



# *Phys 570*

## **Lecture #12**

*Physics & Astronomy Dept.*

*College of Science*

*King Saud University*

***Nasser S. Alzayed***

[nalzayed@ksu.edu.sa](mailto:nalzayed@ksu.edu.sa)

# Chapter 9: EXP. METHODS IN FERMI SURFACE STUDIES

## *Introduction*

- ❑ Powerful experimental methods have been developed for the determination of Fermi surfaces. The methods include:
  - ❖ **magnetoresistance**
  - ❖ **Anomalous**
  - ❖ **Skin effect**
  - ❖ **Cyclotron resonance**
  - ❖ **Magneto-acoustic geometric effects**
  - ❖ **The Shubnikow-de Haas effect**
  - ❖ **The de Haas-van Alphen effect.**
- ❑ We propose to study one method rather thoroughly. All the methods are useful, but need detailed theoretical analysis. We select the de Haas-van Alphen effect because it exhibits very well the characteristic periodicity in  $1/B$  of the properties of a metal in a uniform magnetic field.

## الفصل التاسع: أسطح فرمي والمعادن

### تكميم المدارات عند وجود المجال المغناطيسي *Quantization of Orbits in a Magnetic Field*

- زخم (اندفاع) جسيم مشحون في مجال مغناطيسي يتكون من جزأين: جزء حركي:  $P_{kin} = \hbar k$  وجزء كهربائي:  $P_{field} = qA/c$  حيث  $q$  شحنة الجسيم.
- المتجه  $A$  يعرف بأنه (الجهد المتجه) vector potential ويعرف كالتالي:  $B = \nabla \times A$
- الاندفاع الكلي يعطي بالشكل:

$$P = P_{kin} + P_{field} = \hbar k + qA / c \quad (22)$$

- باستخدام علاقة (بور - سمر فيلد) التالية:

$$\oint p \cdot dr = (n + \gamma) 2\pi \hbar \quad (23)$$

- بالنسبة للكميات الداخلة:  $n$  عدد صحيح،  $\gamma$  يسمى (تصحيح الطور) phase corrector وله قيمة معينة تعتمد على نوع الجسيم، للإلكترون الحر  $\gamma = 1/2$ .

## الفصل التاسع: أسطح فرمي والمعادن

### Quantization of Orbits in a Magnetic Field عند وجود المجال المغناطيسي

• باستخدام المعادلة (22) يمكن كتابة العلاقة كالتالي:

$$\oint \underline{p} \cdot d\underline{r} = \oint P_{kin} + \oint P_{field} = \oint \hbar \underline{k} \cdot d\underline{r} + \frac{q}{c} \oint \underline{A} \cdot d\underline{r} \quad (24)$$

• معادلة الحركة للجسيم المشحون في داخل مجال مغناطيسي تعطى بالصورة:

$$F = v \times q$$

$$\hbar \frac{d\underline{k}}{dt} = \frac{q}{c} \frac{d\underline{r}}{dt} \times B \quad (25 a)$$

• نقوم بتكامل الطرفين بالنسبة للزمن لنحصل على:

$$\hbar \underline{k} = \frac{q}{c} \underline{r} \times B$$

• يمكن التعويض من هذه العلاقة في التكامل في (24) ونقوم بتكامل الحد الأول فقط:

## الفصل التاسع: أسطح فرمي والمعادن

تكميم المدارات عند وجود المجال المغناطيسي *Quantization of Orbits in a Magnetic Field*

$$\oint \hbar k \cdot dr = \frac{q}{c} \oint r \times B \cdot dr = -\frac{q}{c} B \cdot \oint r \times dr = -\frac{2q}{c} \Phi \quad (25 b)$$

- الكمية  $\Phi$  تمثل الفيض المغناطيسي من خلال المدار في الفراغ الحقيقي.
- حيث استخدمنا العلاقة الهندسية التالية (التكامل الخطي حول مسار مغلق يساوي مساحة السطح المغلق بهذا المسار):

$$\oint r \times dr = 2 \times (\text{Area enclosed by the orbit})$$

- بالنسبة للحد الثاني في معادلة (24):

$$\frac{q}{c} \oint A \cdot dr = \frac{q}{c} \oint \nabla \times A \cdot d\sigma = \frac{q}{c} \oint B \cdot d\sigma = \frac{q}{c} \Phi \quad (25 c)$$

- حيث استفدنا من نظرية ستوكس Stokes Theorem والتي تنص على أن التكامل المغلق على سطح يمر من خلاله مجال مغناطيسي يساوي الفيض المغناطيسي حيث  $d\sigma$  تعبر عن عنصر السطح.

## الفصل التاسع: أسطح فرمي والمعادن

### تكميم المدارات عند وجود المجال المغناطيسي *Quantization of Orbits in a Magnetic Field*

• بجمع 25b و 25c والتعويض في معادلة 24 نحصل على:

$$\oint p \cdot dr = -\frac{q}{c} \Phi = (n + \gamma) 2\pi\hbar \quad (26)$$

• ومعنى ذلك أن المجال المغناطيسي خلال المسار المغلق الدائري الذي يشكله الإلكترون وهو يدور في المجال المغناطيسي مكما، أي له قيمة كمية معينة أو مضاعفاتها بدون كسور:

$$\Phi_n = (n + \gamma) \frac{2\pi\hbar c}{e} \quad (27)$$

• حيث استخدمنا شحنة الإلكترون بدلا من  $q$ . نلاحظ أن القيمة الدنيا للفيض  $\Phi$  هي عندما  $n = 0$  وتساوي:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \left(0 + \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi\hbar c}{e} = \frac{3.14 \times 1.05459 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1.6 \times 10^{-19}} \\ &= 2.07 \times 10^{-7} \text{ G/cm}^2 \text{ (T.m}^2\text{)} = 2.07 \times 10^{-15} \text{ Wb} \end{aligned}$$

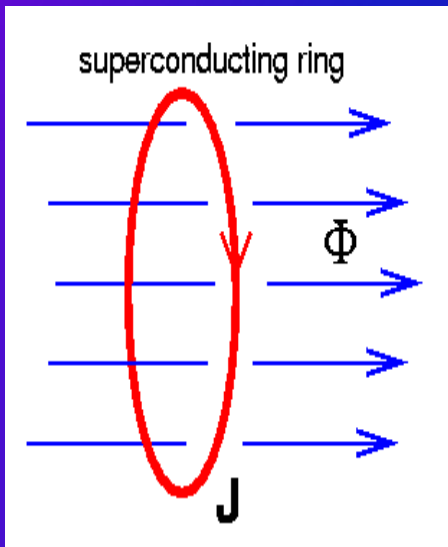
# الفصل التاسع: أسطح فرمي والمعادن

## تكميم المدارات عند وجود المجال المغناطيسي *Quantization of Orbits in a Magnetic Field*

- وهذا الرقم يمثل كمية المجال المغناطيسي (خط واحد فقط، يمثل كمة واحدة فقط) الذي يمر من خلال مساحة مدار الإلكترون الذي يتحرك في المجال المغناطيسي في الفراغ الحقيقي.
- يا ترى هل يمكن حساب الفيض المغناطيسي باستخدام الفراغ المتجه المقلوب؟
- يمكن استخدام المعادلة رقم (25a) بعد إعادة ترتيب الرموز للحصول على:

$$\Delta r = \frac{\hbar c}{eB} \Delta k$$

- أذن يمكن كتابة العلاقة بين المساحة في الفراغ العادي  $A_n$  والمساحة في الفراغ المقلوب  $S_n$  كما يلي:



$$\pi (\Delta r)^2 = \pi \left( \frac{\hbar c}{eB} \right)^2 (\Delta k)^2$$
$$\Rightarrow A_n = \left( \frac{\hbar c}{eB} \right)^2 S_n \quad (28)$$

# الفصل التاسع: أسطح فرمي والمعادن

تكميم المدارات عند وجود المجال المغناطيسي *Quantization of Orbits in a Magnetic Field*

• وحيث أن: الفيض = المساحة  $\times$  الحث المغناطيسي

$$\Phi_n = A_n \times B = \left( \frac{\hbar c}{eB} \right)^2 S_n \times B = \left( \frac{\hbar c}{e} \right)^2 \frac{1}{B} S_n = (n + \gamma) \frac{2\pi\hbar c}{e} \quad (29)$$

• بإعادة ترتيب الحدود، نستطيع أن نلاحظ أن المساحة في الفراغ المقلوب تحقق ما يلي:

$$S_n = (n + \gamma) \frac{2\pi e}{\hbar c} B \quad (30)$$

• نريد أن نفهم أكثر مسألة كون المجال المغناطيسي مكما (أو كون المدارات مكمة). لنتصور أن مساحة المدار ثابتة، ولنتصور أننا سلطنا مجالا شدته كمة مغناطيسية واحدة فقط، فسوف تمر من خلال ذلك المدار. الآن لنتصور أننا زدنا المجال ولكن لم نصل إلى زيادة تعادل نصف كمة أو أكثر، فهذا المجال سوف يرفض، أي لن يمر من خلال المدار (لأنه أقل من نصف كمة)، ولو زاد عن نصف كمة، فسوف يمر ولكن المدار سوف يزيد لكي يصل إلى كمة كاملة!!!! أي سوف يمر عدد 2 من الكمات!! باختصار نحن نسلط كمة ونصف، ولكن ما يمر هو كمتان، لأنه لا يسمح للكسور.



# الفصل التاسع: أسطح فرمي والمعادن

## تكميم المدارات عند وجود المجال المغناطيسي *Quantization of Orbits in a Magnetic Field*

- مما سبق فيمكن أن يحصل تغير في شدة المجال المغناطيسي بمقدار  $\Delta B$  لمدارين متوالين دون أن تتغير مساحة المدار (أي يكون للمدارين نفس المساحة في الفراغ المقلوب)
- إذن معادلة (30) لمدارين متوالين  $n$  و  $n+1$  تؤدي إلى:

$$S \left[ \frac{1}{B_{n+1}} - \frac{1}{B_n} \right] = \frac{2\pi e}{\hbar c} \quad (31)$$

- وهذا معناه أن عددا متساويا من الزيادات increments في الكمية  $1/B$  سوف تؤدي إلى نفس المدارات. وهذه سمة هامة جدا عندما ندرس سطوح فرمي في المعادن عند درجات الحرارة المتدنية أثناء تطبيق مجال مغناطيسي وتغيير قيمته، حيث تحصل تغييرات دورية (بشكل متذبذب) في بعض الخصائص المتعلقة بالمادة مثل المقاومة، القابلية المغناطيسية، السعة الحرارية وهكذا.

# الفصل التاسع: أسطح فرمي والمعادن

## De Haas-van Alphen Effect

## أثر دي هاس فان ألفن

- يعرف أثر دي هاس فان ألفن بأنه “التذبذب في العزم المغناطيسي Magnetic Moment لمعدن ما تحت تأثير مجال مغناطيسي خارجي تتغير شدته“. طبعاً نحن نتحدث عن مجال مغناطيسي قوي، وعند درجات حرارة متدنية (قريباً من الصفر).
- لو تحدثنا عن وضع يكون لدينا فيه إلكترونات حرة تدور في مدارات وفي مستوى ثنائي  $k_x, k_y$  فإن مساحة المدارات سوف تكون مكممة (كما في معادلة 30). المساحة بين أي مدارين متواليين:

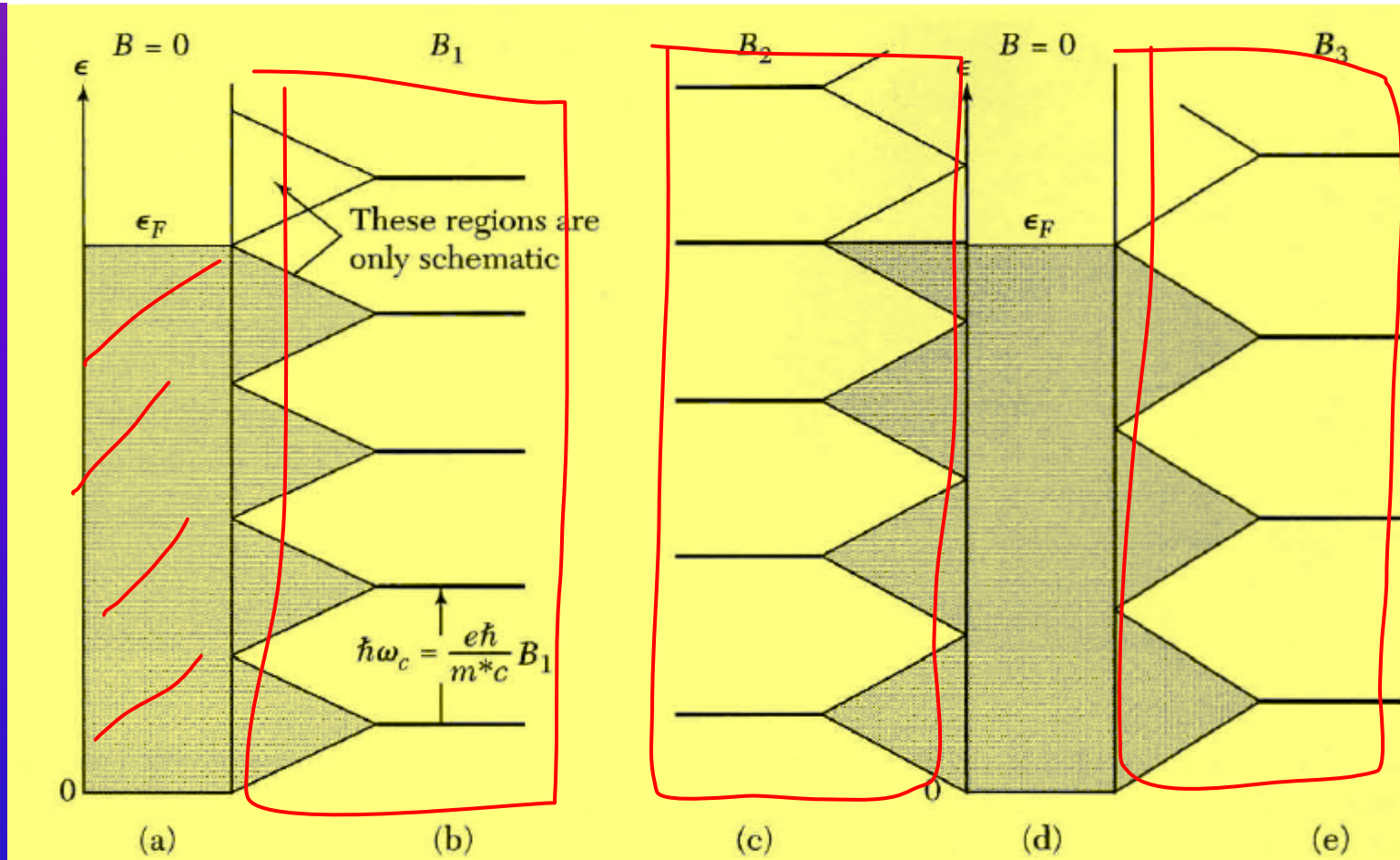
$$\Delta S = S_n - S_{n-1} = \frac{2\pi eB}{\hbar c} \quad (32)$$



- مساحة مدار واحد فقط في الفراغ المقلوب لعينة مربعة الشكل طول حرفها  $L$  هي  $(2\pi/L)^2$
- إذن يمكن حساب عدد المدارات الكلية  $D$  عند شدة مغناطيسية ثابتة باستخدام العلاقة (32):

$$D = \left( \frac{2\pi eB}{\hbar c} \right) \div \left( \frac{2\pi}{L} \right) = \rho B \quad (33)$$

- حيث:  $\rho = eL^2/2\pi\hbar c$ . يسمى هذا المجال المغناطيسي الثابت بمستوى لاندو Landau Level



توضيح لأثر دي-هاس-فان-الفن لغاز إلكتروني في بعدين بوجود مجال مغناطيسي خارجي. منطقة (a) و (d) تمثلان المدارات المملوءة في حالة غياب المجال المغناطيسي. مستويات الطاقة عندما يتم تشغيل المجال المغناطيسي مبينة في كل من (b) و (c) و (e). في الحالة (b) قيمة المجال المسط  $B_1$  بحيث أن الطاقة الكلية للنظام لم تتغير مقارنة بها قبل المجال، وذلك أن عدد الإلكترونات التي ارتفعت يساوي عدد التي انخفضت بسبب المجال المغناطيسي المطبق من أجل تحقيق شرط التكميم. ولكن عندما تمت زيادة المجال إلى القيمة  $B_2$  ارتفعت قيمة الطاقة الكلية بسبب أن الإلكترونات الخارجية زادت طاقتها بشكل ملحوظ (c). في (e) عادت الطاقة الكلية لتساوي نفس قيمتها عندما كان المجال مساويا للصفر. إذن باختصار تكون الطاقة الكلية للإلكترونات ذات قيم دنيا عندما:  $B = B_1, B_3, B_5 \dots$  وقصوى عندما:  $B = B_2, B_4, \dots$

$B_3, B_4, \dots$

# الفصل التاسع: أسطح فرمي والمعادن

## De Haas-van Alphen Effect

## أثر دي هاس فان ألفن

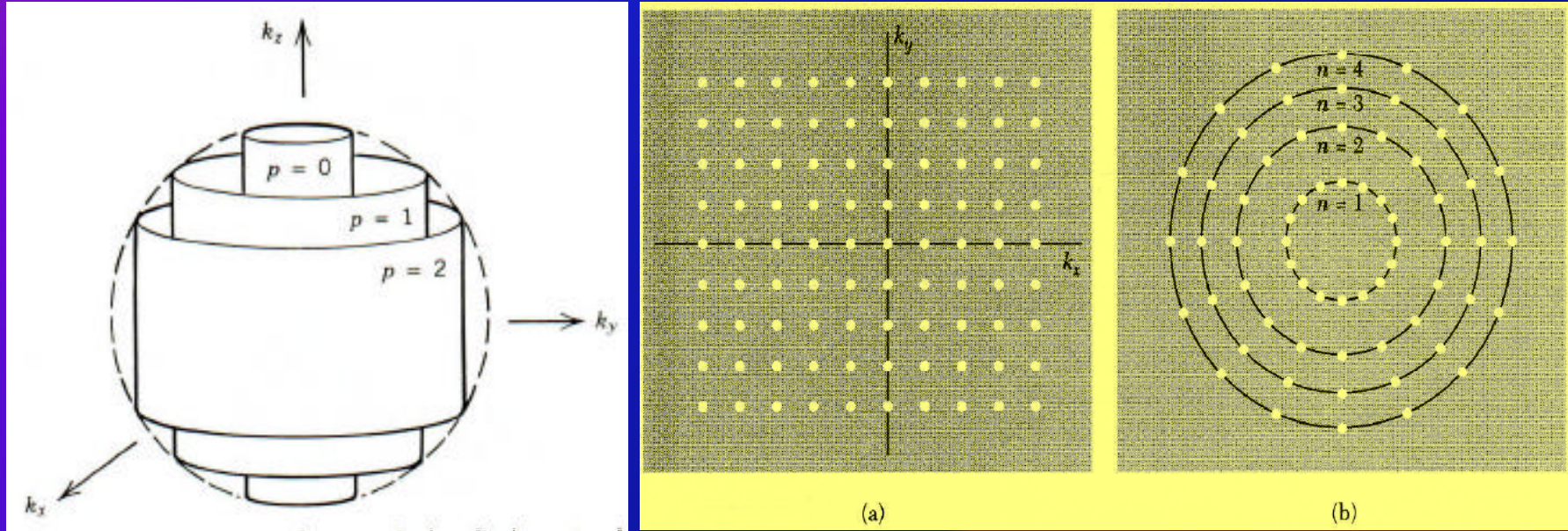
- يعتمد عادة مستوى فرمي على المجال المغناطيسي الخارجي بصورة درامية. فلو كان لدينا نظام مكون من  $N$  من الإلكترونات عند الصفر المطلق، فإن مستويات لاندو كلها مملوءة إلى رقم كمي معين نرسم له بالرمز  $s$ . المستوى الذي يليها مباشرة  $s + 1$  مملوء جزئياً بالإلكترونات. يقع مستوى فرمي بالضبط في هذا المستوى ( $s + 1$ ) بشرط وجود إلكترونات ولو كانت قليلة في هذا المستوى.
- عندما يتم زيادة المجال المغناطيسي، تبدأ الإلكترونات بالتحرك لمستويات دنيا، وعندما يصبح المستوى ( $s + 1$ ) فارغاً تماماً فإن سطح فرمي يقفز فجأة إلى المستوى الذي تحته مباشرة.
- طبعاً قد يسأل سائل كيف تنتقل الإلكترونات إلى مستويات لاندو دنيا في حين أن هذه المستويات كانت مملوءة؟
- والجواب أن هذا يحصل بسبب الانقسام Degeneracy الذي يزيد للمستويات بسبب المجال المغناطيسي. كما يبين ذلك الشكل التالي.
- عندما يتم زيادة المجال المغناطيسي المسلط تدريجياً، فإننا نمر بقيم للمجال يحصل عندها تغير مفاجئ في أرقام المستويات العليا المملوءة بحيث تنقص فجأة بمقدار واحد صحيح ( $s + 1$ ) تتغير إلى  $s$ . هذا المجال سوف نطلق عليه المجال الحرج  $B_s$  وعنده لا توجد مدارات مملوءة جزئياً، أما مملوءة تماماً أو فارغة تماماً. أين أن لدينا:

$$s\rho B_s = sD = N \quad (34)$$

# الفصل التاسع: أسطح فرمي والمعادن

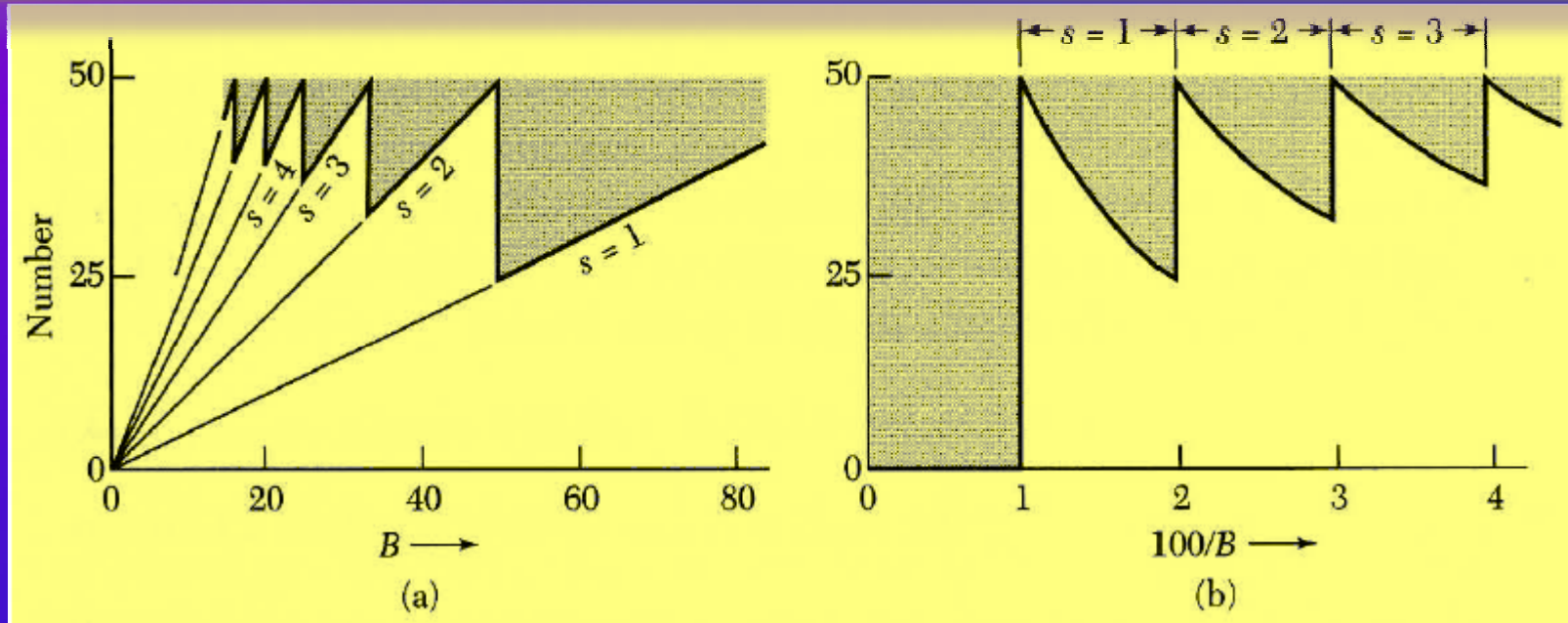
## De Haas-van Alphen Effect

## أثر دي هاس فان ألفن



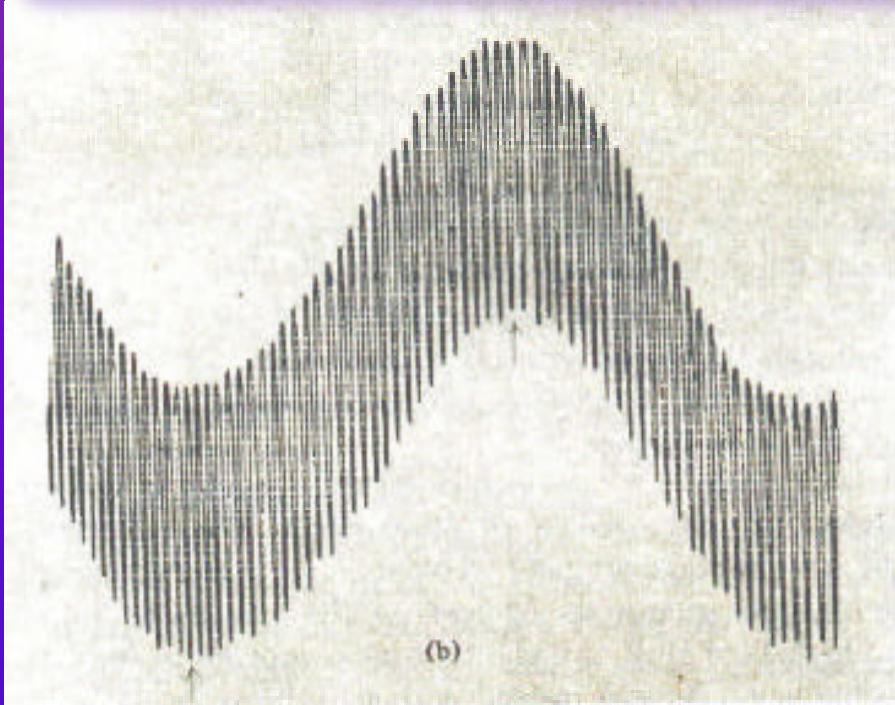
- توضيح لتوزيع الألكترونات قبل وبعد تسليط المجال المغناطيسي لنظام مكون من عدد كبير من الألكترونات في بعدين. (a) قبل المجال، الألكترونات تتوزع بانتظام. (b) بعد تشغيل المجال، تم تجمع المدارات في دوائر ذات أرقام كمية.
- عدد المدارات في كل دائرة ثابت، ويساوي المساحة بين أي دائرتين متواليتين مضروباً في عدد المدارات في وحدة المساحات في الشكل (a).

## الفصل التاسع: أسطح فرمي والمعادن

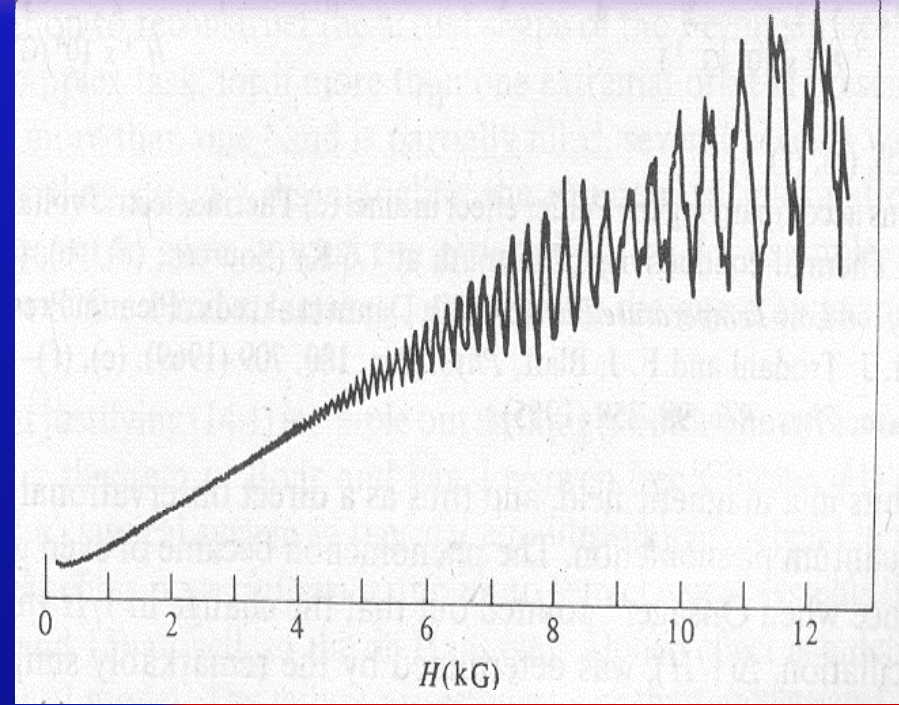


• لدينا نظام مكون من  $N = 50$  و  $\rho = 0.5$  في بعدين تحت تأثير مجال مغناطيسي خارجي  $B$ . بالنسبة للجزء (a): الخطوط الداكنة تمثل عدد الألكترونات الكلي في المسويات المملوءة تماما عندما يكون هناك مجال مغناطيسي. المناطق المظلمة تمثل عدد الألكترونات في المدارات المملوءة جزئيا. تمثل الأرقام  $s$  الأرقام الأعلى للمستويات المملوءة. مثلا عندما  $B = 40$  لدينا  $s = 2$ ، من العلاقات 33 و 34 لدينا:  $n = 1$  و  $n = 2$  مملوءة تماما (كل مستوى 20 ألكترون)، ويبقى 10 إلكترونات موجودة في  $n = 3$ . عندما ترتفع  $B = 50$  فإن المستويين الأولين مملوءين كل واحد 25 إلكترونًا ويبقى الثالث فارغا تماما. الجزء (b) يمثل الدورية التي ذكرنا سابقا في مقابل زيادة مقلوب شدة المجال.

## الفصل التاسع: أسطح فرمي والمعادن



التمغنت للفضة تحت مجال قوي



مقاومية الجاليوم تحت مجال قوي

## الفصل التاسع: أسطح فرمي والمعادن

### De Haas-van Alphen Effect

### أثر دي هاس فان ألفن

- أن عدد المستويات المملوءة مضروباً في الانقسام (Degeneracy) عند المجال المغناطيسي الخاص  $B_s$  يعطي العدد الكلي للألكترونات  $N$ .
- وسوف نحاول الآن بيان الدورية في الطاقة Periodicity تحت تأثير المجال المغناطيسي الخارجي  $B$ . سوف نستخدم علاقة الطاقة الخاصة بالمستويات وهي:

$$E_n = \left( n - \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c \quad \text{where } \omega_c = \frac{eB}{m^* c}$$

- مع ملاحظة أن القيمة الدنيا لـ  $n$  تساوي 1 وليس 0 كما تعودنا في المتذبذب التوافقي البسيط.
- إذن يمكن حساب الطاقة الكلية للمستويات المملوءة كما يلي:

$$\sum_{n=1}^s D \hbar \omega_c \left( n - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} D \hbar \omega_c s^2 \quad (35)$$

- حيث  $D$  تمثل عدد الإلكترونات في كل مستوى.



## الفصل التاسع: أسطح فرمي والمعادن

### De Haas-van Alphen Effect

### أثر دي هاس فان ألفن

• الطاقة الكلية لجميع الإلكترونات في المستويات المملوءة جزئياً:  $s + 1$  تعطي كالتالي:

$$\hbar \omega_c \left( s + \frac{1}{2} \right) (N - sD) \quad (36)$$

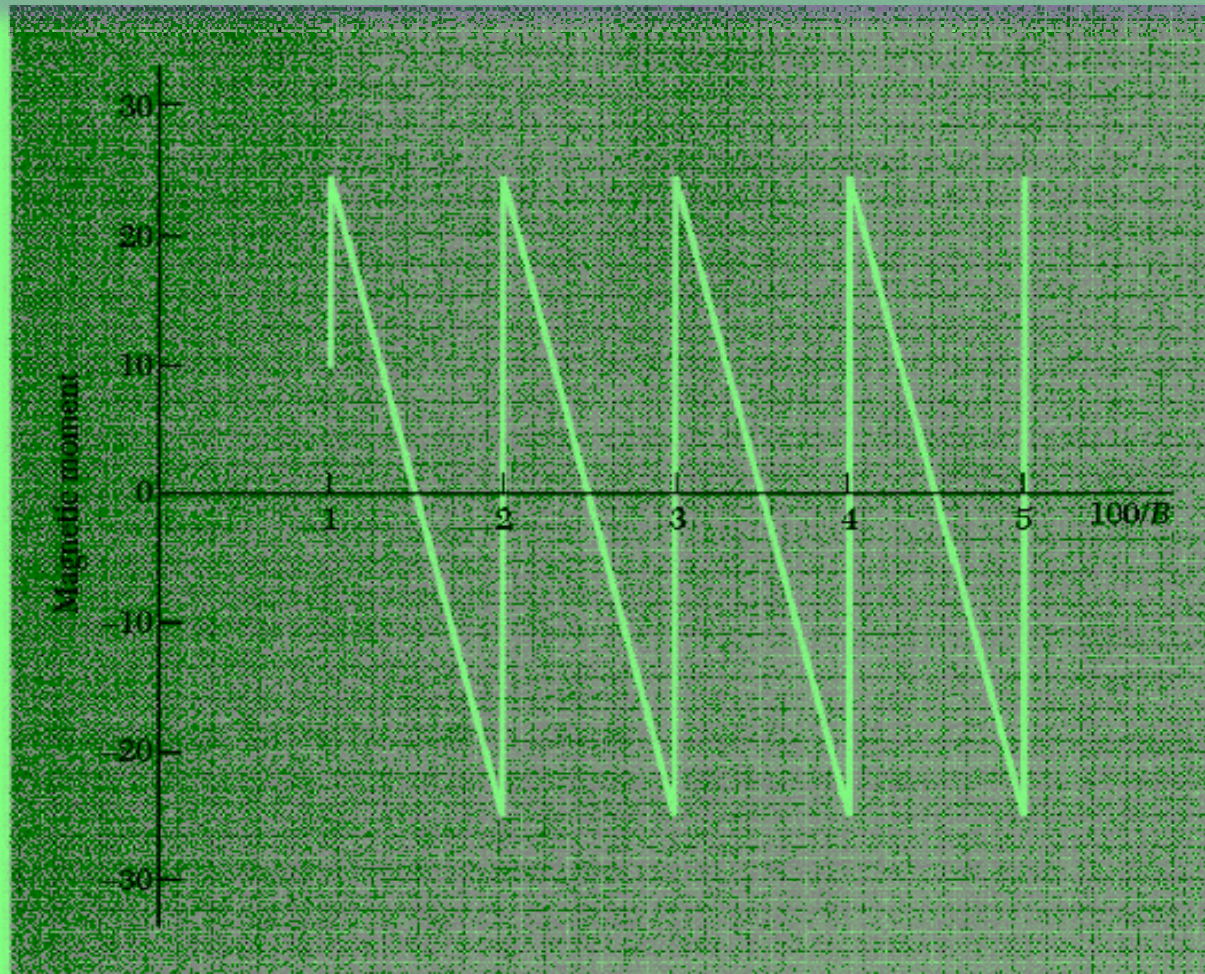
• حيث تمثل الكمية  $sD$  العدد الكلي للإلكترونات في المستويات المملوءة.  
• المجموع الكلي للطاقة لنظام مكون من  $N$  من الإلكترونات يمكن حسابه بجمع المعادلتين (35) و (36).

• يعطى العزم المغناطيسي  $\mu$  لنظام ما عند الصفر المطلق بالصورة:  $\mu = -\partial U / \partial B$   
والعزم هنا دالة متذبذبة في الكمية  $1/B$ . وهذا التذبذب للعزم المغناطيسي هو ما يسمى باثر دي-هاس-فان-ألفن.

من معادلة (31) يمكن توضيح أن التذبذب يحصل عند فترات متساوية من الكمية  $1/B$ .

$$\Delta \left[ \frac{1}{B} \right] = \frac{2\pi e}{\hbar c S} \quad (37)$$

## الفصل التاسع: أسطح فرمي والمعادن



**Figure 27** At absolute zero the magnetic moment is given by  $-\partial U/\partial B$ . The energy plotted in Fig. 26 leads to the magnetic moment shown here, an oscillatory function of  $1/B$ . In impure specimens the oscillations are smudged out in part because the energy levels are no longer sharply defined.

# الفصل التاسع: أسطح فرمي والمعادن

## De Haas-van Alphen Effect

## أثر دي هاس فان ألفن

- نلاحظ أن  $S$  الواردة في العلاقة الأخيرة هي رمز لمساحة سطح فرمي المتعامد مع المجال المغناطيسي.
- إذن بعمل القياسات الواردة في هذه العلاقة يمكن معرفة الكثير عن مساحة وشكل سطح فرمي.

## طبيعة وشكل سطح فرمي للنحاس

- تم تطبيق التقنيات المذكورة لدراسة سطح فرمي لعنصر النحاس. وتذكر أننا قلنا سابقا بأن كرة فرمي هي مجرد تقريب وألا فإن سطح فرمي قد يكون أعقد بكثير من مجرد سطح كروي.
- أن سطح فرمي في هذا الحالة يتكون من ثمانية نتوءات تشبه عنق الزجاجة يلامس كل منها أحد أسطح خلية الوحدة متمركزة الوجه المشكلة لمنطقة برلوين الأولى.
- أن تركيز الإلكترونات لهذه الشبكة هو:  $n = 4/a^3$  أي أنه يوجد 4 إلكترونات في خلية الوحدة المكعبة الشكل والتي حجمها  $a^3$
- نتذكر أنه للغاز الإلكتروني الحر لدينا:

$$N = \frac{V}{3\pi^2} k_F^3$$

# الفصل التاسع: أسطح فرمي والمعادن

## De Haas-van Alphen Effect

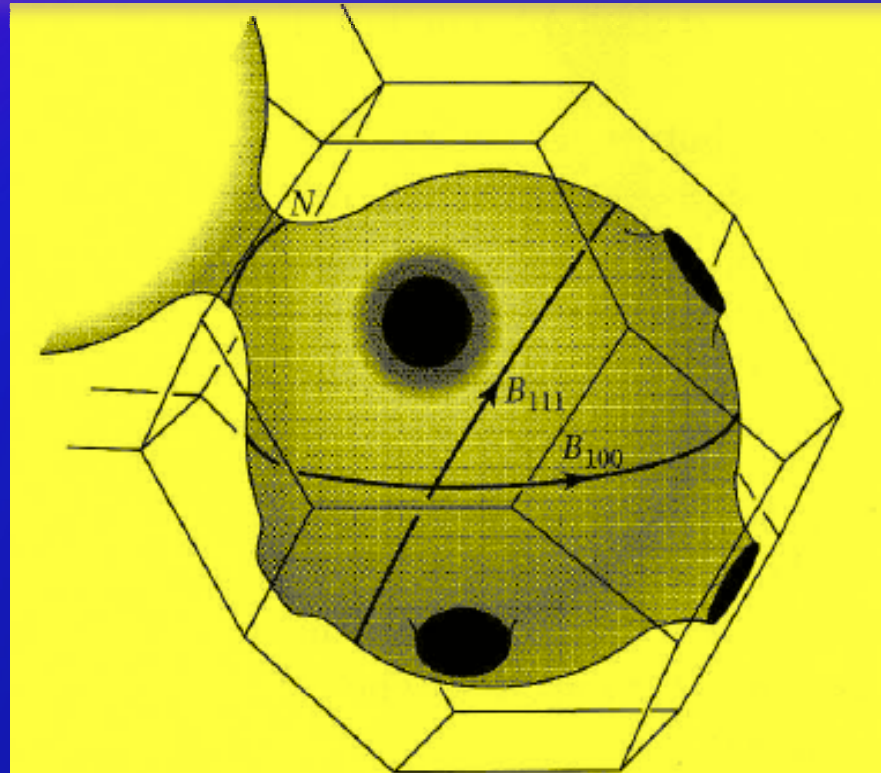
## أثر دي هاس فان ألفن

• وهي تقود إلى أن:

$$k_F = \left( \frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{1/3} = (3\pi^2 n)^{1/3} = \left( \frac{12\pi^2}{a^3} \right)^{1/3} \approx 4.9 / a$$

- وهو يمثل نصف قطر كرة فرمي للألكترون الحر تماما، مما يعني أن القطر يساوي ضعف هذه الكمية أي:  $9.8/a$ .
- هذه القيمة عندما تحسب للنحاس فأنها تبلغ:  $10.88/a$  وهي تختلف قليلا.
- يدل هذا الفرق البسيط بين النتيجةين أن سطح فرمي مقابل سطح منطقة برلوين يمتد قليلا مشكلا ما يشبه العنق لكي يلامس سطح الكرة سطح منطقة برلوين.

## الفصل التاسع: أسطح فرمي والمعادن



**Figure 29** Fermi surface of copper, after Pippard. The Brillouin zone of the fcc structure is the truncated octahedron derived in Chapter 2. The Fermi surface makes contact with the boundary at the center of the hexagonal faces of the zone, in the  $[111]$  directions in  $\mathbf{k}$  space. Two “belly” extremal orbits are shown, denoted by  $B$ ; the extremal “neck” orbit is denoted by  $N$ .