

الفصل الثالث

جملة الدفعات المتساوية المؤكدة بفائدة بسيطة

Certain Annuities in Simple Interest

الفصل الثالث

الدفعات المتساوية المؤكدة بفائدة بسيطة

Certain Annuities in Simple Interest

أولاً: المفاهيم الأساسية للدفعات المتساوية المؤكدة بفائدة بسيطة

انصبت دراستنا في الفصول السالفة على التعامل مع مبلغ واحد لا يتكرر دفعه (أو مبالغ مختلفة لا يتكرر دفعها) لإيجاد جملته أو قيمته الحالية أما إذا تكرر المبلغ بنفس القيمة وعلى فترات منتظمة (كل شهر أو شهرين أو ثلاثة الخ) فإنه يطلق على هذه المبالغ المتكررة بالدفعات المنتظمة على سبيل المثال المبالغ التي يدخرها الطالب من مصروفه الشهري (١٠ جنيهات مثلاً) في آخر كل شهر تعتبر دفعات منتظمة لأن الفترات الزمنية بين كل مبلغ وآخر هي فترات زمنية متساوية. من ثم وقبل تحديد كيفية إيجاد جملة الدفعات أو القيمة الحالية لها ينبغي أن نبين ماهية الدفعة وما هي أنواعها كما يتجلى لنا فيما يلي:

١- تعريف الدفعة

هي عبارة عن مجموعة مبالغ متساوي تدفع على فترات زمنية متساوية. وتجدر الإشارة بأنه إذا كانت مبالغ الدفعات متساوية فإنه يطلق عليها دفعات منتظمة ذات مبالغ متساوية.

٢- أنواع الدفعات

تقسم الدفعات بصفة رئيسية الى نوعين هما:

أولاً: الدفعات الاحتمالية:

وهي عبارة عن مبالغ متساوية يتوقف دفعها على وقوع حادث معين لذا قد يطلق عليها "دفعات شرطية" ومن ثم فإن عدد هذه الدفعات يتوقف على ظروف الشرط المتعلق بها ، مثال ذلك "دفعات المعاش" التي يحصل عليها الشخص طالما كان على قيد الحياة

الفصل الثالث: الدفعات المتساوية المؤكدة بفائدة بسيطة

فاذا توفى فيتوقف الدفع لهذا نجد أن هذه الدفعات مشروطة بحياة الشخص ويتم دراسة هذه الدفعات بتوسع في مادة رياضيات التأمين.

ثانياً: الدفعات المؤكدة:

هى عبارة عن مبالغ متساوية لا يتوقف دفعها على وقوع حادث معين لذا فيطلق عليها "دفعات مؤكدة" مثال ذلك التزام شخص بدفع أقساط شراء سيارة أو ثلاجة أو منزل الخ فهذه الأقساط يلتزم الشخص بسدادها اذا كان على قيد الحياة حتى نهاية مدة السداد أو الورثة من بعده فى حالة وفاته.

وسوف تقتصر دراستنا على الدفعات المؤكدة التى تنقسم الى نوعين هما:

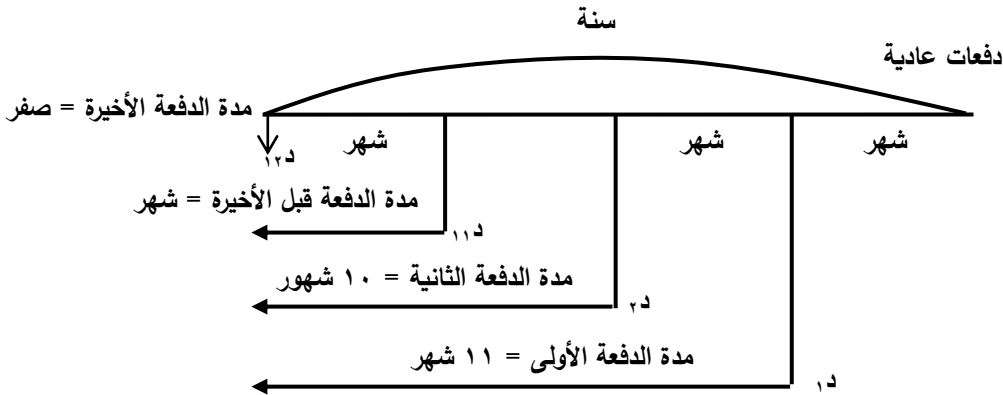
(أ) دفعات متساوية عادية:

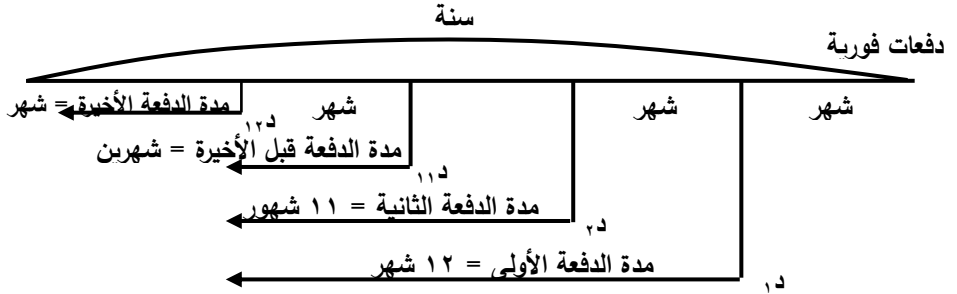
وهى التى تدفع فى آخر كل فترة زمنية ويطلق عليها "دفعات سداد" لأنها عادة تدفع لسداد دين أو استهلاك قرض.

(ب) دفعات متساوية فورية:

وهى التى تدفع فى أول كل فترة زمنية ويطلق عليها "دفعات استثمار" لأنها تقطع عادة من المرتب أو الدخل فى أول كل فترة زمنية وتودع فى البنك أو صندوق التوفير بغرض رئيسى هو الاستثمار وتكوين رأس المال.

مما سبق يمكننا تصور الدفعات بنوعيها على الرسوم التالية:





والجدير بالذكر أن الرسم السابقة توضح شكل كل من الدفعات العادية والفورية حيث يتبين الآتى:

١- أن مبالغ الدفعات عبارة عن مبالغ متساوية تدفع فى أول أو آخر كل فترة زمنية ويرمز لها بالرمز "د"

٢- أن مدد الدفعات هى الفترات الزمنية المتساوية التى تفصل كل دفعه عن التى تليها وتختلف باختلاف المدة المتفق عليها فقد تكون شهر كما فى الرسمين السابقين أو ربع سنوية أو ٦ شهور ... الخ كما أن مدة الدفعة الأولى ومدة الدفعة الأخيرة تختلف فى الدفعات المتساوية العادية عنها فى الفورية.

لهذا اذا أردنا أن نحسب مدد الدفعات فيجدر الإشارة بنا أن نقول أن مدد الدفعات سواء كانت عادية أو فورية تتناقص بمقدار فترة زمنية واحدة فضلاً عن أن عدد الدفعات محدود.

من ثم نلاحظ أن مدد الدفعات تمثل متوالية عددية.

حدها الأول = مدة الدفعة الأولى

حدها الأخير - مدة الدفعة الأخيرة

عدد الحدود = عدد الدفعات

وعلى ذلك فإن حساب مجموع مدد الدفعات يتم باستخدام قانون "مجموع المتوالية العددية" كما يلي:

الفصل الثالث: الدفعات المتساوية المؤكدة بفائدة بسيطة

أ- في حالة الدفعات العادية والتي مدتها شهر (أنظر الرسم)

$$\text{مجموع مدد الدفعات العادية} = \frac{12(11 + \text{صفر})}{2} = ٦٦ \text{ شهراً} = \frac{66}{12} \text{ سنة}$$

$$\text{حيث مجموع المتوالية العددية} = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})$$

ب- في حالة الدفعات الفورية والتي مدتها شهر (أنظر الرسم)

$$\text{مجموع مدد الدفعات العادية} = \frac{12(1 + 12)}{2} = ٧٨ \text{ شهراً} = \frac{78}{12} \text{ سنة}$$

$$\text{حيث مجموع المتوالية العددية} = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})$$

٣- جملة الدفعات المتساوية المؤكدة بفائدة بسيطة

قبل تحديد جملة الدفعات ينبغي تحديد المعالجة الرياضية لحساب فوائد الدفعات كما يتبين لنا فيما يلي.

١- المعالجة الرياضية لكيفية حساب فوائد الدفعات

بفرض أن مبلغ الدفعة يرمز له بالرمز "د"

وأن مدد الدفعات بالشهور يرمز لها بالرمز ش_١ ، ش_٢ ، ش_ن على التوالي

ومعدل الفائدة البسيطة المئوى يرمز له بالرمز "ع"

وعدد الدفعات يرمز له بالرمز "ن" فإن:

$$\text{مجموع فوائد الدفعات} = \left(\frac{1 \times \text{ش} \times \text{د} \times \text{ع}}{12} + \frac{2 \times \text{ش} \times \text{د} \times \text{ع}}{12} + \dots + \frac{\text{د} \times \text{ع} \times \text{ش} \times \text{ن}}{12} \right)$$

$$= \text{د} \times \text{ع} \times \left(\frac{1 + 2 + \dots + \text{ش} \times \text{ن}}{12} \right)$$

وحيث أن الكمية بين القوسين تمثل متوالية عددية عدد حدودها "ن"

$$\text{مجموع فوائد الدفعات} = \sum_{j=1}^n \text{ف}_j$$

(١)

$$\text{قيمة الدفعة} \times \text{المعدل} \times \frac{\text{عدد الدفعات}}{2} \times \frac{\text{مدة الدفعة الأولى} + \text{مدة الدفعة الأخيرة}}{12}$$

وينوه المؤلف بأنه إذا كانت مدد الدفعات بالأيام فينبغى القسمة على ٣٦٠ بدلاً من (إذا كانت المدة بالشهور)

ب- حساب جملة الدفعات المتساوية بفائدة بسيطة

حيث أن جملة أى مبلغ تساوى المبلغ مضافاً اليه فائدته لذا فإنه يمكن القول أن جملة الدفعات المتساوية بفائدة بسيطة ما هى الا مجموع الدفعات مضافاً اليها مجموع فوائدها. وحيث أن الدفعات متساوية القيمة من ناحية وعددها محدود من ناحية أخرى فإن مجموعها يمكن الحصول عليه بضرب مبلغ الدفعة × عدد مرات دفعها لذا فإن:

جملة الدفعات المتساوية = مجموع الدفعات + مجموع فوائد هذه الدفعات

= مبلغ الدفعة × عدد الدفعات + مبلغ الدفعة × المعدل × مجموع مدد الدفعات السنوية

أى أن:

$$(٢) \quad \sum_{j=1}^n d + n \times d \times \frac{ش+1}{12} \times \frac{n}{2} \times ع = \sum_{j=1}^n d + n \times d \times ف$$

والجدير بالذكر أن المعادلة (٢) تحتوى على عدة عناصر اذا علمت كل العناصر ما عدا عنصر مجهول فإنه يمكننا بالتعويض بالعناصر المعلومة فى المعادلة حساب العنصر المجهور سواء كان ذلك العنصر مبلغ الدفعة أو معدل الفائدة أو عدد الدفعات أو مدة الدفعة.

فضلاً عن ذلك يمكن القول أن المعادلة (٢) تمكننا من حساب جملة الدفعات أيضاً كان التاريخ المزمع حساب الجملة فيه (نهاية مدة السداد أو الايداع أو تاريخ لاحق على نهاية تلك المدة).

مثال ١

أودع أحد موظفي جامعة طنطا مبلغ ٣٠ جنية شهرياً في أحد البنوك - فإذا علمت أن البنك يحسب فوائد الاستثمار بمعدل فائدة بسيطة ١١٪ فاحسب جملة ما يصير لذلك الموظف في البنك في نهاية ١٨ شهراً في هاتين الحالتين.

أ- إذا كان يودع في أول كل شهر

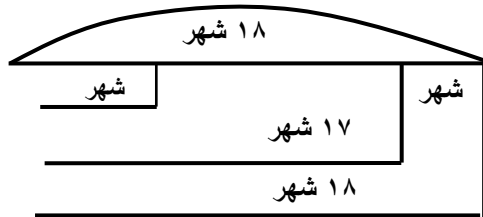
ب- إذا كان يودع في آخر كل شهر (ثم قارن بين الحالتين)

الحل

أولاً: إذا كان الايداع في أول كل شهر (الدفعة الفورية)

جملة الدفعات = مبلغ الدفعة × عدد الدفعات + مبلغ الدفعة × المعدل × مجموع مدد الدفعات بالسنوات

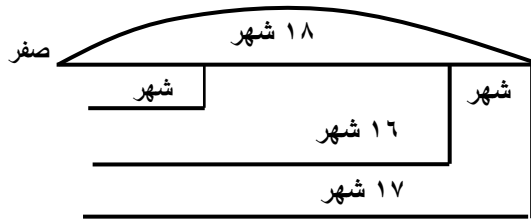
$$\sum_{r=1}^n F = د \times ن + د \times ع \times \frac{ن}{2} \times \frac{ش1+شن}{12}$$



جملة ما يصير للموظف إذا كان يودع في أول الشهر

$$= ٣٠ \times ١٨ + ٣٠ \times \frac{١١}{100} \times \frac{١+١٨}{2} \times \frac{١٨}{12} = ٥٨٧,٠٢٥ \text{ جنية}$$

ثانياً: إذا كان الايداع في آخر الشهر (الدفعة عادية)



جملة ما يصير للموظف إذا كان يودع في آخر الشهر

$$٥٨٢,٠٢٥ = \frac{17 + \text{صفر}}{12} \times \frac{18}{2} \times \frac{11}{100} \times ٣٠ \times ١٨ \times ٣٠ =$$

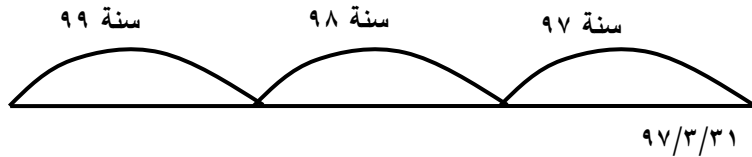
بمقارنة الجملتين معاً نجد أن الجملة فى حالة الدفعات الفورية أكبر منها فى حالة الدفعات العادية وهذا يعزى الى أن الدفعة الأولى فى الدفعات الفورية استثمرت لمدة ١٨ شهراً والثانية ١٧ شهراً وهكذا حتى الدفعة الأخيرة فقد استثمرت شهراً أما فى حالة الدفعات العادية فان الدفعة الأولى استثمرت فقط ١٧ شهراً والثانية ١٦ شهراً وهكذا حتى الدفعة الأخيرة فلم تستثمر على الاطلاق ولذا تنقص فوائد الدفعات العادية عن الدفعات الفورية.

مثال ٢

موظف يريد أن يشتري شقة سكنية فى عمارة ينتهى تشطيبها فى نهاية سنة ١٩٩٩ فاذا علمت أن ثمن هذه الشقة فى نهاية العام المذكور يبلغ ٢٥٠٠٠ جنية وسيدفع الموظف نقداً ١٨٠٠٠ جنيهاً فاذا علمت أن الموظف يريد أن يودع فى بنك الدلتا مبلغاً متساوياً من مرتبه الشهرى اعتباراً من آخر مارس ١٩٩٧ وحتى تاريخ التشطيب بحيث يتمكن من سداد بقية ثمن الشقة فى الموعد المقرر فى نهاية ١٩٩٩. المطلوب حساب مبلغ الدفعة التى يجب أن يودعها الموظف اذا كان البنك يحسب الفوائد البسيطة بمعدل ١٢٪.

الحل

المبلغ الباقي من ثمن الشقة = ٢٥٠٠٠ - ١٨٠٠٠ = ٧٠٠٠ جنية = جملة الدفعات



$$\sum_{r=1}^n \text{ف}_r = \text{د} \times \text{ن} + \text{ع} \times \frac{\text{ن}}{2} \times \frac{\text{ش}+1}{12}$$

$$٧٠٠٠ = \text{د} \times ٣٤ + \text{د} \times \frac{12}{100} \times \frac{34}{2} \times \frac{33 + \text{صفر}}{12} = ٣٤ \text{ د} + ٣٩,٦١$$

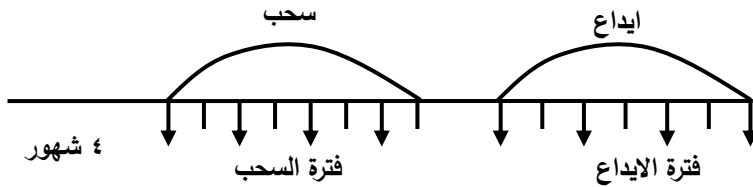
الفصل الثالث: الدفعات المتساوية المؤكدة بفائدة بسيطة

$$د = \frac{7000}{39.61} = 176,723 \text{ جنية أى أن مبلغ الدفعة} = 176,723 \text{ جنية}$$

مثال ٣

أودع شخص فى أحد البنوك مبلغاً قدره ١٠٠ جنية فى أول كل شهر من الشهور الأربعة لعام ١٩٩٦ ثم قام بسحب مبلغاً قدره ٥٠ جنيهاً فى آخر كل شهر من الشهور الأربعة التالية.

فالمطلوب حساب رصيد هذا الشخص فى نهاية العام المذكور اذا كان معدل الفائدة البسيطة ٣٪ سنوياً.



أولاً: جملة دفعات الإيداع

$$\sum_{r=1}^n F_r = D \times n + E \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{12}$$

عدد دفعات الإيداع = ٤ دفعات

مدة الأولى = المدة كلها ١٢ شهراً

الدفعة الأخيرة = ٩ شهور

$$\text{جملة الإيداع} = 4 \times 100 + 9 \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{100} \times 100 = 410,5 \text{ جنية}$$

ثانياً: جملة دفعات السحب

عدد دفعات السحب = ٤ دفعات

مدة الدفعة الأولى = ٧ شهور

الدفعة الأخيرة = ٤ شهور

$$\text{جملة دفعات السحب} = 4 \times 50 + 7 \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{100} \times 50 = 202,75 \text{ جنية}$$

رصيد الشخص فى نهاية ١٩٩٦ = ٤١٠,٥ - ٢٠٢,٧٥ = ٢٠٧,٧٥ جنية

مثال ٤

قام شخص بايداع ٣٠٠ جنية فى أول ومنتصف كل شهر من شهور سنة ١٩٩٥ وكان يسحب ٥٠ جنية يوم ٢٠ من كل شهر من شهور نفس العام وفى آخر العاد وجد المستحق له عند البنك ٦٨٥٢,٤٥٨ جنيهاً فاحسب معدل الفائدة البسيطة باعتبار أن الشهر ٣٠ يوماً.

الحل

عدد دفعات الايداع = ٢٤ دفعة

مدة الدفعة الأولى = ١٢ شهراً

مدة الدفعة الأخيرة = ١/٢ شهر

$$\text{جملة الايداع} = \frac{\frac{1}{2} + 12}{12} \times \frac{24}{2} \times ع \times ٣٠٠ + ٢٤ \times ٣٠٠ = ٣٧٥٠ + ٧٢٠٠ =$$

ثانياً: جملة دفعات السحب

عدد دفعات السحب = ١٢ دفعة

مدة الدفعة الأولى = ١١ ١/٣ شهر

الدفعة الأخيرة = ١/٣ شهر

$$\text{جملة دفعات السحب} = \frac{\frac{1}{3} + 11\frac{1}{3}}{12} \times \frac{24}{2} \times ع \times ٥٠ + ١٢ \times ٥٠ = ٢٩١,٦٧ + ٦٠٠ =$$

$$(٢٩١,٦٧ + ٦٠٠) - (٣٧٥٠ + ٧٢٠٠) = ٦٨٥٢,٤٥٨$$

$$٣٤٥٨,٣٣ + ٦٦٠٠٠ =$$

$$ع = ٠,٠٧٣ \text{ (أى أن معدل الفائدة البسيطة } = ٧,٣\%)$$

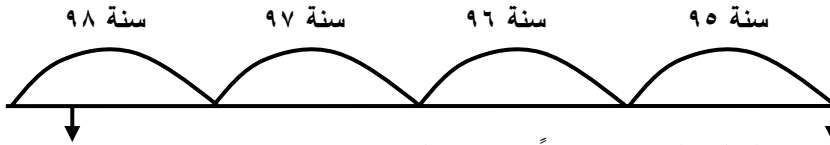
مثال ٥

الفصل الثالث: الدفعات المتساوية المؤكدة بفائدة بسيطة

أودع طالب فى كلية التجارة - جامعة طنطا الفرقة الأولى مبلغاً ما فى أول كل شهر من أول يناير عام ١٩٩٥ فى بنك القاهرة - فرع طنطا وفى نهاية السنة التى حصل على البكالوريوس فيها وجد جملة المستحق له فى البنك ٦٩٣,٦ جنية المطلوب تحديد المبلغ الذى كان يودعه الطالب شهرياً علماً بأنه لم يرسب فى أى عام كما أن البنك يستخدم معدل فائدة قدره ١٠٪ سنوياً.

الحل

مدة الايداع ٤ سنوات (من أول عام ١٩٩٥ حتى نهاية عام ١٩٩٨) كما هو مبين بالرسم التالى:



وبفرض أن قيمة المبلغ المودع شهرياً = قيمة الدفعة = د

$$\sum_{r=1}^n F_r = D \times n + D \times E \times \frac{n}{2} \times \frac{ش+1}{12}$$

عدد الدفعات = ٤٨ دفعة (٤ سنوات × ١٢)

مدة الدفعة الأولى = ٤٨ شهر

مدة الدفعة الأخيرة = شهر واحد

$$جملة الايداع = D \times 48 + D \times E \times \frac{10}{100} \times \frac{48}{2} \times \frac{1+48}{12}$$

$$= 48D + 9,8D$$

$$= 57,8D = 693,6$$

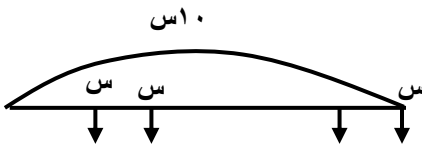
د = (المبلغ الذى يودعه الطالب شهرياً) = ١٢ جنية

مثال ٦

أودع موظف بجامعة طنطا عشرة مبالغ قيمة كل منها ١٠٠ جنية فى بنك مصر - فرع طنطا فاذا علمت أنه فى نهاية مدة الايداع وجد جملة المستحق له ١١٦١,٣٣٢ جنية المطلوب تحديد كل من مدة الايداع والفترة التى تفصل بين كل دفعه وأخرى اذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة ٨٪ سنوياً.

الحل

بفرض أن الفترة التى تفصل بين كل دفعه وأخرى = مدى الدفعة = س شهراً



مدة الايداع = ١٠س شهراً

عدد الدفعات = ١٠ دفعات

مدة الدفعة الأولى = ١٠س شهراً

مدة الدفعة الأخيرة = س شهراً

$$\sum_{j=1}^n F_j = D \times n + E \times \frac{n}{2} \times \frac{ش+1}{12}$$

$$\frac{10س+س}{12} \times \frac{10}{2} \times \frac{8}{100} \times ١٠٠ + ١٠ \times ١٠٠ =$$

$$٤٠,٣٣٣ + ١٠٠٠ = ١١٦١,٣٣٢ \text{ س}$$

س (مدى الدفعة) = ٤٠ شهور

مدة الايداع = ٤٠ × ١٠ = ٤٠٠ شهراً

تمارين على الفصل الثالث

١- أودع شخصاً مبلغ قدره ٥٠ جنيهاً شهرياً فى بنك مصر - فرع القاهرة لمدة

سنة ونصف فاذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة ١٠٪ سنوياً المطلوب

حساب جملة المستحق لهذا الشخص فى الحالتين الآتيتين:

أ- اذا كان الايداع أول كل شهر

ب- اذا كان الايداع آخر كل شهر

الفصل الثالث: الدفعات المتساوية المؤكدة بفائدة بسيطة

٢- اتفق أحد موظفى جامعة طنطا مع بنك الاسكندرية - فرع طنطا الذى يحول عليه مرتبة على خصم ٣٠ جنيهاً من مرتبة لمدة ٤ سنوات المطلوب حساب جملة المستحق للموظف فى نهاية المدة اذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة فى البنك ١٠٪ سنوياً وذلك فى الحالتين التاليتين:

أ- اذا تم الخصم من المرتب أول الشهر

ب- اذا تم الخصم من المرتب آخر الشهر

٣- اقترض مزارع سلفه قدرها ٥٠٠٠ جنية من بنك التتية والائتمان الزراعى فى أول عام ١٩٩٦ على أن يسدها على أقساط شهرية ابتداء من آخر يناير لنفس العام المذكور المطلوب حساب قيمة القسط الشهرى الذى يدفعه المزارع اذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة ٦٪ سنوياً.

٤- أودع شخص عشرة دفعات عادية فى بنك القاهرة قيمة كل منها ٥٠ جنية وفى النهاية وجد جملة المستحق له فى البنك مبلغ قدره ٥٦٧,٥ جنية المطلوب:

أ- حساب الفترة التى تفصل بين كل دفعه وأخرى.

ب- مدة سداد الدفعات اذا علمت أن معدل فائدة الاستثمار فى البنك ١٢٪ سنوياً

٥- يودع شخص فى بنك النيل بطنطا فى أول ومنتصف الشهر مبلغ قدره ٤٠ جنية كما أنه فى ذات الوقت يسحب نصف ما يودعه فى أول العشرة أيام الثانية كم كل شهر المطلوب حساب رصيد هذا الشخص فى نهاية سنتين كاملتين اذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة ٦٪ سنوياً.

٦- أودع أيمن عبد المولى مبلغاً ما فى أول كل شهر من شهور سنة ١٩٩٦ ثم أودع فى نهاية كل شهر من شهور سنة ١٩٩٧ ٤ أمثال ما أودعه فى سنة ١٩٩٦ فاذا علمت أنه كان يسحب فى أول العشرة أيام الثانية من كل شهر من شهور سنتى ١٩٩٦ ، ١٩٩٧ نصف ما يودعه فى سنة ١٩٩٧ المطلوب

أ- حساب قيمة الدفعة المودعه فى سنة ١٩٩٦

ب- حساب قيمة الدفعة المودعه فى سنة ١٩٩٧

ت- حساب قيمة الدفعة المسحوب فى سنة ١٩٩٧

إذا علمت أن جملة الرصيد المستحق لأيمن عبد المولى فى نهاية ١٩٩٦ مبلغ قدره ٢٣٣,٤٦٧ جنية كما أن معدل الفائدة البسيطة ٤٪ سنوياً.

٧- أودع جمال حمودة فى البنك الأهلى أول ومنتصف كل شهر مبلغ قدره ٥٠ جنيهاً فى نفس الوقت كان يسحب فى أول العشرة أيام الأولى من كل شهر مبلغ قدره ٤٠ جنيهاً المطلوب حساب رصيد جمال حمودة فى نهاية ١٨ شهر على أساس معدل فائدة بسيطة ١٠٪.

٨- موظف مرتبه الشهرى ٣٠٠ جنية أراد ادخار ١٠٪ من مرتبة فى أحد البنوك خلال عام ١٩٩٧ فأى من الطريقتين الآتيتين أفضل للموظف ولماذا؟

الطريقة الأولى: ايداع النسبة المراد ادخارها كدفعه فورية فى أول العشرة أيام الثانية من كل شهر خلال العام المذكور.

الطريقة الثانية: ايداع النسبة المراد ادخارها فى منتصف كل شهر خلال العام المذكور إذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة ٨٪ سنوياً.