**الفصل الثالث**

**تطبيقات البرمجة الخطية**

**أهداف الفصل:**

بعد إتمام الفصل سيكون الطلاب قادرون على:

1. نمذجة مسائل مختلفة من مسائل البرمجة الخطية.
2. فهم التطبيقات الأساسية لمسائل البرمجة الخطية، في التسويق، في الإنتاج، في جدولة العمل، في مزج الوقود، في النقل، في التمويل، ومجالات أخرى.
3. اكتساب الخبرة في حل مسائل البرمجة الخطية باستخدام برنامج إكسل (ٍSolver)

الشكل التالي يوضح صندوق الحوار لـ Solver



الشكل التالي يوضح صندوق الحوار الذي بواسطته تضاف القيود



**العناوين الرئيسية في الفصل**

1. تطبيقات في التسويق
2. تطبيقات في التصنيع
3. تطبيقات في جدولة العمالة
4. تطبيقات في المالية
5. تطبيقات في مزج المكونات
6. تطبيقات في النقل

**مقدمة:**

يعتبر الأسلوب البياني في حل مسائل البرمجة الخطية أسلوباً مفيداً لفهم تشكيل وحل مسائل البرمجة الخطية الصغيرة.

**أولاً: تطبيقات في التسويق**

**انتقاء الوسيلة الإعلامية**

**مثال:**

خصصت إحدى الشركات مبلغاً قدره **8000** ريال في الأسبوع للإعلان. وزعت هذه المخصصات على أربع أنواع من الوسائل الإعلامية: التلفزيون، الجريدة(صحيفة)، الراديو1 ، الراديو2. تريد الشركة الوصول إلى أكبر عدد ممكن من الجمهور من خلال وسائل الإعلام المختلفة. يمثل الجدول التالي عدد الزبائن الذين يمكن الوصول إليهم عن طريق الإعلانات في وسائل الإعلام المختلفة وكذلك تكلفة الإعلان الواحد و العدد الأعظمي من الإعلانات التي يمكن شراؤها بحسب كل وسيلة من وسائل الإعلام.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| الوسيلة | الجمهور الذي يمكن الوصول إليه في الإعلان الواحد | كلفة الإعلان الواحد | العدد الأعظمي من الإعلانات في الأسبوع الواحد |
| التلفزيون (دقيقة واحدة) | 5000 | 800 | 12 |
| الجريدة اليومية (صفحة كاملة) | 8500 | 925 | 5 |
| الراديو 1 (30 ثانية) | 2400 | 290 | 25 |
| الراديو 2 (دقيقة واحدة) | 2800 | 380 | 20 |

تتطلب ترتيبات الشركة أن يكون هناك **خمس** إعلانات في الراديو على الأقل أسبوعيا وأن لايتجاوز الإنفاق على الإعلان في الراديو 1800 ريال في الأسبوع.

ومن أجل أن نحل المسألة عن طريق البرمجة الخطية، فإن الخطوة الأولى هي الفهم الجيد للمسألة من خلال طرح بعض الأسئلة مثل: ماذا يحدث إذا استخدمنا 5 إعلانات من كل نوع؟ ماهي كلفة ذلك؟ كم شخص ستصل إليه الإعلانات؟ وحالما نفهم المسألة جيداً يمكننا وضع الهدف و القيود:

**لنعرف أولاً متغيرات المسألة.**

X1 = عدد الإعلانات اسبوعياً في التلفزيون التي مدتها دقيقة واحدة

X2 = عدد الإعلانات اسبوعياً في الجريدة (الصحيفة) اليومية كل منها صفحة كاملة.

X3 = عدد الإعلانات اسبوعياً في الراديو 1 التي مدة كل منها 30 ثانية

X4 = عدد الإعلانات اسبوعياً في الراديو 2 التي مدة كل منها دقيقة واحدة

والآن نكتب التعبير الرياضي للهدف والقيود:

أكبر تغطية إعلامية ممكنة = 5000 X1 + 8500 X2 + 2400 X3 + 2800 X4

X1  12

X2  5

X3  25

X4  20

800 X1 + 925 X2 + 290 X3 + 380 X4  8000

X3 + X4  5

290 X3 + 380 X4  1800

X1، X2، X3، X4  0

يمكن حل هذه المسألة عن طريق برنامج إكسل باستخدام (Solver) كما يلي:

المدخلات في صفحة إكسل قبل الحل:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | C | D | E | F | G | H |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 | نوع وسيلة الإعلام | تلفزيون | صحيفة | راديو1 | راديو2 |  |  |  |
| 4 | المتغيرات | X1 | X2 | X3 | X4 |  |  |  |
| 5 | الحل | 1 | 1 | 1 | 1 | الجمهور الكلي |  |  |
| 6 | عدد الجمهور للإعلان الواحد | 5000 | 8500 | 2400 | 2800 | 18700 |  |  |
| 7 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 8 | القيود |  |  |  |  |  |  |  |
| 9 | إعلانات التلفزيون | 1 |  |  |  | 1 | <= | 12 |
| 10 | إعلانات الصحيفة |  | 1 |  |  | 1 | <= | 5 |
| 11 | راديو1 |  |  | 1 |  | 1 | <= | 25 |
| 12 | راديو2 |  |  |  | 1 | 1 | <= | 20 |
| 13 | التكلفة | 800 | 925 | 290 | 380 | 2395 | <= | 8000 |
| 14 | تكلفة إعلانات الراديو(1+2) |  |  | 290 | 380 | 670 | <= | 1800 |
| 15 | إعلانات الراديو(1 +2) |  |  | 1 | 1 | 2 | >= | 5 |

الدالة التي نضعها في الخلية F6 هي:

=B5\*B6+C5\*C6+D5\*D6+E5\*E6 أو =SUMPRODUCT(B5:E5,B6:E6)

الدالة التي نضعها في الخلية F9 هي: =B5\*B9 ، الدالة التي نضعها في الخلية F10 هي: =C5\*C9

الدالة التي نضعها في الخلية F11 هي: =D5\*D9 ، الدالة التي نضعها في الخلية F12 هي: =E5\*C9

الدالة التي نضعها في الخلية F13 هي:

=B5\*B13+C5\*C13+D5\*D13+E5\*E13

الدالة التي نضعها في الخلية F14 هي:

= D5\*D14+E5\*E14

الدالة التي نضعها في الخلية F15 هي:

= D5\*D15+E5\*E15

ثم نستخدم Solver : نضع الماوس على الخلية F6 بحيث تظهر في صندوق Set Objective ثم نختار Max ثم نضع الماوس على الخلايا الأربعة من B5 إلى B6 بحيث تظهر B5:E5 في صندوق By Changing cells: ثم نذهب إلى Subject to the Constraints نضغط على Add لكي نضع الشروط. نضع الماوس على الخلايا الستة من F9 إلى F14 ثم <= ثم نضع الماوس على الخلايا من H9 إلى H14، ثم نضع الماوس على الخلية F15 ثم >= ثم نضع الماوس على الخلية H15 بحيث تظهر الصيغتين:

F9:F14<=H9:H14 B5:E5

F15>=H15

ثم ننتقل إلى Select a Solving Method ونسدل القائمة ونختار Simplex LP ثم نختار أن تكون المتغيرات غير سلبية: Make Variable Non-Negative

ثم نضغط على Solve

المخرجات في صفحة إكسل بعد الحل:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | C | D | E | F | G | H |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  | تلفزيون | صحيفة | راديو1 | راديو2 |  |  |  |
| 4 | المتغيرات | X1 | X2 | X3 | X4 |  |  |  |
| 5 | الحل | 1.97 | 5 | 6.21 | 0 | الجمهور الكلي |  |  |
| 6 | عدد الجمهور للإعلان الواحد | 5000 | 8500 | 2400 | 2800 | 67240.3 |  |  |
| 7 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 8 | القيود |  |  |  |  |  |  |  |
| 9 | إعلانات التلفزيون | 1 |  |  |  | 1.96875 | <= | 12 |
| 10 | إعلانات الصحيفة |  | 1 |  |  | 5 | <= | 5 |
| 11 | راديو1 |  |  | 1 |  | 6.206897 | <= | 25 |
| 12 | راديو2 |  |  |  | 1 | 0 | <= | 20 |
| 13 | التكلفة | 800 | 925 | 290 | 380 | 8000 | <= | 8000 |
| 14 | تكلفة إعلانات الراديو (1+2) |  |  | 290 | 380 | 1800 | <= | 1800 |
| 15 | إعلانات الراديو(1 + 2) |  |  | 1 | 1 | 6.206897 | >= | 5 |

X1 = 1.97 (عدد الإعلانات أسبوعياً في التلفزيون مدة كل منها دقيقة واحدة)

X2 = 5 (عدد الإعلانات أسبوعياً في الجريدة اليومية كل منها صفحة كاملة)

X3 = 6.2 (عدد الإعلانات أسبوعياً في الراديو 1 مدة كل منها 30 ثانية)

X4 = 0 (عدد الإعلانات أسبوعياً في الراديو 2 مدة كل منها دقيقة واحدة)

النتيجة أن عدد الجمهور الذين يمكن الوصول إليهم عن طريق الإعلانات هو 67240.

**تطبيقات في جدولة العمالة**

**تخطيط العمالة**

تستخدم المصارف الكبرى البرمجة الخطية بشكل متكرر لمعالجة مسائل جدولة العمالة.

تعالج مسائل تخطيط العمالة احتياجات التوظيف خلال فترة زمنية معينة. يحتاج أحد المصارف من 10 إلى 18 صرافاً بحسب أوقات النهار. الجدول التالي يشير إلى العدد اللازم من الصرافين بحسب التوقيت:

|  |  |
| --- | --- |
| **التوقيت** | **عدد الصرافين** |
| 9 – 10  10 – 11  11 – 12  12 – 13  13 – 14  14 – 15  15 – 16  16 - 17 | 10  12  14  16  18  17  15  10 |

يستخدم المصرف حالياً 12 صرافاً بدوام كامل. ويمكن للمصرف أن يستخدم صرافين بدوام جزئي.

بحسب سياسة الشركة، **الحد الأعظمي للعمل الجزئي هو 50% من الدوام الكامل**. يتقاضى موظفو العمل الجزئي 8 دولارات في الساعة (32 دولاراً في اليوم) وسطياً بينما يتقاضى موظفو الدوام الكامل 100 دولاراً في اليوم وسطياً. يرغب المصرف أن يضع جدولاً يقلل التكلفة الكلية للتوظيف. سيسرح المصرف واحداً أو أكثر من الصرافين من ذوي الدوام الكامل إذا كان ذلك مربحأً.

لكي نحل هذه المسألة بأسلوب البرمجة الخطية، فإن الهدف هو تقليل التكلفة. هناك قيد على عدد الصرافين لكل ساعة من ساعات النهار بحيث لايقل عدد الصرفين عن العدد المذكور في الجدول أعلاه. هذا يعني وجود 8 قيود بعدد ساعات العمل اليومية. وهناك قيد آخر يحد من العدد الكلي للصرافين من ذوي الدوام الكامل (أن لايتجاوز عددهم 12). القيد الأخير أن لاتتجاوز ساعات عمل الذين يعملون جزئياً الـ 50% من الدوام الكامل.

لنعرف متغيرات المسألة:

ك = عدد الصرافين من ذوي الدوام الكامل من الساعة 9 حتى الساعة 17

ج1 = عدد الصرافين من ذوي الدوام الجزئي الذين يعملون من الساعة 9 حتى الساعة 13

ج2 = عدد الصرافين من ذوي الدوام الجزئي الذين يعملون من الساعة 10 حتى الساعة 14

ج3 = عدد الصرافين من ذوي الدوام الجزئي الذين يعملون من الساعة 11 حتى الساعة 15

ج4 = عدد الصرافين من ذوي الدوام الجزئي الذين يعملون من الساعة 12 حتى الساعة 16

ج5 = عدد الصرافين من ذوي الدوام الجزئي الذين يعملون من الساعة 13 حتى الساعة 17

تابع الهدف:

تقليل تكلفة التوظيف (العمالة) = 100 ك + 32 (ج1 + ج2 + ج3 + ج4 + ج5)

القيود:

(من الساعة 9 حتى الساعة 10) ك + ج1  10 (عدد الصرافين كامل وجزئي)

(من الساعة 10 حتى الساعة 11) ك + ج1 + ج2  12

(من الساعة 11 حتى الساعة 12) 0.5ك + ج1 + ج2 + ج3  14

(من الساعة 12 حتى الساعة 13) 0.5 ك + ج1 + ج2 + ج3 + ج4  16

(من الساعة 13 حتى الساعة 14) ك + ج2 + ج3 + ج4 + ج5  18

(من الساعة 14 حتى الساعة 15) ك + ج3 + ج4 + ج5  17

(من الساعة 15 حتى الساعة 16) ك + ج4 + ج5  15

(من الساعة 16 حتى الساعة 17) ك + ج5  10

المتاح من العمل الكامل (دوام كامل) 12 صراف فقط:

ك  12

ساعات عمل الصرافين من ذوي العمل الجزئي لايمكن أن يتجاوز 50% من ساعات العمل الكلية للصرافين:

4(ج1 + ج2 + ج3 + ج4 + ج5)  0.50(10 + 12+ 14+ 16 +18 + 17+ 15 +10)

4(ج1 + ج2 + ج3 + ج4 + ج5)  0.50(112)

ك، ج1، ج2، ج3، ج4، ج5  0

يمكن حل هذه المسألة عن طريق برنامج إكسل (Solver) كمايلي:

نضع الماوس على الخلية H6 بحيث تظهر في صندوق Set Objective ثم نختار Min

الدالة التي نضعها في الخلية H6 هي:

=B5\*B6+C5\*C6+D5\*D6+E5\*E6+F5\*F6+G5\*G6 أو =SUMPRODUCT(B5:G5,B6:G6)

ويمكن أن ننسخ الدالة التي كتبناها في الخاية F6 في الخلايا التي تحتها من H9 إلى H18 ولاننسى آلية التثبيت عن طريق علامة $.

المدخلات في صفحة إكسل قبل الحل:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
| 1 | مثال عن تخطيط العمالة |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4 | المتغيرات | ك | ج1 | ج2 | ج3 | ج4 | ج5 |  |  |  |
| 5 | القيم | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | التكلفة الكلية |  |  |
| 6 | التكلفة | 100 | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 | 260 |  |  |
| 7 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 8 | القيود |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 9 | 9 - 10 | 1 | 1 |  |  |  |  | 2 | >= | 10 |
| 10 | 10 - 11 | 1 | 1 | 1 |  |  |  | 3 | >= | 12 |
| 11 | 11 - 12 | 0.5 | 1 | 1 | 1 |  |  | 3.5 | >= | 14 |
| 12 | 12 - 13 | 0.5 | 1 | 1 | 1 | 1 |  | 4.5 | >= | 16 |
| 13 | 13 - 14 | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | >= | 18 |
| 14 | 14 - 15 | 1 |  |  | 1 | 1 | 1 | 4 | >= | 17 |
| 15 | 15 - 16 | 1 |  |  |  | 1 | 1 | 3 | >= | 15 |
| 16 | 16 - 17 | 1 |  |  |  |  | 1 | 2 | >= | 10 |
| 17 | العدد الأكبر للدوام الكامل | 1 |  |  |  |  |  | 1 | <= | 12 |
| 18 | العدد الكلي للساعات |  | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 20 | <= | 56 |

قبل الانتقال إلى الحل وبعد استدعاء Solver نقوم بنفس الخطوات التي قمنا بها في المسألة السابقة ونضع مايلي:

H6 مقابل Set Objective

B5:G5 مقابل By Changing Cells

الشورط تحت Subject to Constraints هي:

H9:H16>=J9:J16

H17:H18<=J17:J18

Solving Method: Simplex LP

Make Variables Non-Negative

المخرجات في صفحة إكسل بعد الحل:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
| 1 | مثال عن تخطيط العمالة |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4 | المتغيرات | ك | ج1 | ج2 | ج3 | ج4 | ج5 |  |  |  |
| 5 | القيم | 10 | 0 | 7 | 2 | 5 | 0 | التكلفة الكلية |  |  |
| 6 | التكلفة | 100 | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 | 1448 |  |  |
| 7 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 8 | القيود |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 9 | 9 - 10 | 1 | 1 |  |  |  |  | 10 | >= | 10 |
| 10 | 10 - 11 | 1 | 1 | 1 |  |  |  | 17 | >= | 12 |
| 11 | 11 - 12 | 0.5 | 1 | 1 | 1 |  |  | 14 | >= | 14 |
| 12 | 12 - 13 | 0.5 | 1 | 1 | 1 | 1 |  | 19 | >= | 16 |
| 13 | 13 - 14 | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 24 | >= | 18 |
| 14 | 14 - 15 | 1 |  |  | 1 | 1 | 1 | 17 | >= | 17 |
| 15 | 15 - 16 | 1 |  |  |  | 1 | 1 | 15 | >= | 15 |
| 16 | 16 - 17 | 1 |  |  |  |  | 1 | 10 | >= | 10 |
| 17 | العدد الأكبر للدوام الكامل | 1 |  |  |  |  |  | 10 | <= | 12 |
| 18 | العدد الكلي للساعات |  | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 56 | <= | 56 |

الحل هو 10 صرافين دوام كامل في الساعة الأولى و 17 صرافاً 7 منهم دوام جزئي في الساعة الثانية، و 14 صرافاً 9 منهم دوام جزئي في الساعة الثالثة، و 19 صرافاً 13 منهم دوام جزئي في الساعة الرابعة، و 24 صرافاً 14 منهم دوام جزئي في الساعة الخامسة، و 17 صرافاً 7 منهم دوام جزئي في الساعة السادسة، و 15 صرافاً 5 منهم دوام جزئي في الساعة السابعة، و 10 صرافين 7 بدوام كامل الساعة الثامنة. عدد الصرافين من ذوي الدوام الكامل 10. عدد ساعات الدوام للصرافين من ذوي الدوام الجزئي: 56 ساعة. بتكلفة قدرها 1448 ريالاً.

**تطبيقات في المالية**

**اختيار المحفظة**

هناك مسألة تواجه المدراء بشكل مستمر في المؤسسات المصرفية أو في شركات التأمين أوالمؤسسات الاستثمارية بشكل عام وهي اختيار الاستثمارات من بين تنوع واسع من البدائل. إن هدف مدراء الاستثمار في المؤسسات الاستثمارية هو تعظيم الربح.

**مثال**

تستثمر إحدى الشركات في الائتمان التجاري القصير الأجل وفي سندات الشركات وأسهم الذهب وقروض البناء. لدى الشركة 5 ملايين ريال وتريد (1) أن تحصل على أكبر ربح ممكن خلال الستة أشهر القادمة. (2) أن يكون تنوع الاستثمار بحسب قرار مجلس الإدارة. الجدول التالي يبين إمكانيات الاستثمار:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **الاستثمار** | **العائد** | **الحد الأعلى للاستثمار** |
| الائتمان التجاري | 7% | 1 |
| سندات الشركات | 11% | 2.5 |
| أسهم الذهب | 19% | 1.5 |
| قروض البناء (التشييد) | 15% | 1.8 |

خصص مجلس الإدارة 55% كحد أعلى من الاستثمار في أسهم الذهب و قروض البناء و 15% كحد أدنى للاستثمار في الائتمان التجاري.

لحل هذه المسألة بأسلوب البرمجة الخطية، فإن الهدف هو تعظيم العائد. هناك 4 قيود منفصلة تحد الاستثمار في كل خيار من خيارات الاستثمار بحسب الحد الأعلى الموجود في الجدول أعلاه.

المتغيرات:

X1 = المبلغ المستثمر في الائتمان التجاري

X2 = المبلغ المستثمر في سندات الشركات

X3 = المبلغ المستثمر في أسهم الذهب

X4 = المبلغ المستثمر في قروض البناء

المبلغ الكلي للاستثمار = X1 + X2 + X3 + X4

شكِّل تابع الهدف ثم شكِّل القيود واوجد الحل باستخدام Solver في برنامج إكسل.