د. برهان

# معادلات التفاضلية:

تعريف: أي معادلة

$$F(x, y, y', \ldots, y^{n}) = 0$$

تسمى معادلة تفاضلية عادية ODE

(Ordinary Differential equation) من الرتبة n

⚠ معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى

$$F(x, y, y') = 0$$

- أي معادلة تفاضلية تكتب على شكل

$y' = \frac{dy}{dx}$

$$f(x)\, dx = g(y)\, dy$$

تسمى معادلة تفاضلية ذات متحولات منفصلة

- أي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى يمكن أن تكتب على الشكل $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$

وتكون متجانسة إذا وضعنا $y = ux$

فان $f(x, ux) = F(u)$

عندئذ تصبح $\frac{du}{F(u)-u} = \frac{dx}{x}$ ذات متحولات منفصلة

- أي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى يمكن أن تكتب على الشكل

$$(*) \quad M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0$$

ونقول انها تامة إذا وجدت دالة $F(x,y)$

بحيث $dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$

$$= M\, dx + N\, dy$$

وتكون مجموعة الحل لـ$(*)$ هو $F(x,y) = ثابت$

⚠ $(*)$ تامة إذا كانا $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$

⚠ إذا كان $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ فان (*) ليست تامة وبالتالي نبحث عن عامل تكميلي $\mu$ (أي وجد تصبح $\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$ تامة)

- إذا كان $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = g(y)$

فان $\mu(y) = e^{\int g(y)dy}$

- إذا كان $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$

فان $\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$

• أي معادلة تكتب على الشكل

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$

حيث $Q, P$ دوال متصلة على نفس الفترة $I$

تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى

ولإيجاد الحل:

أولا نبحث عن العامل التكميلي

$$\boxed{\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}}$$

والحل يكون $y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(t)\,Q(t)\,dt$

وهو يكتب $y(x) = \underbrace{y_c(x)}_{} + y_p(x)$

يسمى الحل العام للمتجانسة $y' + P(x)y = 0$

يسمى حل خاص

⚠ أي معادلة تفاضلية تكتب على الشكل :

$$(\star) \quad y' + p(x)\, y = Q(x)\, y^n$$

حيث $n \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ تسمى معادلة بيرنولي Bernoulli's eq

ويكون حلها كالآتي :

. أولا نقسم طرفي المعادلة على $y^n$ , $(\star)$ تصبح

$$(\square) \quad y'\, y^{-n} + p(x)\, y^{1-n} = Q(x)$$

باستبدال $z = y^{1-n}$ فان $z' = (1-n)\, y^{-n} y'$

فان $(\square)$ تصبح :

$$\frac{1}{1-n} z' + p(x)\, z = Q(x)$$

يعني

$$\boxed{z' + \underbrace{(1-n)\, p(x)}_{P_1} z = \underbrace{(1-n)\, Q(x)}_{Q_1}}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية .

---

**تمرين :** حل المعادلات التفاضلية التالية :

① $y' = x - xy - y + 1$

② $x \sin x + (1 + 4y^3)\, dy = 0$

③ $x \dfrac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

④ $(2 + x^2 y) \dfrac{dy}{dx} + x y^2 = 0$

⑤ $y^3\, dx + (3y^2 + 3xy^2 - y^3)\, dy = 0$

⑥ $x \dfrac{dy}{dx} + y + 4 = 0$

⑦ $(1 + x^2)\, y' + xy + x^3 + x = 0$

⑧ $y(6y^2 - x - 1)\, dx + 2x\, dy = 0$ , $x > 0$