x)\right) = \lim_{x\longrightarrow c} f(x) \times \lim_{x\longrightarrow c} g(x) = L \times M$$

4. **Constant Multiple Rule**

$$\lim_{x\longrightarrow c}\left(k\ f(x)\right) = k\ \lim_{x\longrightarrow c} f(x) = k\ L$$

5. **Quotient Rule**

$$\lim_{x\longrightarrow c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\longrightarrow c} f(x)}{\lim_{x\longrightarrow c} g(x)} = \frac{L}{M}$$

مثال: احسب النهايات التالية:

1) $\lim_{x\to 0}(x^2-2x+1)=$	2) $\lim_{x\to \pi}\sin x\cos x=$
3) $\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{(x-3)}=$	4) $\lim_{x\to 1}\frac{x}{(x^2+1)}=$

حالات عدم التعيين:

الحالة	عدم التعيين
القسمة	$\frac{0}{0}$ and $\frac{\infty}{\infty}$
الضرب	$0.\infty$ and $0.(-\infty)$
الجمع	$(-\infty)+\infty$ and $\infty-\infty$
القوى	$0^0,\ 1^\infty,\ 1^{-\infty}$ and ∞^0

- **قاعدة لوبيتال**

افرض أن $f(x)$ و $g(x)$ دوال قابلة للاشتقاق على فترة I و $c \in I$ بحيث أن f و g قد لا تكون قابلة للاشتقاق عند c اذا كان $\frac{f(x)}{g(x)}$ تأخذ الصيغة $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\frac{0}{0}$ عند x=c و $g'(x)\neq 0$ من أجل $x\neq c$ فان

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

بحيث أن $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة أو تساوي ∞ أو $-\infty$.

ملاحظة:

١. قاعدة لوبيتال ايضا صحيحة اذا $c=\pm\infty$ أو اذا $x\to c^+$ او $x\to c^-$.
٢. أحيانا نحتاج الى تطبيق قاعدة لوبيتال مرتين.

مثال: أوجد النهايات التالية:

1) $\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$	2) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
3) $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}$	4) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}$
5) $\lim_{x\to 0^+}x^2\ln x$	6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1-\tan x)\sec 2x$

8) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$	7) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

تعريف (التكامل التام): التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ يسمى تام اذا

١. الفترة *[a, b]* محدودة و منتهية،
٢. الدالة *f(x)* محدودة على *[a, b]* .

ملاحظة: اذا الشرط ١ أو ٢ لم يتحقق، فان التكامل يسمى معتل.

التكاملات المعتلة:

(١) حالة الفترة غير المحدودة:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx,\ \int_{\infty}^{-\infty} f(x)\,dx\ .$$

تعريف: (أ) لتكن f متصلة على $[a,\infty)$. التكامل المعتل $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ يعرف كالتالي:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^{t} f(x)\,dx$$

بحيث أن النهاية موجودة.

(ب) لتكن f متصلة على $(-\infty,b]$. التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ يعرف كالتالي:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^{b} f(x)\,dx$$

بحيث أن النهاية موجودة.

التكاملات في (أ) و (ب) تكون متقاربة اذا النهاية موجودة كعدد و الا فالتكامل يكون متباعد.

(ج) لتكن f متصلة على $(-\infty,\infty)$. التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ يعرف كالتالي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

التكامل يكون متقارب اذا كانت التكاملات التي في الطرف الايمن متقاربة وإلا فالتكامل يكون متباعد.

مثال: بين ما اذا التكاملات التالية متقاربة أم متباعدة:

1) $\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+2)^2}\,dx$

(٢) حالة الدالة غير المحدودة:

تعريف: (أ) اذا كانت الدالة f متصلة على $[a, b)$ و كانت $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ فان التكامل المعتل

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{x\to b^-} \int_a^t f(x)\ dx$$

(ب) اذا كانت الدالة f متصلة على $(a, b]$ و كانت $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ فان التكامل المعتل

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{x\to a^+} \int_t^b f(x)\ dx$$

التكاملات في (أ) و (ب) تكون متقاربة اذا النهاية موجودة كعدد و الا فالتكامل يكون متباعد.

(ج) اذا كانت الدالة f متصلة على $[a, b]$ ما عدا عند $c \in (a, b)$ حيث $\lim_{t\to c^\pm} f(x) = \pm\infty$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

التكامل يكون متقارب اذا كانت التكاملات التي في الطرف الايمن متقاربة وإلا فالتكامل يكون متباعد.

مثال: بين ما اذا التكاملات التالية متقاربة أم متباعدة:

1) $\int_0^4 \frac{1}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\ dx$

2) $\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2}\ dx$

3) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\ dx$

الواجب ٦:

السؤال ١: احسب النهايات التالية:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x-1}{x}$
2. $\lim_{x\to 0^-} \frac{\tan x}{x^2}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{\sin x}$
4. $\lim_{x\to \pi^-} \frac{\sin x}{1-\cos x}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x}{x}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{6^x-2^x}{x}$
7. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$
8. $\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
9. $\lim_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$
10. $\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$

السؤال الثاني: بين ما اذا التكاملات التالية متقاربة أم متباعدة:

11. $\int_0^{\infty} \frac{1}{2x^2+3x+1}\,dx$
12. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$
13. $\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{5-2x}\,dx$
14. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+3)^2}\,dx$
15. $\int_0^{3} \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$
16. $\int_0^{4} \frac{1}{x^2+x-6}\,dx$
17. $\int_2^{4} \frac{x-2}{x^2-5x+4}\,dx$
18. $\int_0^{9} \frac{1}{\sqrt{x}(x+9)}\,dx$

2) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

3) $\int_{-3}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$

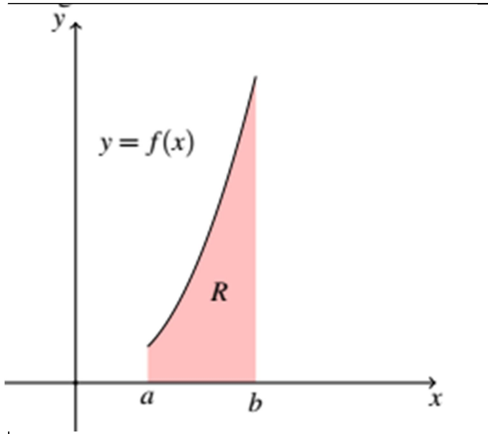
(١) <u>المساحات</u>

احدى تطبيقات التكامل المحدد هو ايجاد مساحة تحت بيان الدالة. في هذا الجزء سنعتبر التالي:

١. المساحة بين بيان الدالة و محور *x* أو محور *y* و نقطتين،
٢. المساحة بين بيان الدالة و محور *x* أو محور *y* و نقطتين ناتجة من تقاطع البيان مع أحد المحاور
٣. المساحة بين بيان دالتين.

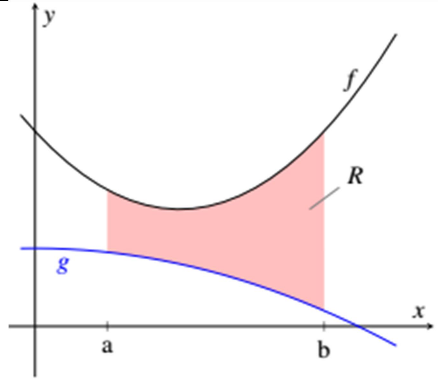
(أ) اذا كانت $y=f(x)$ متصلة على $[a, b]$، مساحة المنطقة تحت بيان الدالة على الفترة هي

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$



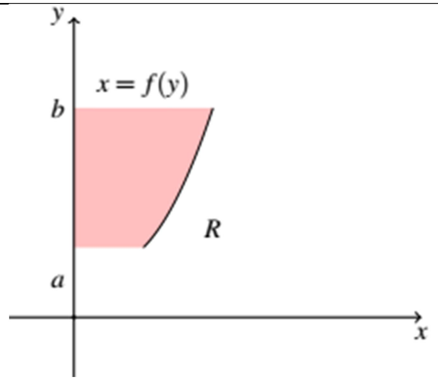
(ب) اذا كانت $f(x) \geq g(x)$ متصلة على $[a, b]$، مساحة المنطقة المحصورة ببيان الدالتين على الفترة هي

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\,dx$$



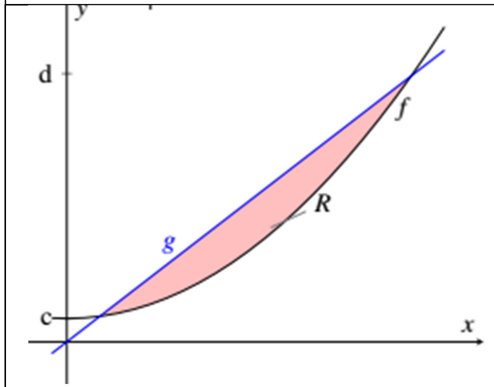
(أ) اذا كانت $x=f(y)$ متصلة على $[c, d]$، مساحة المنطقة تحت بيان الدالة على الفترة هي

$$A = \int_c^d f(y)\,dy$$



(ب) اذا كانت $f(y) \geq g(y)$ متصلة على $[c, d]$، مساحة المنطقة المحصورة ببيان الدالتين على الفترة هي

$$A = \int_c^d \left(f(y) - g(y)\right)\,dy$$



مثال: أوجد مساحة المنطقة المحصورة ببيان الدالة $y = -x-1$ على الفترة $[0,1]$.

مثال: اوجد مساحة المنطقة المحصورة ببيان الدوال $y = x^3$ و $y = x$.

مثال: اوجد مساحة المنطقة المحصورة ببيان الدوال $x = 2y$ و $x = \frac{y}{2} + 3$.

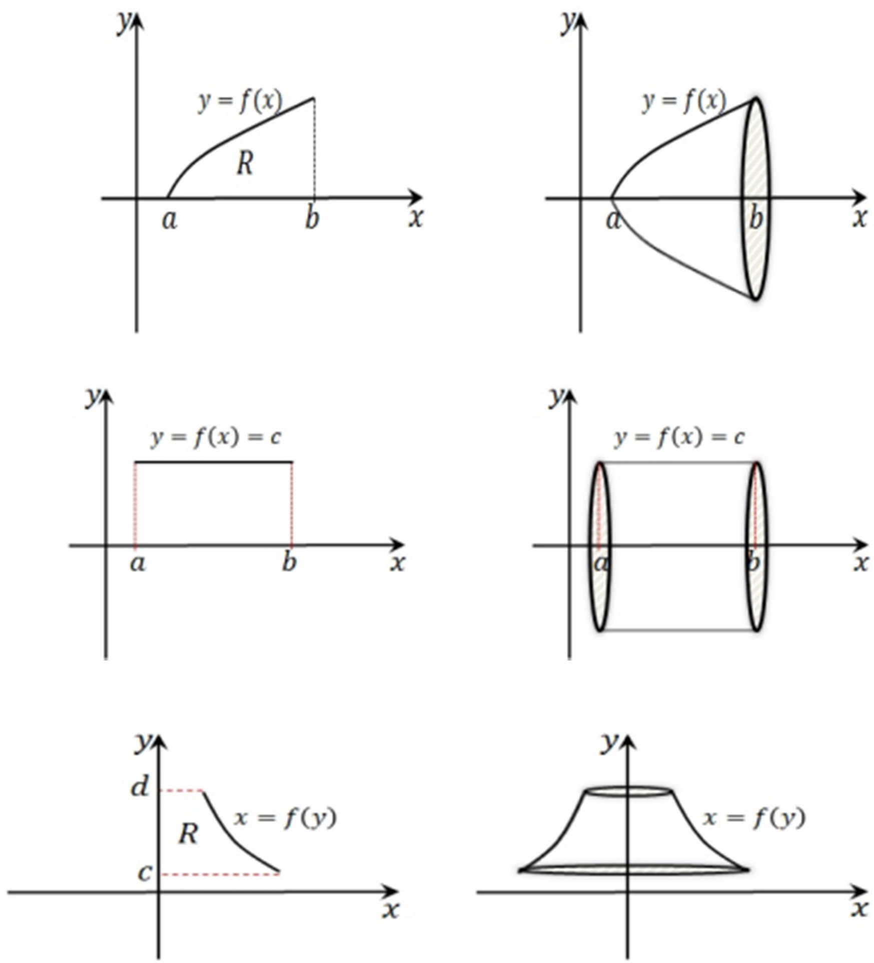
مثال: أوجد مساحة المنطقة المحصورة ببيان الدالة $x = \sqrt{y}$ من $y=0$ الى $y=1$.

مثال: اوجد مساحة المنطقة المحصورة ببيان الدوال $y = \cos x$ و $y = \sin x$ و $x = \frac{\pi}{4}$.

(٢) حجوم أجسام الدوران

تعريف: مجسم الدوران (S) هو مجسم ناتج من دوران المنطقة (R) حول محور. هذا المحور يسمى محور الدوران.

مثال:



سندرس ثلاث طرق لايجاد حجوم أجسام الدوران: طريقة الاقراص، طريقة الوردات و طريقة الشرائح الاسطوانية.

الطريقة الأولى: طريقة الاقراص الدائرية.

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ و لتكن R منطقة محصورة ببيان الدالة و المحور x على تلك الفترة. لتكن $\boldsymbol{S}$ مجسم ناتج من دوران المنطقة $\boldsymbol{R}$ حول محور x. أفرض أن P تجزيء للفترة $[a, b]$ و أن $\omega_k \in [x_{k-1}, x_k]$ علامة. من كل فترة جزئية $[x_{k-1}, x_k]$ نكون مستطيل ارتفاعه $f(\omega_k)$ و عرضه Δx_k . دوران المستطيل حول محور x ينتج عنه قرص دائري كما في الشكل بحيث أن نصف قطره و ارتفاعه:

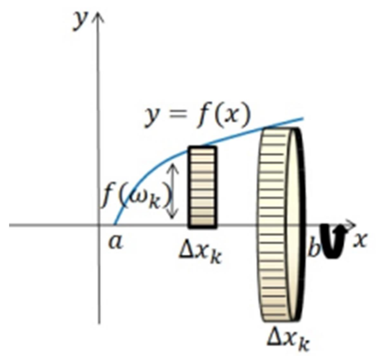
$$r = f(w_k)\ , \quad h = \Delta x_k$$

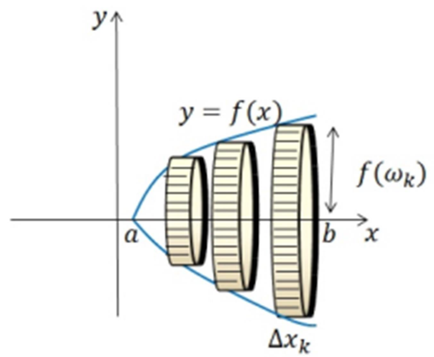
حجم القرص:

$$V_k = \pi(f(w_k))^2 \Delta x_k$$

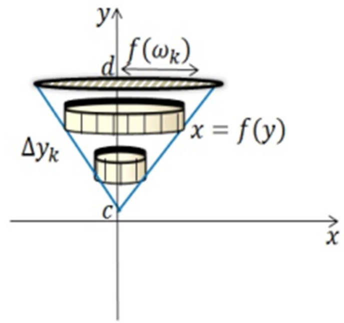
مجموع حجوم الاقراص يعطي حجم المجسم

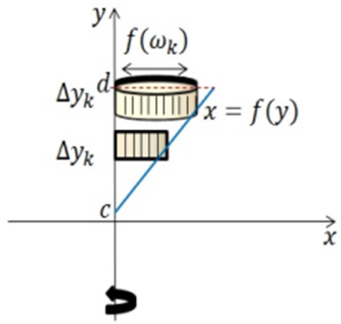
$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \pi\ (f(w_k))^2\ \Delta x_k = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$





بنفس الطريقة اذا كان الدوران بالنسبة لمحور y





$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \pi (f(w_k))^2 \Delta y_k = \pi \int_c^d [f(y)]^2 \, dy$$

ملخص: ١. حجم الجسم الناتج من دوران R على الفترة $[a, b]$ حول محور x هو

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx \, .$$

٢. حجم الجسم الناتج من دوران R على الفترة $[a, b]$ حول محور y هو

$$V = \pi \int_c^d [f(y)]^2 \, dy$$

مثال: أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة ببيان الدالة $y = \sqrt{x}$ على $[0, 4]$ على محمور x .

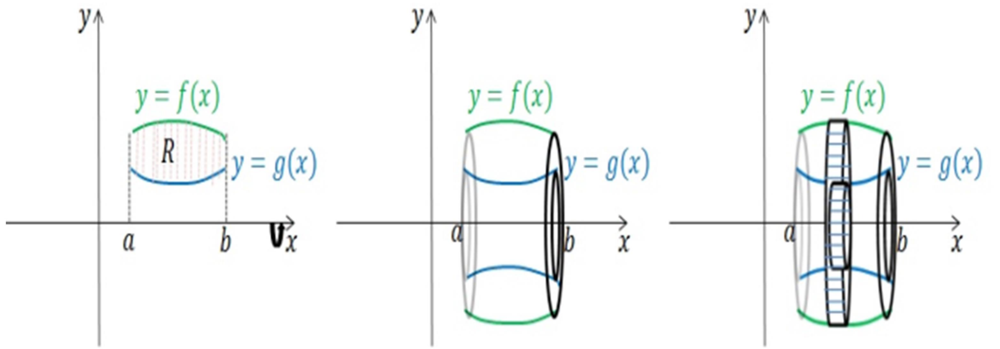
مثال: أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة ببيان الدالة $y = e^x$ و $y = e$ على محور y .

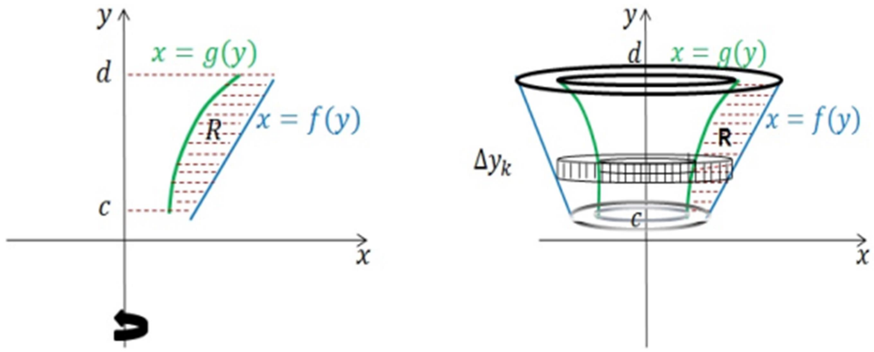
الطريقة الثانية: طريقة الوردات.

لتكن $f(x) \geq g(x)$ دوال متصلة على الفترة $[a, b]$ و لتكن R منطقة محصورة ببيان الدالتين. لتكن S مجسم ناتج من دوران المنطقة R حول محور x.

حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة بين f و g:

$$V = \int_a^b [f(x)]^2\,dx - \int_a^b [g(x)]^2\,dx, = \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right)\,dx\,.$$





بنفس الطريقة اذا كان الدوران بالنسبة لمحور y:

$$V = \int_c^d [f(y)]^2\,dy - \int_c^d [g(y)]^2\,dy, = \int_c^d \left([f(y)]^2 - [g(y)]^2\right)\,dy\,.$$

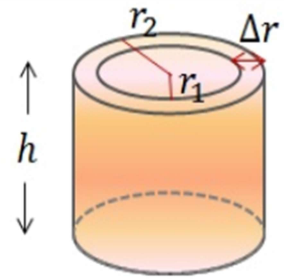
مثال: أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة ببيان الدوال $y = x^2$ و $y = 2x$ حول محور x .

مثال: لتكن R المنطقة المحصورة ببيان الدوال $y=\sqrt{x}$ و $y=6-x$. أوجد حجم المجسم الناتج من دوران تلك المنطقة حول محور y .

مثال: لتكن R المنطقة المحصورة ببيان الدوال $y=\sqrt{x}$ و $y=6-x$. أوجد حجم المجسم الناتج من دوران تلك المنطقة حول محور x .

الطريقة الثالثة: طريقة الشرائح الاسطوانية.

ملاحظة: في طريقة الوردات، نفرض أن المستطيل من كل فترة جزئية عمودي على محور الدوران. لكن في طريقة الشرائح الاسطوانية المستطيلات ستكون موازية لمحور الدوران.

نصف القطر الداخلي r_1 نصف القطر الخارجي r_2 الارتفاع h كثافة الشريحة $\Delta r=r_2-r_1$ معدل نصف القطر $r=\frac{r_1+r_2}{2}$	

حجم الشريحة الاسطوانية:

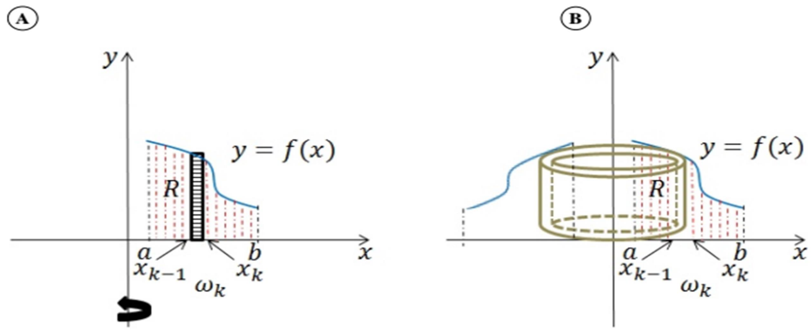
$$\begin{aligned} V &= \pi r_2^2 h-\pi r_1^2 h\\ &= \pi(r_2^2-r_1^2)h\\ &= \pi(r_2+r_1)(r_2-r_1)h\\ &= 2\pi(\frac{r_2+r_1}{2})h(r_2-r_1)\\ &= 2\pi r h\Delta r\ . \end{aligned}$$

لتكن R المنطقة المحصورة ببيان الدالة f(x) على الفترة [a, b]. أفرض أن P تجزيء للفترة $[a,b]$ و أن $\omega_k\in[x_{k-1},x_k]$ علامة. من كل فترة جزئية $[x_{k-1},x_k]$ نكون مستطيل ارتفاعه $f(\omega_k)$ و عرضه Δx_k . دوران المستطيل حول محور y ينتج عنه شريحة اسطوانية كما في الشكل بحيث

الارتفاع = $f(w_k)$

معدل نصف القطر = w_k

الكثافة = Δx_k



حجم الشريحة الاسطوانية:

$$V_k = 2\pi w_k f(w_k)\Delta x_k \, .$$

حجم المجسم

$$V = \sum_{k=1}^{n} V_k = 2\pi \sum_{k=1}^{n} w_k f(w_k)\Delta x_k \, .$$

من مجموع ريمان

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f(w_k)\Delta x_k = \int_a^b x f(x)\, dx$$

ملخص:

١. اذا كان الدوران بالنسبة لمحور y، فان حجم المجسم:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

٢. اذا كان الدوران بالنسبة لمحور x، فان حجم المجسم:

$$V = 2\pi \int_c^d y f(y)\, dy$$

مثال: أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة ببيان الدوال $y = 2x - x^2$ و $x = 0$ حول محور y .

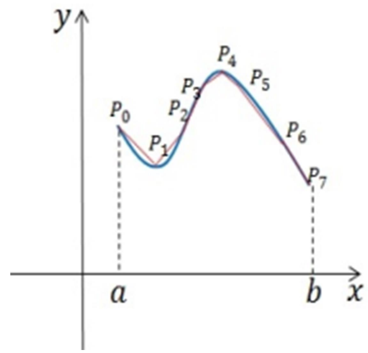
مثال: أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة ببيان الدوال $x = \sqrt{y}$ و $x = 2$ حول محور x .

(٣) طول القوس و مساحة سطح الدوران

(A) طول القوس

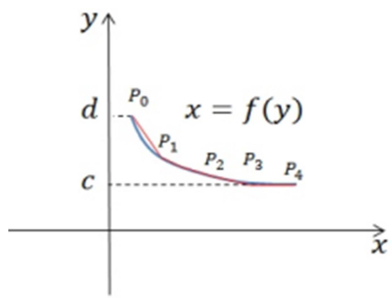
١. لتكن $y = f(x)$ دالة ناعمة على الفترة *[a, b]*. طول المنحنى للدالة *f* هو

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx .$$



٢. لتكن $x = g(x)$ دالة ناعمة على الفترة *[c, d]*. طول المنحنى للدالة *g* هو

$$L(g) = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy .$$



مثال: أوجد طول المنحنى للدالة من A الى B:

1) $y = 5 - \sqrt{x^3}, \quad A(0,5), \quad B(4,-3)$	2) $x = 4x, A(0,0), \quad B(1,4)$

مثال: أوجد طول المنحنى المعطى بالمعادلة:

1) $y = \cosh x;\ \ 0 \le x \le 2$	2) $x = \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{4}y^{-2};\ -2 \le y \le -1$

(B) مساحة سطح الدوران

١. لتكن $y=f(x)$ دالة ناعمة على الفترة *[a, b]*. اذا كان الدوران حول محور x:

$$S.A=2\pi\int_a^b |y|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx .$$

٢. لتكن $x=g(y)$ دالة ناعمة على الفترة *[c, d]*. اذا كان الدوران حول محور y:

$$S.A=2\pi\int_c^d |x|\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy .$$

مثال: أوجد مساحة سطح الدوران الناتج من دوران الدالة $y=\sqrt{4-x^2}$، $-2\le x\le 2$. حول محور x.

مثال: أوجد مساحة سطح الدوران الناتج من دوران الدالة $x=y^3$، $[0,1]$. حول محور y.

الواجب ٧:

السؤال ١: اوجد مساحة المنطقة المحصورة ببيان الدوال $y=cos\ x$ و $y=sin\ x$ و $x=\frac{\pi}{4}$.

السؤال ٢: اوجد مساحة المنطقة المحصورة ببيان الدوال $y=e^x$ و $y=e$ و $x=0$.

السؤال ٣: أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة ببيان الدوال $y=x^2$ ، $y=\sqrt{x}$ حول محور x .

السؤال ٤: أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة ببيان الدوال $y=x^2$ ، $y=2\mathrm{x}$ حول محور x .

السؤال ٥: جد طول القوس $y=\pi+\frac{2x\sqrt{x}}{3}$ من *x=0* الى *x=3* .

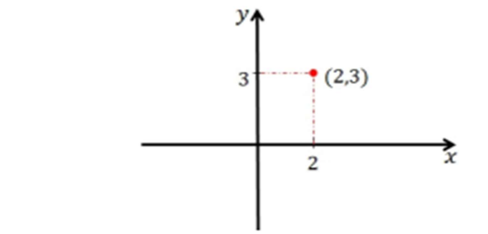
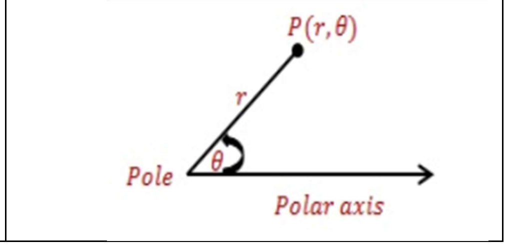
السؤال ٦: جد طول القوس $y=\cosh x$ من *x=0* الى *x=ln3* .

السؤال ٧: جد مساحة سطح الجسم الناشيء من دوران بيان الدالة $y=\sqrt{x}$ على الفترة $[1,4]$ حول محور x .

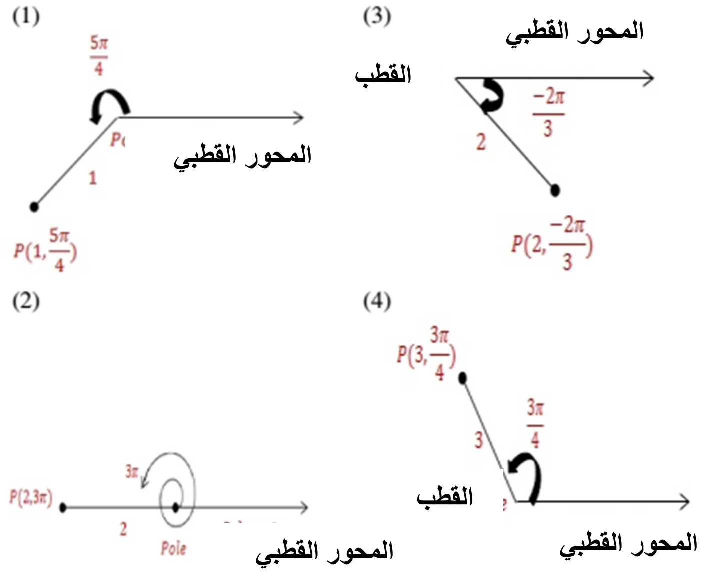
الأحداثيات القطبية:

في السابق، كنا نستخدم الاحداثيات الديكارتية لتحديد نقطة (x,y) كما في الشكل (١). في هذا الفصل سندرس احداثيات جديدة تسمى بالاحداثيات القطبية (الشكل ٢).

تعريف: نظام الاحداثيات القطبية عبارة عن نظام احداثي ذو بعدين بحيث كل نقطة P يتم تحديدها بنصف قطر r من نقطة ثابتة O (تسمى القطب) و زاوية θ من اتجاه ثابت.

١	٢
	

مثال:



ملاحظة:

١. كل نقطة في الاحداث القطبي تتحدد بالزوج (r,θ).

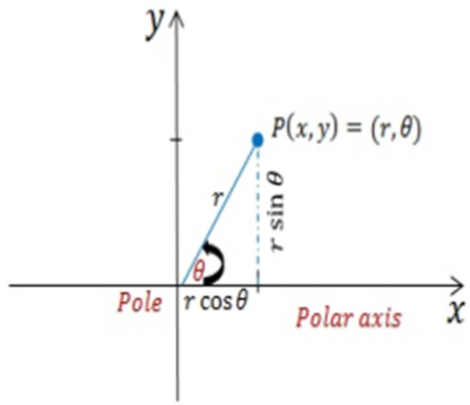
٢. اذا كان $r>0$ فان النقطة (r,θ) تكون في نفس الربع الذي تحدده الزاوية θ. اذا $r<0$ فان النقطة (r,θ) تقع في الربع المعاكس بالنسبة للقطب.

٣. في الاحداث الديكارتي، كل نقطة لها تمثيل واحد فقط. لكن في الاحداث القطبي، هذا غير صحيح

$$\boxed{(r,\theta+2n\pi)=(r,\theta)=(-r,\theta+(2n+1)\pi)\quad n\in\mathbb{Z}\,.}$$

مثال: النقطة $\left(1,\frac{5\pi}{4}\right)$ ممكن تمثيلها كالنقاط $\left(-1,\frac{\pi}{4}\right),\left(1,\frac{13\pi}{4}\right),\left(1,-\frac{3\pi}{4}\right)$

العلاقة بين الاحداثيات القطبية و الديكارتية:



من المثلث OAP $\cos\theta \quad \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta$ ايضا $\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta$

و بالتالي

$$x^2 + y^2 = (r\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2$$
$$= r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$$

ملخص:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ x^2+y^2 &= r^2 \end{aligned}}$$

مثال: حول الاحداثيات القطبية الى ديكارتية

1) $(1, \pi/4)$	2) $(2, \pi/3)$

مثال: حول الاحداثيات الديكارتية الى قطبية

3) $(5, 0)$	4) $(2\sqrt{3}, 2)$

مثال: حول المعادلات الديكارتية الى قطبية:

1) $y^2 = 9x$	2) $x^2 - y^2 = 1$

مثال: حول المعادلات القطبية الى ديكارتية:

1) $r = 6\cos\theta$	2) $r = \sec\theta$

ميل المماس في الاحداثيات القطبية:

لتكن $r = f(\theta)$ منحنى قطبي بحيث f' متصلة عند (r_0, θ_0). فان

$$x = f(\theta)\cos\theta\,,$$

$$y = f(\theta)\sin\theta\,.$$

من قاعدة السلسلة

$$\frac{dx}{d\theta} = -f(\theta)\sin\theta + f'(\theta)\cos\theta = -r\sin\theta + \frac{dr}{d\theta}\cos\theta\,,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\sin\theta = r\cos\theta + \frac{dr}{d\theta}\sin\theta\,.$$

اذا $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$ عند $\theta = \theta_0$ فان ميل المماس للمنحنى عند (r_0, θ_0):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r_0\cos\theta_0 + \sin\theta_0(dr/d\theta)}{-r_0\sin\theta_0 + \cos\theta_0(dr/d\theta)}$$

ملاحظة:

١. اذا $\frac{dy}{d\theta} = 0$ بحيث أن $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$، فان المماس أفقي.

٢. اذا $\frac{dx}{d\theta} = 0$ بحيث أن $\frac{dy}{d\theta} \neq 0$، فان المماس عمودي.

مثال: أوجد ميل المماس للمنحنى $r = s\,\theta$ عند $\theta = \frac{\pi}{4}$.

الرسم في المنحنيات القطبية:

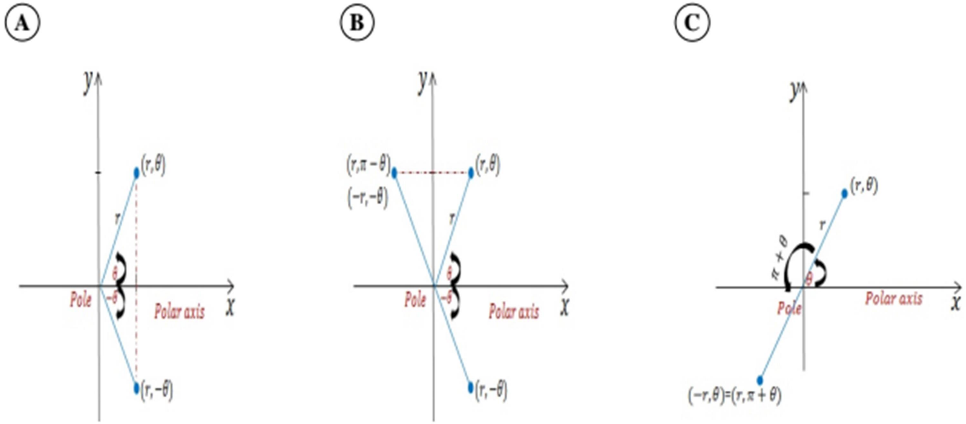
التماثل في المنحيات القطبية:

نظرية:

١. **التماثل حول المحور القطبي.**
المنحنى $r = f(\theta)$ متماثل حول المحور القطبي اذا بدلنا (r, θ) ب $(r, -\theta)$ أو ب $(-r, \pi - \theta)$ لا يغير من المعادلة.

٢. **التماثل $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2}}$.**
المنحنى $r = f(\theta)$ متماثل حول $\theta = \frac{\pi}{2}$ اذا بدلنا (r, θ) ب $(r, \pi - \theta)$ أو ب $(-r, -\theta)$ لا يغير من المعادلة.

٣. **التماثل حول القطب $\boldsymbol{\theta = 0}$.**
المنحنى $r = f(\theta)$ متماثل حول $\theta = 0$ اذا بدلنا (r, θ) ب $(-r, \theta)$ أو ب $(r, \pi + \theta)$ لا يغير من المعادلة.



مثال:

١. الدالة $r = 4cos\,\theta$، متماثل حول المحور القطبي.

٢. الدالة $r = 4sin\,\theta$، متماثل حول $\theta = \frac{\pi}{2}$

٣. الدالة $r^2 = a^2 sin\,2\theta$ متماثل حول القطب.

رسم المنحنيات القطبية:

مثال: ارسم منحنى الدالة $r = 4\ sin\ \theta$.

مثال: ارسم منحنى الدالة $r = a(1 - \ cos\ \theta)$ حيث أن $a>0$.

بعض المنحنيات القطبية الخاصة:

(١) المستقيمات

(أ) المعادلة العامة للمستقيم $a\ x + b\ x = c$ في الاحداثيات القطبية هي

$$r = \frac{c}{a\cos\theta + b\sin\theta} .$$

(ب) معادلة المستقيم العمودي (الرأسي) $x = k$ في الاحداثيات القطبية هي

$$r = k\sec\theta .$$

(ج) معادلة المستقيم الافقي $y = k$ في الاحداثيات القطبية هي

$$r = k\csc\theta .$$

(د) معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل هي

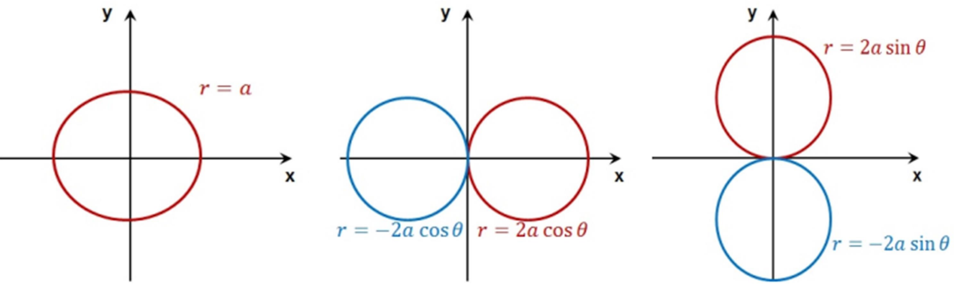
$$\theta = \theta_0$$

(٢) الدوائر

(أ) دائرة مركزها O و نصف قطرها a: $r = a$.

(ب) دائرة مركزها $(a, 0)$ و نصف قطرها $|a|$: $r = 2a\ cos\ \theta$.

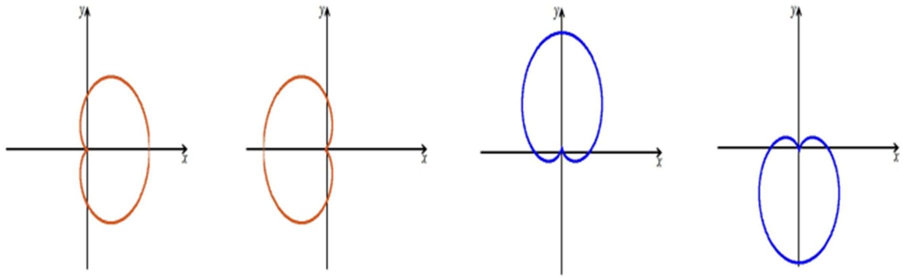
(ت) دائرة مركزها $(0, a)$ و نصف قطرها $|a|$: $r = 2a\ sin\ \theta$.



(٣) المنحنيات القلبية

$$r = a(1 \pm \cos\theta) \text{ OR } r = a(1 \pm \sin\theta)$$

$r = a(1+\cos\theta)$ $r = a(1-\cos\theta)$ $r = a(1+\sin\theta)$ $r = a(1-\sin\theta)$

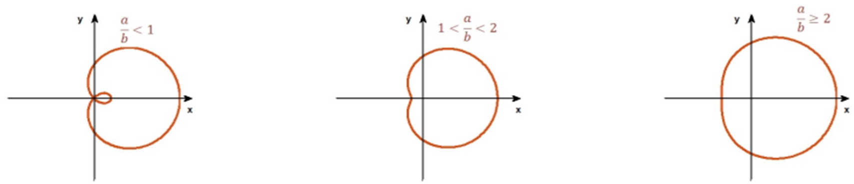


(٤) المنحنيات الصدفية

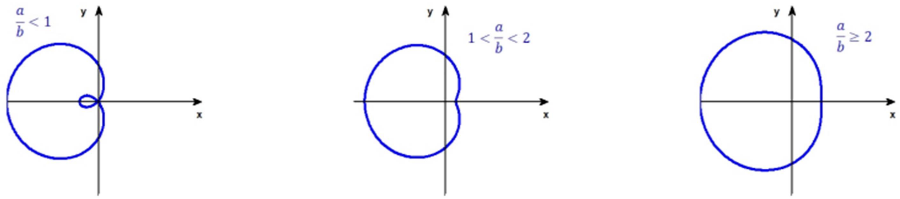
$$r = a \pm b\cos\theta \text{ OR } r = a \pm b\sin\theta$$

(1) $r = a \pm b\cos\theta$

(a) $r = a + b\cos\theta$

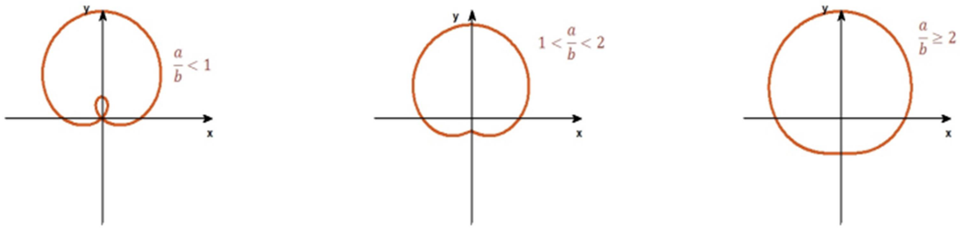


(b) $r = a - b\cos\theta$

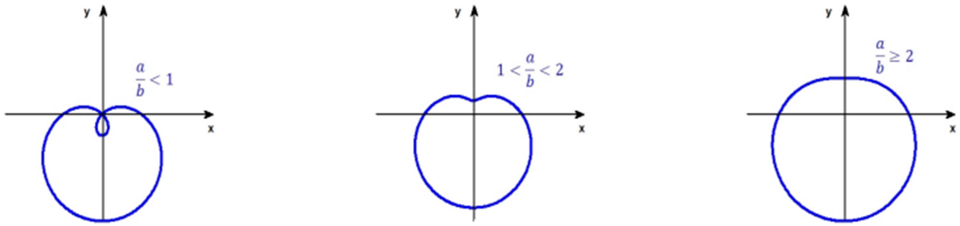


2. $r = a \pm b\sin\theta$

(a) $r = a + b\sin\theta$



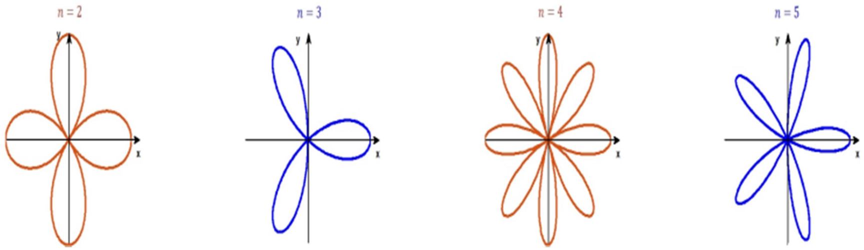
(b) $r = a - b\sin\theta$



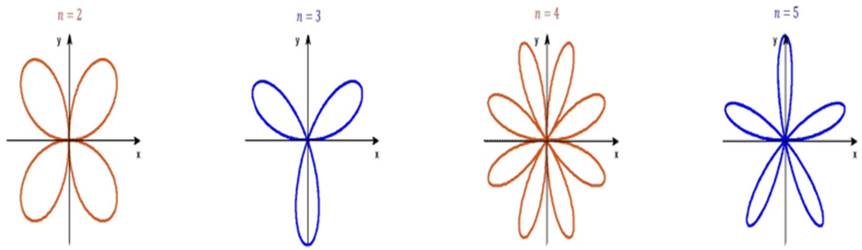
(٥) الوردات

1. $r = a\ \cos(n\theta)$ 2. $r = a\ \sin(n\theta)$ where $n \in \mathbb{N}$.

1. $r = a\ \cos(n\theta)$



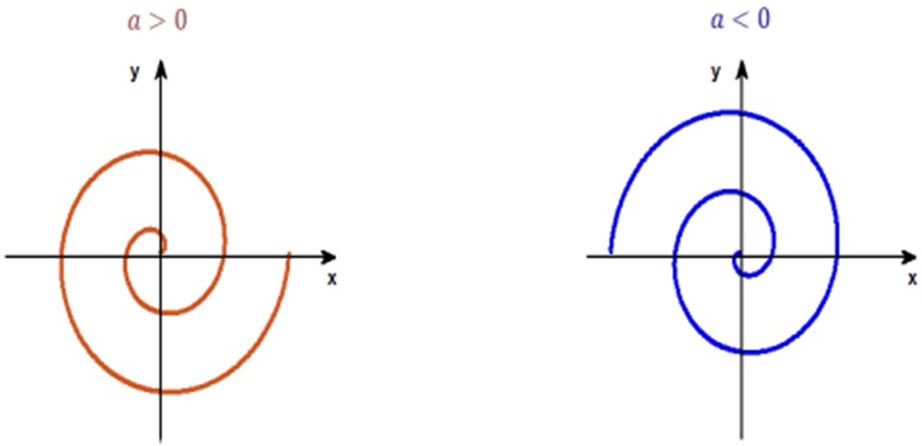
$$2.\ \ r = a\ \sin(n\theta)$$



ملاحظة: اذا n فردي، فعدد الورقات n. لكن اذا n زوجي، فعدد الورقات $2n$.

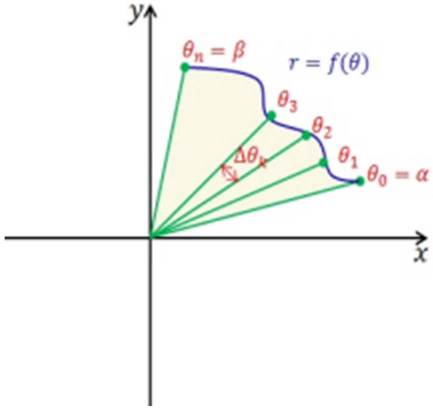
(٦) حلزون ارخميدس

$$r = a\,\theta$$



المساحات في الاحداثيات القطبية:

لتكن $r = f(\theta)$ متصلة على الفترة $[\alpha,\beta]$ بحيث أن $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$. لتكن $f(\theta) > 0$ على تلك الفترة و R المنطقة المحصورة ببيان الدالة كما في الشكل:



لايجاد مساحة R، نفرض أن $P = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ تجزيء منتظم للفترة $[\alpha,\beta]$. اعتبر الفترة الجزئية $[\theta_{k-1},\theta_k]$ بحيث أن $\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$. اختر $\omega_k \in [\theta_{k-1},\theta_k]$، لدينا القطاع الدائري بحيث أن زاويته $\Delta\theta_k$ و نصف قطره $f(\omega_k)$. مساحة المنطقة بين θ_{k-1} و θ_k ممكن تقديرها بالقطاع الدائري في الشكل السابق.

مساحة القطاع = $\frac{[f(\omega_k)]^2 \Delta\theta_k}{2}$. عليه مساحة R هي

$$A = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\omega_k)]^2 \triangle \theta_k \ .$$

من مجموع ريمان، نجد أن

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left(f(\theta)\right)^2 d\theta}$$

في حالة أن هناك دالتين متصلتين بحيث أن $f>g$، فان مساحة المنطقة بينهم هي

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[\left(f(\theta)\right)^2-\left(g(\theta)\right)^2\right]d\theta$$

تمرين: أوجد مساحة المنطقة المحصورة ببيان الدوال:

2) $r=2\cos\theta$	1) $r=3$
4) $r=6-6\sin\theta$	3) $r=4\sin\theta$

تمرين: أوجد مساحة المنطقة داخل المنحنيين $r=\sin\theta$ و $r=\sqrt{3}\cos\theta$.

تمرين: أوجد مساحة المنطقة الواقعة خارج منحنى $r = 3$ و داخل المنحنى $r = 2 + 2\,cos\,\theta$.

الواجب ٨:

السؤال ١: حول المعادلة القطبية $r = \csc\theta$ الى ديكارتية ثم تعرف بيانها.

السؤال ٢:حول المعادلة الديكارتية $x^2 + (y-2)^2 = 4$ الى قطبية ثم تعرف بيانها.

السؤال ٣: أوجد مساحة المنطقة المحصورة ببيان الدوال:

$1)\ r = 2$ $\qquad$ $2)\ r = 1 + sin\,\theta$

$3)\ r = 6\,cos\,\theta$ $\qquad$ $4)\ r = 4(1 - cos\,\theta)$

السؤال: ٤ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 1$ و خارج المنحنى $r = 1 - cos\,\theta$ ثم جد مساحتها.

معلومات رياضية يحتاجها الطالب:

1. Natural numbers: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
2. Whole numbers: $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
3. Integers: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
4. Rational numbers: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ and } b \neq 0\}$
5. Irrational numbers: $\mathbb{I} = \{x \mid x \text{ is a real number that is not rational}\}$
6. Real numbers: $\mathbb{R}$ contains all the previous sets.

■ Example 8.2

1. $-1 \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, and $\mathbb{R}$
2. $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$,, and $\mathbb{R}$
3. $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$,, and $\mathbb{R}$

■

- Adding (or subtracting) two fractions:
  1. Find the least common denominator.
  2. Write both original fractions as equivalent fractions with the least common denominator.
  3. Add (or subtract) the numerators.
  4. Write the result with the denominator.

■ Example 8.3

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$$

The least common denominator is 15

$$\frac{2.5}{3.5} + \frac{3.3}{5.3} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{19}{15}$$

■

- Multiplying two fractions:
  1. Multiply the numerator by the numerator.
  2. Multiply the denominator by the denominator.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

where $b \neq 0$ and $d \neq 0$.

■ Example 8.4

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

■

- Dividing two fractions:
  1. Change the division sign to multiplication.
  2. Invert the second fraction and multiply the fractions.

■ Example 8.5

$$\frac{2}{3} \div \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{9}$$

■

Let a and b be real numbers. Then,

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
7. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

■ Example 8.7

1. $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$
2. $(y-1)^2 = y^2 - 2y + 1$
3. $(x+2)(x-2) = x^2 - 4$
4. $(x+3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$
5. $(y-1)^3 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1$
6. $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$
7. $y^3 - 27 = (y-3)(y^2 + 3y + 9)$

■

- **Factorization Method**

The method is built on

1. finding the factors of c that add up to b, and
2. using the fact that if $x, y \in \mathbb{R}$, then

$$xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ or } y = 0 .$$

■ Example 8.9 $x^2 + 2x - 8 = 0$

Note that, $2 \times (-4) = -8 = c$, but $2 + (-4) = -2 \neq b$.
Now, $-2 \times 4 = -8 = c$ and $-2 + 4 = 2 = b$.
By factoring the left side, we have

$$(x-2)(x+4) = 0$$

$$\Rightarrow x - 2 = 0 \text{ or } x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ or } x = -4 .$$

■

■ Example 8.10 $x^2 + 5x + 6 = 0$

Factoring the left side yields

$$(x+2)(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow x + 2 = 0 \text{ or } x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = -2 \text{ or } x = -3 .$$

• **Quadratic Formula Solutions**

We can solve the quadratic equations by the quadratic formula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Remark: The expression b^2-4ac is called the discriminant of the quadratic equation.

1. If $b^2-4ac>0$, then the equation has two distinct solutions.
2. If $b^2-4ac=0$, then the equation has one distinct solution.
3. If $b^2-4ac<0$, then the equation has no real solutions.

■ **Example 8.11** Solve the following quadratic equations:

1. $x^2+2x-8=0$
2. $x^2+2x+1=0$
3. $x^2+2x+8=0$

Solution:

1. $a=1,\ b=2,\ c=-8$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{-2\pm 6}{2}$$

Thus, the solution are $x=2$ and $x=-4$.

2. $a=1,\ b=2,\ c=1$

Since $b^2-4ac=2^2-4(1)(1)=0$, then there is one solution $x=-1$.

3. Since $b^2-4ac=2^2-4(1)(8)<0$, then there is no real solutions. ■

If c denotes the length of the hypotenuse and a and b denote the lengths of the other two sides, the Pythagorean theorem can be expressed as the

$$a^2+b^2=c^2\ \Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

If a and c are known and b is unknown, then

$$b=\sqrt{c^2-a^2}.$$

Similarly, if b and c are known and a is unknown, then

$$a=\sqrt{c^2-b^2}$$

a is adjacent
b is opposite
c is hypotenuse

The trigonometric functions for a right triangle:

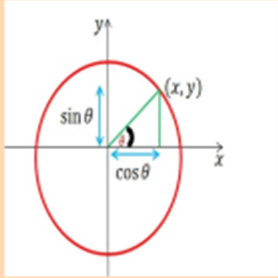
$$\cos\theta=\frac{a}{c}\quad \cot\theta=\frac{a}{b}$$

$$\sin\theta=\frac{b}{c}\quad sec\theta=\frac{c}{a}$$

$$\tan\theta=\frac{b}{a}\quad csc\theta=\frac{c}{b}$$

If (x,y) is a point on the unit circle, and if the ray from the origin $(0,0)$ to that point (x,y) makes an angle θ with the positive x-axis, then

$$\cos\theta=x,\quad \sin\theta=y,$$



- Each point (x,y) on the unit circle can be written as $(\cos\theta,\sin\theta)$.
- From the equation $x^2+y^2=1$, we have

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1.$$

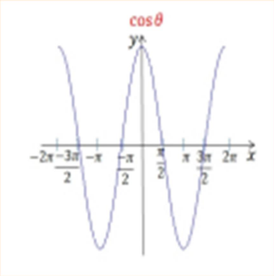
From this,

$$1+\tan^2\theta=sec^2\theta,$$

$$\cot^2\theta+1=csc^2\theta.$$

- Exact values of trigonometric functions of most commonly used angles:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	undefined	0



- Trigonometric functions of negative angles:

$$\cos(-\theta)=\cos(\theta),\ \sin(-\theta)=-\sin(\theta),$$

$$\tan(-\theta)=-\tan(\theta)$$

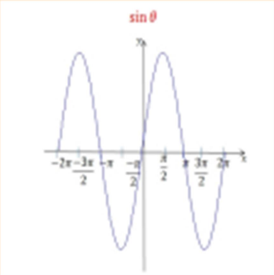
- Double and half angle formulas

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$$

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}},\ \cos\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$



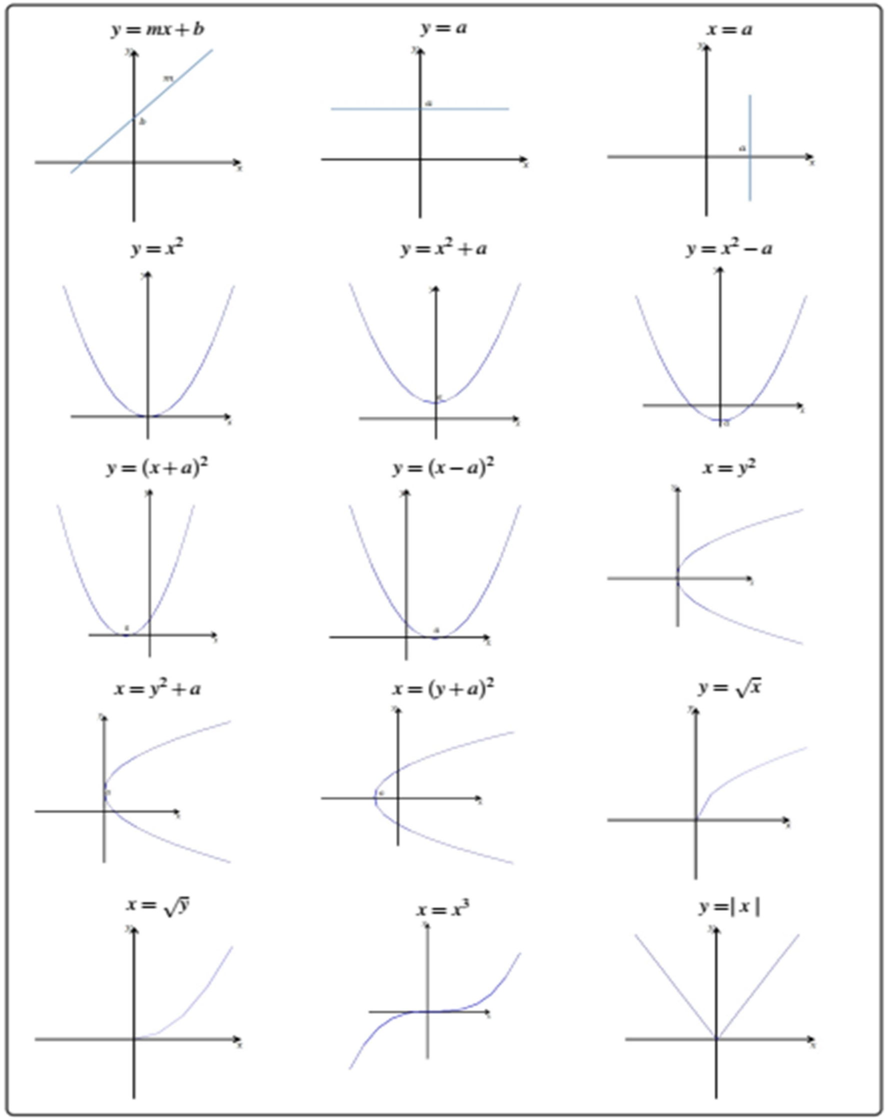
- Angle addition formulas

$$\sin(\theta_1\pm\theta_2)=\sin\theta_1\cos\theta_2\pm\cos\theta_1\sin\theta_2$$

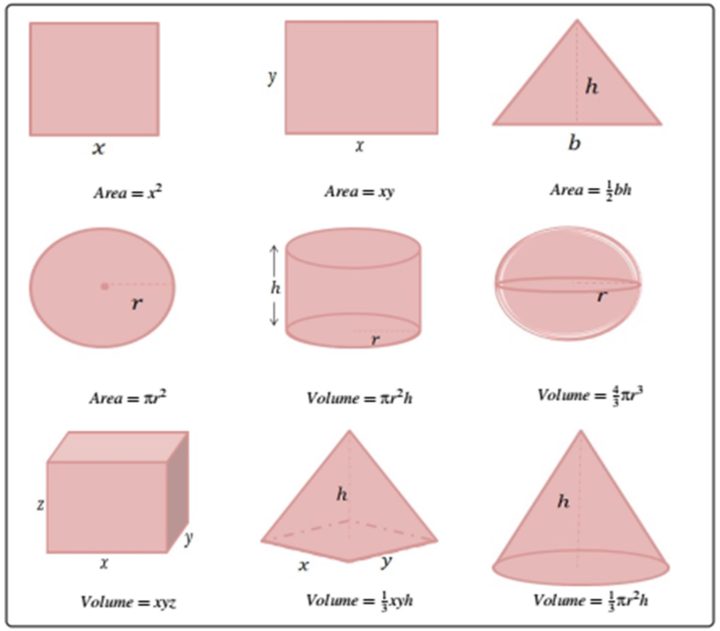
$$\cos(\theta_1\pm\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2\mp\sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$\tan(\theta_1\pm\theta_2)=\frac{\tan\theta_1\pm\tan\theta_2}{1\mp\tan\theta_1\tan\theta_2}$$

Sketch of Some functions:



Area and Volume of Special Shapes:



د. محمد الغامدي المكتب: ٢أ ١٢٦ الايميل: almohamad@ksu.edu.sa

الموقع الاكتروني: http://fac.ksu.edu.sa/almohamad/home

الساعات المكتبية:

- الأحد – الثلاثاء – الخميس
  من الساعة ٦ صباحا الى الساعة ٨ صباحا.
- الاربعاء
  من الساعة ٦ صباحا الى الساعة ١٠ صباحا.

كتاب المقرر : مبادئ التفاضل و التكامل (الجزء الثاني)
تأليف : د. صالح السنوسي – د. معروف سمحان – د. كمال عبدالرجمن – د. أحمد خليفة

مواضيع المقرر :

- تعريف التكامل المحدد بإستخدام مجموع ريمان.
- خواص التكامل المحدد.
- نظرية القيمة المتوسطة في التكامل والنظرية الأساسية في حساب التكامل والتفاضل.
- الدالة الأصلية وتعريف التكامل غير المحدد.
- طريقة التكامل بالتعويض.
- الدوال اللوغاريتمية والأسية.
- الدوال المثلثية و المثلثية العكسية.
- الدوال الزائدية والزائدية العكسية.
- طرق التكامل : التكامل بالتجزيء ، التعويضات المثلثية، طريقة إكمال المربع.
- تكاملات الدوال الكسرية.
- تكاملات الدوال المثلثية قاعدة لوبيتال.
- التكاملات المعتلة.
- حساب المساحات وحجوم الأجسام الدوراني.
- حساب طول قوس لمنحنى.
- الإحداثيات القطبية.
- رسم بعض المنحنيات المعروفة في الإحداثيات القطبية
- حساب المساحات بالإحداثيات القطبية

- **التقييم:**
- الإختبارالفصلي الأول: ٢٥ درجة **موعده: ....-.....-١٤٣٨هـ الساعة ٧ الى ٨:٣٠ مساءا**

  الإختبارالفصلي الثاني: ٢٥ درجة **موعده: ....-.....-١٤٣٨هـ الساعة ٧ الى ٨:٣٠ مساءا**

  التمارين: ١٠ درجات

  الإختبارالنهائي: ٤٠ درجة

  المجموع: ١٠٠ درجة

- **توزيع درجة التمارين:**

  اختبارات قصيرة:

  عددها: ٢

  موعدها: في محاضرة التمارين في الاسبوع الذي يسبق الاختبار الفصلي.

  درجة كل اختبار: ٤ درجات. درجتان على حضور التمارين.

الواجبات:

- يتم تسليم الواجب بعد الانتهاء من كل باب. يعطى الطالب أسبوع لتسليم الواجب و لن تقبل الواجبات المتأخرة.

الحضور و الحرمان:

- على الطلاب حضور جميع المحاضرات.
- في حالة الغياب: يحق للطالب أن يتغيب عن ٢٥% من المحاضرات أي ما يعادل ١٢ محاضرة فقط.

التغيب عن الاختبار بعذر:

في حالة حصول ظرف على الطالب يمنعه من دخول الاختبار، يرجى تقديم طلب اختبار بديل في اليوم التالي من الاختبار و ذلك عن طريق سكرتارية قسم الرياضيات.