**الفصل الأول**

**نماذج النقل التعيين**

**أهداف الفصل**

في نهاية الفصل يجب أن يكون الطالب قادر على:

1. هيكلة مسائل البرمجة الخطية لنماذج النقل والتعيين.
2. استخدام أساليب الزاوية الشمالية الغربية و حجر التخطي

**الفقرات الرئيسية في الفصل**

1. مسألة النقل
2. مسألة التعيين

**مقدمة:**

سنكتشف في هذا الفصل ثلاثة أنواع خاصة من البرمجة الخطية مسألة النقل ، مسألة التعيين وكل هذه المسائل يمكن نمذجتها باستخدام المخطط التدفقي الشبكي، مع استخدام العقد (النقط) والأقواس (الخطوط).

**أولاً:** **مسألة النقل**

تتعامل مسألة النقل مع توزيع البضائع من عدة نقاط من الموردين (مصدر العرض) إلى عدة نقاط من المستوردين (وجهة الطلب). الشكل 1 يعطينا مثال على ذلك.

في الشكل 1 يرد مثال والهدف منه هو جدولة شحنات بحيث نخفض إجمالي التكاليف إلى الحد الأدنى. في بعض الأحيان، يتم تضمين تكاليف الإنتاج أيضا. ويمكن أيضا أن تستخدم نماذج النقل عندما تريد شركة أن تقرر موقع منشأة جديدة. القرارات المالية الجيدة بشأن موقع منشأة هي محاولة لتقليل إجمالي تكاليف النقل والإنتاج للنظام بأكمله. فمن المفيد جداً قبل افتتاح مصنع جديد أو مستودع جديد أو متجر مبيعات جديد، الأخذ بعين الاعتبار عدد من المواقع البديلة. إذ أن القرارات المالية الجيدة المتعلقة بموقع المشروع تقلل من تكاليف الانتاج والشحن.

**برنامج خطي لمثال النقل**
ترغب شركة بتخفيض تكاليف النقل إلى كل وجهة دون تخطي العرض من كل منشأ. إذا أردنا تشكيل برنامج خطي لهذه المسألة، هناك 3 قيود للعرض و 3 قيود للطلب. القرارات التي يجب اتخاذها متعلقة بعدد الوحدات من الانتاج الواجب نقلها عبر كل طريق من الطرق المتاحة، هناك متغير واحد للقرار لكل اتجاه (سهم أو خط) في هذه الشبكة.

= عدد الوحدات المنقولة من المصدر *i* إلى الوجهة *j* .

**الشكل 1: شبكة النقل مع التكاليف والطلبات والعروض (الاتجاه في الشكل من اليسار إلى اليمين)**

المصدر

300

الطلب 3

العرض 1

الطلب 2

الطلب

الوجهة

العرض

الطلب 1

العرض 3

200

300

100

3

4

8

5

7

9

3

4

5

العرض 2

200

300

**خوارزمية النقل**

خوارزمية النقل هو إجراء تكراري لحل مسألة النقل وعملية تقييم ما إذا كنا وصلنا إلى الحل الأمثل. إذا كان الحل هو الأمثل، تتوقف العملية. إذا لم يكن الأمثل، ننشئ حل جديد. هذا الحل الجديد هو على الأقل جيد مثل سابقه، وعادة ما يكون أفضل. ثم يقيَّم الحل الجديد، وإذا لم يكن الأمثل، يتم إنشاء حل آخر. وتستمر العملية حتى نعثر على الحل الأمثل.

سنقوم بتوضيح هذه العملية باستخدام مثال شركة الأثاث وهو مبين في الشكل 1 والجدول رقم 1.

**الجدول رقم 1 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | المستودع 1 | المستودع 2 | المستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| المصنع 1 | 5 | 4 | 3 | 100 |
| المصنع 2 | 8 | 4 | 3 | 300 |
| المصنع 3 | 9 | 7 | 5 | 300 |
| حاجة المستودع | 300 | 200 | 200 | **700** |

تكلفة نقل الوحدة من المصنع 1 إلى المستودع 1 = 5 ريالات

تكلفة نقل الوحدة من المصنع 1 إلى المستودع 2 = 4 ريالات

تكلفة نقل الوحدة من المصنع 1 إلى المستودع 3 = 3 ريالات

تكلفة نقل الوحدة من المصنع 2 إلى المستودع 1 = 8 ريالات

تكلفة نقل الوحدة من المصنع 2 إلى المستودع 2 = 4 ريالات

تكلفة نقل الوحدة من المصنع 2 إلى المستودع 3 = 3 ريالات

تكلفة نقل الوحدة من المصنع 3 إلى المستودع 1 = 9 ريالات

تكلفة نقل الوحدة من المصنع 3 إلى المستودع 2 = 7 ريالات

تكلفة نقل الوحدة من المصنع 3 إلى المستودع 3 = 5 ريالات

الطاقة الانتاجية للمصنع الأول 100 وحدة

الطاقة الانتاجية للمصنع الثاني 300 وحدة

الطاقة الانتاجية للمصنع الثالث 300 وحدة

حاجة المستودع الأول 300 وحدة

حاجة المستودع الأول 200 وحدة

حاجة المستودع الأول 200 وحدة

نرى في الجدول رقم 1 أن إجمالي إمدادات المصنع المتاحة تساوي بالضبط طلبات المستودعات. عند حدوث هذه الحالة أي تساوي العرض والطلب (وهو شيء نادر في الحياة الحقيقية)، يقال أنها مسألة متوازنة. أما المسألة غير المتوازنة هي تلك التي تكون فيها متطلبات الوجهة أكبر من أو أقل من قدرات أو طاقات المنشأ.

**وضع الحل الأولي: قاعدة الزاوية الشمالية الغربية**
بعد ترتيب البيانات في الجدول، يجب علينا أن ننشئ حلا ممكنا ابتدائياً لهذه المسألة. هناك أسلوب للحل يدعى قاعدة الركن الشمالي الغربي أو الزاوية الشمالية الغربية ، يتطلب أن نبدأ من الخلية العلوية اليسرى من الجدول وتوزيع وحدات الشحن على الطرق على النحو التالي:
1. نستنفذ العرض (طاقة المصنع) في كل صف قبل أن ننتقل إلى أسفل إلى الصف التالي.
2. نسد حاجة المستودع في كل عمود قبل أن ننتقل إلى العمود التالي.
3. نتأكد من أنه تم استنفاذ كل الطاقات وتم سد جميع الحاجات.
يمكننا الآن استخدام قاعدة الركن الشمالي الغربي لإيجاد حلاً ممكنا أولياً للمسألة المعروضة في الجدول 2.

 **الجدول رقم 2 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | المستودع 1 | المستودع 2 | المستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| المصنع 1 |  1005 | 4 | 3 | 100 |
| المصنع 2 |  2008 |  1004 | 3 | 300 |
| المصنع 3 |  9 |  1007 |  2005 | 300 |
| حاجة المستودع | 300 | 200 | 200 | **700** |

يتطلب هذا المثال خمس خطوات لتعيين الشحن الأولي ( انظر الجدول 3 ) :
**1** . نبدأ بالزاوية العلوية اليسرى ، ونخصص 100 وحدة من المصنع الأول لسد جزء من حاجة المستودع الأول. نكون بذلك قد استنفذنا طاقة المصنع الأول. لكن المستودع الأول لا يزال بحاجة إلى 200 وحدة. نتحرك لأسفل إلى الصف الثاني في نفس العمود .
**2** . نخصص 200 وحدة من طاقة المصنع الثاني. لسد ما تبقى من حاجة المستودع الأول. لكن المصنع الثاني لايزال لديه 100 وحدة متبقية ، لذلك نتحرك إلى اليمين إلى العمود التالي من الصف الثاني.
**3** . نخصص 100 وحدة من المصنع الثاني وهو ما تبقى لدى المصنع الثاني لسد جزء من حاجة المستودع الثاني. لكن المستودع الثاني لا يزال بحاجة إلى 100 وحدة. عند هذه النقطة نتحرك إلى أسفل عموديا الصف التالي .
**4** . نخصص 100 وحدة من المصنع الثالث لسد ماتبقى من حاجة المستودع الثاني. نلاحظ ، أن المصنع الثالث لا يزال لديه 200 وحدة متاحة لم تشحن بعد. ننتقل إلى العمود التالي.
**5** . نخصص 200 وحدة من المصنع الثالث لسد حاجة المستودع الثالث وهذه الخطوة النهائية تستنفذ ما تبقى لدى المصنع الثالث وتسد حاجة المستودع الثالث. اكتمل الحل الآن باستنفاذ الطاقات وسد الحاجات دون زيادة او نقص. ندعو هذه المسألة بالمسألة المتوازنة.

والآن يمكننا بسهولة حساب تكلفة النقل أو الشحن وفق التعيين او التخصيص السابق:

من المصنع الأول إلى المستودع الأول 100 x 5 = 500 ريال

من المصنع الثاني إلى المستودع الأول 200 x 8 = 1600 ريال

من المصنع الثاني إلى المستودع الثاني 100 x 4 = 400 ريال

من المصنع الثالث إلى المستودع الثاني 100 x 7 = 700 ريال

من المصنع الثالث إلى المستودع الثالث 200 x 5 = 1000 ريال

 المجموع = 4200 ريال

هذا الحل ممكنا حيث استوفيت جميع قيود العرض والطلب. وكان الحل سريع والوصول إليه سهل. ومع ذلك، فإننا سنكون محظوظين جدا إذا كان هذا الحل هو الأمثل، لكن هذا الأسلوب يتجاهل التكاليف المختلفة عبر طرق الشحن المختلفة.

بعد العثور على الحل الأولي، فإنه يجب تقييمه لمعرفة ما اذا كان هو الأمثل. نحسب مؤشر التحسين لكل خلية فارغة باستخدام طريقة حجر التخطي. إذا كان هناك إشارة إلى حل أفضل، فإننا نستخدم المسار حجر التخطي للانتقال من هذا الحل إلى حلول أفضل إلى أن نجد الحل الأمثل.

**طريقة حجر التخطي : العثور على الحل الأقل تكلفة**هو أسلوب تكراري للانتقال من حل ممكن أولي إلى حل أمثل ممكن. لهذه العملية جزأين متميزين : الأول يشمل اختبار
الحل الحالي لتحديد ما إذا كان التحسن ممكناً، و الجزء الثاني يتضمن إجراء تغييرات على الحل الحالي من أجل الحصول على تحسين الحل. هذه العملية تستمر حتى يتم التوصل إلى الحل الأمثل.

لكي نطبق أسلوب حجر التخطي على مسألة النقل ، هناك قاعدة حول عدد طرق النقل (عدد الخلايا) المستخدمة: يجب أن يكون عدد الخلايا المشغولة دائما يساوي أقل واحد من مجموع عدد الصفوف بالإضافة إلى عدد من الأعمدة. في مسألة الأثاث، يجب أن تكون عدد الخلايا المستخدمة = 3+3-1 = 5

عندما يكون عدد من الطرق المستخدمة أقل من ذلك (أقل من 5)، عندئذٍ يسمى الحل غير صالح (degenerate).
لاحقا في هذا الفصل نتحدث عن ما يجب القيام به إذا كان عدد المربعات (الخلايا) المستخدمة هي أقل من عدد
الصفوف بالإضافة إلى عدد من الأعمدة ناقص 1 .

**اختبار الحل من أجل إمكانية تحسينه**

 كيف يعمل أسلوب حجر التخطي؟ النهج هو تقييم فعالية تكلفة شحن البضائع عبر طرق النقل الموجودة حاليا في الحل. كل طريق شحن غير مستخدم (أو مربع أو خلية) يختبر عن طريق طرح السؤال التالي : " ماذا سيحدث لمجموع تكاليف الشحن إذا شُحنت وحدة واحدة من منتجاتنا مبدئيا عن طريق غير مستخدم؟
ويجري هذا الاختبار في كل مربع غير مستخدم باستخدام الخطوات الخمس:

**خمس خطوات لاختبار الخلايا (مربعات) غير المستخدمة بأسلوب حجر التخطي**1. حدد مربع غير مستخدم.
2. نبتدئ من هذا المربع، ونتبع مسار مغلق رجوعاً إلى المربع الأصلي عن طريق المربعات التي هي حاليا مستخدمة ونتحرك أفقياً ورأسياً فقط.
3. نبدأ بعلامة زائد في المربع غير المستخدم، ونضع علامة ناقص بالتناوب على كل ركن من أركان مربع المسار المغلق.
4. نحسب مؤشر التحسن عن طريق جمع أرقام تكلفة الوحدة الموجودة في كل مربع فيه علامة زائد ثم طرح تكاليف الوحدة في كل مربع يحتوي على علامة ناقص.
5. نكرر الخطوات من 1-4 حتى نحسب مؤشر التحسن لجميع المربعات غير المستخدمة. إذا كان كل المؤشرات المحسوبة هي أكبر من أو تساوي الصفر، نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل. إذا لم يكن كذلك، فمن الممكن تحسين الحل الحالي وخفض إجمالي تكاليف الشحن.

 **الجدول رقم 3 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | Aالمستودع 1 | Bالمستودع 2 | Cالمستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  - 1005 |  + 4 | 3 | 100 |
| Eالمصنع 2 |  200 +8 | - 100 4 | 3 | 300 |
| Fالمصنع 3 |  9 |  1007 |  2005 | 300 |
| حاجة المستودع | 300 | 200 | 200 | **700** |

إذا حاولنا أن ننقل وحدة واحدة عبر الطريق DB بدلاً من نقلها عن عبر الطريق EB ونقل وحدة واحدة عبر الطريق EA بدلاً من الطريق DA، سيحصل مايلي:

+4-5+8-4=+3 IDB=

هذا يعني كل وحدة انتاج ستنقل عبر الطريق DB ستكلف 3 ريالات أكثر.

**الجدول رقم 4 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | Aالمستودع 1 | Bالمستودع 2 | Cالمستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  - 1005 |  4 |  +3 | 100 |
| Eالمصنع 2 |  + 2008 |  - 1004 | 3 | 300 |
| Fالمصنع 3 |  9 |  + 1007 |  - 2005 | 300 |
| حاجة المستودع | 300 | 200 | 200 | **700** |

إذا حاولنا أن ننقل وحدة واحدة عبر الطريق DC بدلاً من نقلها عن عبر الطريق FC ونقل وحدة واحدة عبر الطريق EA بدلاً من الطريق DA، ونقل وحدة واحدة عبر الطريق FB بدلاً من الطريق EB سيحصل مايلي:

+3-5+8-4+7-5=+4 IDC=

هذا يعني كل وحدة انتاج ستنقل عبر الطريق DC ستكلف 4 ريالات أكثر.

**الجدول رقم 5 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | Aالمستودع 1 | Bالمستودع 2 | Cالمستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  1005 |  4 | 3 | 100 |
| Eالمصنع 2 |  2008 |  - 1004 |  +3 | 300 |
| Fالمصنع 3 |  9 |  + 1007 |  - 2005 | 300 |
| حاجة المستودع | 300 | 200 | 200 | **700** |

إذا حاولنا أن ننقل وحدة واحدة عبر الطريق EC بدلاً من نقلها عن عبر الطريق FC ونقل وحدة واحدة عبر الطريق FB بدلاً من الطريق EB، سيحصل مايلي:

+3-4+7-5=+1 IEC=

هذا يعني كل وحدة انتاج ستنقل عبر الطريق EC ستكلف 1 ريال أكثر.

**الجدول رقم 6 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | Aالمستودع 1 | Bالمستودع 2 | Cالمستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  1005 |  4 | 3 | 100 |
| Eالمصنع 2 |  - 2008 |  + 1004 | 3 | 300 |
| Fالمصنع 3 |  + 9 |  - 1007 |  2005 | 300 |
| حاجة المستودع | 300 | 200 | 200 | **700** |

إذا حاولنا أن ننقل وحدة واحدة عبر الطريق FA بدلاً من نقلها عن عبر الطريق EA ونقل وحدة واحدة عبر الطريق EB بدلاً من الطريق FB، سيحصل مايلي:

+9-7+4-8=-2 IFA=

هذا يعني كل وحدة انتاج ستنقل عبر الطريق FA ستكلف 2 ريال أقل.

**الحصول على حل محسن**

 كل مؤشر سلبي يحسب بأسلوب حجر التخطي يمثل مقدار تخفيض تكاليف الشحن نتيجة لنقل وحدة منتج على هذا الطريق. وجدنا مؤشر سلبي واحد فقط في مسألتنا. إذا كان هناك أكثر من مؤشر سلبي واحد ، فإن استراتيجيتنا اختيار المسار ( المربع غير المستخدم) الذي يعطي أكبر تخفيض.
الخطوة التالية ، بعد ذلك، هو شحن الحد الأقصى المسموح به من الوحدات على الطريق الجديد (FA) . ما هو الحد الأقصى للكمية التي يمكن شحنها على هذا الطريق لتوفير المال؟ نجد هذه الكمية من خلال إشارات المسار المغلق. نختار أصغر كمية من كميات الخلايا التي تحتوي على إشارة سالب وهذه الكمية تضاف إلى خلايا المسار المغلق التي لها إشارة موجب وتطرح من خلايا المسار المغلق التي لها إشارة سالب. تبقى بقية الخلايا الأخرى دون تغيير.
لنرى كيف يمكن أن تساعد هذه العملية على تحسين الحل. نكرر جدول النقل (الجدول 8 ) لهذه المسألة. نلاحظ أصغر كمية في الخلايا التي فيها إشارات سالبة في المسار (FA-FB-EB-EA) هي الكمية 100 وحدة. نضيف 100 وحدة إلى الطريق FA؛ نطرح 100 من الطريق FB وهكذا يبقى مجموع السطر الثالث نفسه؛ نضيف 100 إلى الطريق EB، يصبح 200؛ وأخيراً نطرح 100 من EA يبقى 100 في الطريق EA.

**الجدول رقم 7 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | Aالمستودع 1 | Bالمستودع 2 | Cالمستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  1005 |  4 | 3 | 100 |
| Eالمصنع 2 |  1008 |  2004 | 3 | 300 |
| Fالمصنع 3 |  100 9 |  7 |  2005 | 300 |
| حاجة المستودع | 300 | 200 | 200 | **700** |

انخفضت التكلفة الكلية بمقدار 200 ريال وأصبحت 4000 ريال. وذلك كما يلي:

كانت التكلفة: (100 X 5) + (200 X 8) + (100 X 4) + (100 X 7) + (200 X 5) = 4200ريال

وأصبحت: (100 X 5) + (100 X 8) + (200 X 4) + (100 X 9) + (200 X 5) = 4000ريال

إن الحل وفقاً للجدول 8 يمكن أن يكون الأمثل وقد لا يكون الأمثل. ولمعرفة ما إذا كان يمكن تحسين الحل أم لا، نعود إلى الخطوات الخمس السابقة ونختبر الخلايا الفارغة (الطرق غير المستخدمة)

**الجدول رقم 8 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | Aالمستودع 1 | Bالمستودع 2 | Cالمستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  - 100 5 |  + 4 | 3 | 100 |
| Eالمصنع 2 |  + 1008 |  - 2004 | 3 | 300 |
| Fالمصنع 3 |  100 9 |  7 |  2005 | 300 |
| حاجة المستودع | 300 | 200 | 200 | **700** |

+4-5+8-4=+3 IDB=

**الجدول رقم 9 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | Aالمستودع 1 | Bالمستودع 2 | Cالمستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  - 100 5 |  4 |  +3 | 100 |
| Eالمصنع 2 |  1008 |  2004 | 3 | 300 |
| Fالمصنع 3 |  100 + 9 |  7 |  - 2005 | 300 |
| حاجة المستودع | 300 | 200 | 200 | **700** |

+3-5+9-5=+2 IDC=

**الجدول رقم 10 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | Aالمستودع 1 | Bالمستودع 2 | Cالمستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  1005 |  4 | 3 | 100 |
| Eالمصنع 2 |  - 100 8 |  2004 | +3 | 300 |
| Fالمصنع 3 |  100 + 9 |  7 |  - 2005 | 300 |
| حاجة المستودع | 300 | 200 | 200 | **700** |

+3-8+9-5=-1 IEC=

**الجدول رقم 11 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | Aالمستودع 1 | Bالمستودع 2 | Cالمستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  1005 |  4 | 3 | 100 |
| Eالمصنع 2 |  + 1008 |  - 2004 | 3 | 300 |
| Fالمصنع 3 |  100 - 9 | + 7 |  2005 | 300 |
| حاجة المستودع | 300 | 200 | 200 | **700** |

+7-4+8-9=+2 IFB=

نجد أن المسار الوحيد الذي يخفض التكلفة في هذه الحالة هو المسار (EC-EA-FA-FC)، ننظر إلى أقل قيمة في الخلايا السالبة نجدها 100 فنضيف 100 إلى الخلايا الموجبة ونطرح 100 من الخلايا السالبة فيصبح الحل لدينا كما يلي:

**الجدول رقم 12 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | Aالمستودع 1 | Bالمستودع 2 | Cالمستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  1005 |  4 | 3 | 100 |
| Eالمصنع 2 |  8 |  2004 |  1003 | 300 |
| Fالمصنع 3 |  200 9 |  7 |  1005 | 300 |
| حاجة المستودع | 300 | 200 | 200 | **700** |

انخفضت التكلفة الكلية بمقدار 100 وأصبحت 3900 ريال. وذلك كما يلي:

كانت التكلفة: (100 X 5) + (100 X 8) + (200 X 4) + (100 X 9) + (200 X 5) = 4000ريال

وأصبحت: (100 X 5) + (200 X 4) + (100 X 3) + (200 X 9) + (100 X 5) = 3900ريال

**الجدول رقم 13 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | Aالمستودع 1 | Bالمستودع 2 | Cالمستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  1005 |  4 | 3 | 100 |
| Eالمصنع 2 |  8 |  2004 |  1003 | 300 |
| Fالمصنع 3 |  200 9 |  7 |  1005 | 300 |
| حاجة المستودع | 300 | 200 | 200 | **700** |

إن الحل وفقاً للجدول 14 يمكن أن يكون الأمثل وقد لا يكون الأمثل. ولمعرفة ما إذا كان يمكن تحسين الحل أم لا، نعود إلى الخطوات الخمس السابقة ونختبر الخلايا الفارغة (الطرق غير المستخدمة)

**الجدول رقم 14 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | Aالمستودع 1 | Bالمستودع 2 | Cالمستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  - 1005 |  + 4 | 3 | 100 |
| Eالمصنع 2 |  8 |  - 2004 |  + 1003 | 300 |
| Fالمصنع 3 |  200 + 9 |  7 |  - 1005 | 300 |
| حاجة المستودع | 300 | 200 | 200 | **700** |

IDB=+4-5+9-5+3-4=+2

**الجدول رقم 15 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | Aالمستودع 1 | Bالمستودع 2 | Cالمستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  - 1005 |  4 |  +3 | 100 |
| Eالمصنع 2 |  8 | - 2004 |  1003 | 300 |
| Fالمصنع 3 |  200 + 9 |  7 |  - 1005 | 300 |
| حاجة المستودع | 300 | 200 | 200 | **700** |

IDC=+3-5+9-5=+2

**الجدول رقم 16 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | Aالمستودع 1 | Bالمستودع 2 | Cالمستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  1005 |  4 |  3 | 100 |
| Eالمصنع 2 |  + 8 |  - 2004 |  - 1003 | 300 |
| Fالمصنع 3 |  200 - 9 |  7 |  + 1005 | 300 |
| حاجة المستودع | 300 | 200 | 200 | **700** |

IEA=+8-9+5-3=+1

**الجدول رقم 17 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | Aالمستودع 1 | Bالمستودع 2 | Cالمستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  1005 |  4 |  3 | 100 |
| Eالمصنع 2 |  8 |  - 2004 |  + 1003 | 300 |
| Fالمصنع 3 |  200 9 |  +7 |  - 1005 | 300 |
| حاجة المستودع | 300 | 200 | 200 | **700** |

IFB=+7-5+3-4=+1

لا يوجد مسار يمكن ان يخفض التكلفة لذلك وصلنا إلى الحل الأمثل وهو:

**الجدول رقم 18 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | Aالمستودع 1 | Bالمستودع 2 | Cالمستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  1005 |  4 | 3 | 100 |
| Eالمصنع 2 |  8 |  2004 |  1003 | 300 |
| Fالمصنع 3 |  200 9 |  7 |  1005 | 300 |
| حاجة المستودع | 300 | 200 | 200 | **700** |

وتبقى التكلفة 3900 ريال.

**برنامج خطي لمثال النقل**
ترغب شركة بتخفيض تكاليف النقل إلى كل وجهة دون تخطي العرض من كل منشأ. إذا أردنا تشكيل برنامج خطي لهذه المسألة، هناك 3 قيود للعرض و 3 قيود للطلب. القرارات التي يجب اتخاذها متعلقة بعدد الوحدات من الانتاج الواجب نقلها عبر كل طريق من الطرق المتاحة، هناك متغير واحد للقرار لكل اتجاه (سهم أو خط) في هذه الشبكة.

= عدد الوحدات المنقولة من المصدر *i* إلى الوجهة *j* .

**الشكل 1: شبكة النقل مع التكاليف والطلبات والعروض (الاتجاه في الشكل من اليسار إلى اليمين)**

المصدر

300

الطلب 3

العرض 1

الطلب 2

الطلب

الوجهة

العرض

الطلب 1

العرض 2

العرض 3

200

300

100

3

4

8

5

7

9

3

4

5

200

300

= عدد الوحدات المنقولة من المصدر *i* إلى الوجهة *j* .

حيث:

= عدد الوحدات المنقولة من المصدر *1* إلى الوجهة *1* .

= عدد الوحدات المنقولة من المصدر *1* إلى الوجهة *2* .

= عدد الوحدات المنقولة من المصدر *1* إلى الوجهة *3* .

= عدد الوحدات المنقولة من المصدر *2* إلى الوجهة *1* .

= عدد الوحدات المنقولة من المصدر *2* إلى الوجهة 2 .

= عدد الوحدات المنقولة من المصدر *2* إلى الوجهة 3 .

= عدد الوحدات المنقولة من المصدر 3 إلى الوجهة *1* .

= عدد الوحدات المنقولة من المصدر 3 إلى الوجهة 2 .

= عدد الوحدات المنقولة من المصدر 3 إلى الوجهة 3 .

ستكون البرمجة الخطية كما يلي:

**تابع الهدف**

تخفيض التكلفة الكلية إلى أدنى حد ممكن = 

**القيود:**

العرض من المصدر الأول إلى الوجهات الثلاث: 

العرض من المصدر الثاني إلى الوجهات الثلاث: 

العرض من المصدر الثالث إلى الوجهات الثلاث: 

طلب الوجهة الأولى من المصادر الثلاثة: 

طلب الوجهة الثانية من المصادر الثلاثة: 

طلب الوجهة الثالثة من المصادر الثلاثة: 

بالنسبة لأي *i* أو *j* :  أي الكمية تكون موجبة أو صفر ولا يمكن أن تكون الكمية سالبة.

يمكن حل هذه المسألة باستخدام Solver من Excel.

يجب ان تكون صفحة إكسل كما هو في الشكل التالي لكي نستدعي بعد ذلك Solver لكي نحل المسألة

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | **F** |
| **1** |  | كلفة نقل الوحدة |  |  |
| **2** | إلى من | طلب 1 | طلب 2 | طلب 3 |  |  |
| **3** | عرض1 | 5 | 4 | 3 |  |  |
| **4** | عرض2 | 8 | 4 | 3 |  |  |
| **5** | عرض3 | 9 | 7 | 5 |  |  |
| **6** |  |  |  |  |  |  |
| **7** |  |  |  |  |  |  |
| **8** |  | الحل: عدد الوحدات المنقولة |  |  |
| **9** | إلى من  | طلب 1 | طلب 2 | طلب 3 | إجمالي المنقول | العرض |
| **10** | عرض1  | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| **11** | عرض2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 300 |
| **12** | عرض3 | 1 | 1 | 1 | 3 | 300 |
| **13** | إجمالي المستلم | 3 | 3 | 3 |  |  |
| **14** | الطلب | 300 | 200 | 200 |  |  |
| **15** |  |  |  |  |  |  |
| **16** | =الكلفة الكلية | 48 |  |  |  |  |

نضع الصيغ الحسابية التالية:



**ننسخ E10 إلى E11:E12**



**ننسخ B13 إلى C13:D13**



**خطوات إملاء صندوق الحوار Solver:**

**Set Objective:** B16الهدف

**To:** Min

**By Changing cells:** B10:D12عن طريق تغيير الخلايا التالية:

**Subject to the Constraints :القيود**

**E10:E12 <= F10:F12**

**B13:D13 = B14:D14**

**Solving Method:** Simplex LPطريقة الحل :

جعل المتغيرات غير سلبية نضع إشارة في المربع جانب هذه العبارة **Make Variables Non-Negative**

**وبعد الحل عن طريق Solver ينتبح يلي:**



الحل – عدد الوحدات المشحونة

= التكلفة الكلية

طلب 1

العرض

طلب 2

طلب 3

طلب 1

الطلب

إجمالي المستلم

عرض 3

عرض2

عرض 1

عرض2

عرض 3

عرض 1

طلب 2

طلب 1

طلب 3

تكلفة الشحن للوحدة الواحدة

**مسائل النقل غير المتوازنة**
نصادف مسائل نقل غير متوازنة بشكل متكرر جدا في الحياة الحقيقية عندما يكون الطلب الكلي لا يساوي العرض الكلي. يمكن التعامل مع هذه المسائل غير المتوازنة بسهولة عن طريق إجراءات الحل السابقة أولا بتقديم مصادر وهمية أو طرق وهمية. في الحالة التي يكون فيها إجمالي المعروض أكبر من الطلب الكلي، نفترض وجود جهة مستوردة وهمية (مستودع وهمي)، تمتص العرض الفائض. إذا كان الطلب الكلي أكبر من العرض الكلي، نفترض وجود مصدر وهمي (مصنع وهمي) يوفر العرض لسد فائض الطلب على العرض. في أي من الحالتين، نعين معاملات تكلفة الشحن بقيمة الصفر في كل طريق وهمي وسوف تكون في الواقع شحنات من مصنع وهمي أو إلى مستودع وهمي. أي الوحدات المخصصة إلى وجهة وهمية تمثل الطاقة الفائضة، والوحدات المخصصة لمصدر وهمي تمثل الطلب الوهمي.

**حالة العرض اكبر من الطلب**

**الجدول رقم 19 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |  |
|  | Aالمستودع 1 | Bالمستودع 2 | Cالمستودع 3 | مستودع وهمي | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  250 5 |  4 | 3 | 0 | 250 |
| Eالمصنع 2 |  50 8 |  200 4 |  50 3 | 0 | 300 |
| Fالمصنع 3 |  9 |  7 |  150 5 |  150 0  | 300 |
| حاجة المستودع | 300 | 200 | 200 | 150 | **850** |

Total cost = 250($5) + 50($8) + 200($4) + 50($3) + 150($5) + 150($0) = $3,350

**حالة الطلب اكبر من العرض**

**الجدول رقم 20 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | Aالمستودع 1 | Bالمستودع 2 | Cالمستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  6 |  4 | 9 | 200 |
| Eالمصنع 2 |  10  |  5 |  8 | 175 |
| Fالمصنع 3 |  12 |  7 |  6 | 75 |
| حاجة المستودع | 250 | 100 | 150 | **500 / 450** |

**الجدول رقم 21 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | Aالمستودع 1 | Bالمستودع 2 | Cالمستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  200 6 |  4 | 9 | 200 |
| Eالمصنع 2 |  50 10  |  100 5 | 25 8 | 175 |
| Fالمصنع 3 |  12 |  7 |  75 6 | 75 |
| مصنع وهمي | 0 | 0 |  50 0 | 50 |
| حاجة المستودع | 250 | 100 | 150 | **500** |

Total cost = 200($6) + 50($8) + 100($5) + 25($8) + 75 ($6) + 50($0) = $2,850

**حالة عدم الصلاحية في بداية الحل**

لنفرض ان بدأنا حل أحد المسائل بحسب الزاوية الشمالية الغربية فنتج الجدول التالي:

**الجدول رقم 22 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | Aالمستودع 1 | Bالمستودع 2 | Cالمستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  1008 |  2 | 6 | 100 |
| Eالمصنع 2 |  10 |  1009 |  209 | 120 |
| Fالمصنع 3 |  7 |  10 |  80 7 | 80 |
| حاجة المستودع | 100 | 100 | 100 | **300** |

نجد أنه لا يمكن متابعة الحل بسبب عدم استيفاء الشرط التالي:

عدد الخلايا المشغولة = عدد الأسطر + عدد الأعمدة – 1 = 5. إذ نجد أن عدد الخلايا المشغولة 4 فقط. حصل ذلك بسبب أن المصنع الأول يساوي تماما ما يحتاجه المستودع الأول. في هذه الحالة نضع صفر في الخلية DB أو صفر في الخلية EA. بعد ذلك تصبح عدد الخلايا المشغولة 5 ونتابع الحل.

**حالة عدم الصلاحية في إحدى مراحل الحل غير بداية الحل**

لنفرض أن المسار في الجدول التالي يوفر تكاليف النقل أكثر من غيره.

**الجدول رقم 23 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | Aالمستودع 1 | Bالمستودع 2 | Cالمستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  1005 |  4 | 3 | 100 |
| Eالمصنع 2 |  - 1008 |  + 1004 | 3 | 200 |
| Fالمصنع 3 |  + 9 |  - 1007 |  2005 | 300 |
| حاجة المستودع | 200 | 200 | 200 | **600** |

+9-7+4-8=-2 IFA=

بعد إجراء الخطوات اللازمة سنحصل على الجدول التالي:

**الجدول رقم 22 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | Aالمستودع 1 | Bالمستودع 2 | Cالمستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  1005 |  4 | 3 | 100 |
| Eالمصنع 2 |  8 |  2004 | 3 | 200 |
| Fالمصنع 3 | 9 100  |  7 |  2005 | 300 |
| حاجة المستودع | 200 | 200 | 200 | **600** |

في الجدول السابق عدد الخلايا المشغولة 4 فقط. نضع صفر في إحدى الخليتين الشاغرتين من جراء العملية الأخيرة فنحصل على جدول بـ 5 خلايا مستخدمة من جديد.

**الجدول رقم 23 مسألة شركة الأثاث**

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | Aالمستودع 1 | Bالمستودع 2 | Cالمستودع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  1005 |  4 | 3 | 100 |
| Eالمصنع 2 |  08 |  2004 | 3 | 200 |
| Fالمصنع 3 | 100 9 |  7 |  2005 | 300 |
| حاجة المستودع | 200 | 200 | 200 | **600** |

Total cost = 100($5) + 0($8) + 200($4) + 100($9) + 200($5) = $3,200

**حل المسألة التالية**

شركة لديها مصانع في ثلاثة مواقع و وتعمل حاليا في ثلاثة مشاريع بناء كبرى ، وتقع في مواقع مختلفة. تكلفة الشحن لكل حمولة شاحنة وطاقة كل مصنع ، و متطلبات كل المشروع في الجدول المرفق .

|  |  |
| --- | --- |
| تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع إلى المستودع |  |
|  | Aالمشروع 1 | Bالمشروع 2 | Cالمشروع 3 | الطاقة الانتاجية للمصنع  |
| Dالمصنع 1 |  10 |  4 | 11 | 70 |
| Eالمصنع 2 |  12 |  5 |  8 | 50 |
| Fالمصنع 3 |  9 |  7 |  6 | 30 |
| حاجة المشروع | 40 | 50 | 60 | **150** |

المطلوب:
أ. صياغة حلا ممكنا أولياً لمشكلة النقل باستخدام قاعدة الركن الشمالي الغربي.
ب . ثم تقييم كل طريق شحن غير مستخدم ( كل خلية فارغة ) من خلال تطبيق طريقة حجر التخطي وحساب جميع مؤشرات التحسن. نتذكر أن تفعل ما يلي :
1 . تأكد من أن العرض والطلب متساويان .
2 قم بتحميل الجدول عبر طريقة الركن الشمالي الغربي .
3 . تأكد من أن هناك عدد مناسب من الخلايا المستخدمة (عدد الأسطر + عدد الأعمدة -1 = عدد الخلايا المستخدمة)
4 . العثور على مسار مغلق لكل خلية فارغة.
5 . تحديد مؤشر التحسن لكل خلية غير مستخدمة.
6 . نقل أكبر عدد ممكن من الوحدات إلى الخلية التي توفر أفضل التحسن ( إذا توفر ذلك).
7 . كرر الخطوات من 3 إلى 6 حتى يمكن العثور على مزيد من حلول التحسن.

**ثانياً:** **مسألة التعيين أو التخصيص**

تنتمي مسألة التعيين إلى فئة مسائل البرمجة الخطية التي تنطوي على تحديد أكثر الناس كفاءة للمشاريع، والمبيعات، الأراضي ومدققي الحسابات للشركات مراجعة الحسابات، وعقود لمقدمي العروض والوظائف لآلات والمعدات الثقيلة (مثل الرافعات) لبناء وظائف، وهلم جرا. والهدف من ذلك هو في معظم الأحيان هو تقليل إجمالي التكاليف أو الوقت الكلي لأداء المهام في متناول اليد. إحدى الخصائص الهامة في مسألة التعيين هي أن وظيفة واحدة فقط أو تعيين عامل واحد فقط لآلة واحدة أو مشروع.
يقدم الشكل 2 تمثيل شبكة لمسألة التعيين. لاحظ أن هذه الشبكة هي مشابهة جدا لشبكة مسألة النقل. في الواقع، يمكن اعتبار مسألة التعيين على أنها حالة خاصة من مسألة النقل حيث المصدر واحد والطلب واحد. لا يجوز تعيين أكثر من شخص لكل وظيفة واحدة أو مشروع، وكل وظيفة تحتاج شخص واحد.

**الشكل 2: مثال عن مسألة التعيين ضمن شكل لشبكة النقل (الاتجاه في الشكل من اليسار إلى اليمين)**

المصدر

1

أحمد 1

الطلب

الوجهة

العرض

الجهاز 1

محمود 3

1

1

1

11

14

6

8

محمد 2

الجهاز

2

1

10

11

9

الجهاز

3

7

12

1

**البرنامج الخطي لمثال التعيين**إن الشبكة التي نراها في الشكل 2 تمثل مشكلة تواجهها إحدى ورشات الصيانة. هذه الورشة تلقت لتوها ثلاثة أجهزة تحتاج إلى إصلاح والتي يجب أن تنجز بسرعة: (1) جهاز لاسلكي، (2) فرن محمصة، و (3) طاولة القهوة. هناك ثلاثة أشخاص مختصين في الصيانة يمكن أن يقوموا بالعمل، كل منهم ذو مواهب مختلفة. يقدر صاحب المحل تكلفة الأجور إذا عُيِّن هؤلاء المختصين لإصلاح كل من الأجهزة الثلاثة. تختلف التكاليف باختلاف مواهب كل مختص بحسب كل عمل. يرغب المالك بتعيين الوظائف بحيث تخفض التكلفة الإجمالية، ويجب أن يكون لكل وظيفة شخص واحد، ولا يمكن أن يوكل لكل شخص أكثر من مهمة واحدة.
إذا أردنا صياغة هذه المسألة ضمن برنامج خطي، يمكننا استخدام صياغة البرمجة الخطية العامة لمسألة النقل.

لنعرف المتغيرات كما يلي:

= 1 إذا كلف (أو عُيِّن) الشخص iلإصلاح الجهاز j

= 0 ماعدا ذلك

حيث:

 i = 1، 2، 3، أحمد= 1، محمد = 2، محمود = 3

j = 1، 2، 3، الجهاز1= 1، الجهاز2 = 2، الجهاز3= 3

نصيغ البرمجة الخطية كما يلي:

تابع الهدف:

تخفيض التكلفة الكلية إلى أدنى حد ممكن = 

القيود:

تكليف أحمد بصيانة أحد الأجهزة الثلاثة : 

تكليف محمد بصيانة أحد الأجهزة الثلاثة : 

تكليف محمود بصيانة أحد الأجهزة الثلاثة: 

صيانة الجهاز الأول من قبل أحد الأشخاص الثلاثة: 

صيانة الجهاز الثاني من قبل أحد الأشخاص الثلاثة: 

صيانة الجهاز الثالث من قبل أحد الأشخاص الثلاثة: 

بالنسبة لأي *i* أو *j* : 

يمكن حل هذه المسألة باستخدام Solver من Excel.

يجب ان تكون صفحة إكسل كما هو في الشكل التالي لكي نستدعي بعد ذلك Solver لكي نحل المسألة

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | **F** |
| **1** |  | تكلفة التعيين |  |  |
| **2** | إلى من | الجهاز1 | الجهاز 2 | الجهاز 3 |  |  |
| **3** | أحمد | 11 | 14 | 6 |  |  |
| **4** | محمد | 8 | 10 | 11 |  |  |
| **5** | محمود | 9 | 12 | 7 |  |  |
| **6** |  |  |  |  |  |  |
| **7** |  |  |  |  |  |  |
| **8** |  | الحل: عدد الوحدات المنقولة |  |  |
| **9** | إلى من  | الجهاز1 | الجهاز 2 | الجهاز 3 | إجمالي الأجهزة | العرض |
| **10** | أحمد | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| **11** | محمد | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| **12** | محمود | 1 | 1 | 1 | 3 | **1** |
| **13** | إجمالي المعينين | 3 | 3 | 3 |  |  |
| **14** | إجمالي الأشخاص | 1 | 1 | 1 |  |  |
| **15** |  |  |  |  |  |  |
| **16** | =الكلفة الكلية | 48 |  |  |  |  |



**ننسخ E10 إلى E11:E12**



**ننسخ B13 إلى C13:D13**



**خطوات إملاء صندوق الحوار Solver:**

**Set Objective:** B16الهدف

**To:** Min

**By Changing cells:** B10:D12عن طريق تغيير الخلايا التالية:

**Subject to the Constraints :القيود**

**E10:E12 <= F10:F12**

**B13:D13 = B14:D14**

**Solving Method:** Simplex LPطريقة الحل :

 **جعل المتغيرات غير سلبية Make Variables Non-Negative**

**وبعد الحل عن طريق Solver ينتبح يلي:**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | C | D | E | F |
| 1 |  | **تكلفة التعيين** |  |  |
| 2 |  | **جهاز 1** | **جهاز 2** | **جهاز 3** |  |  |
| 3 | **أحمد** | 11 | 14 | 6 |  |  |
| 4 | **محمد** | 8 | 10 | 11 |  |  |
| 5 | **محمود** | 9 | 12 | 7 |  |  |
| 6 |  |  |  |  |  |  |
| 7 |  |  |  |  |  |  |
| 8 |  |  |  |  |  |  |
| 9 |  | **جهاز 1** | **جهاز 2** | **جهاز 3** | **مجموع الأجهزة** | **العرض** |
| 10 | **أحمد** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | **محمد** | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 12 | **محمود** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 13 | إجمالي المعينين | 1 | 1 | 1 |  |  |
| 14 | إجمالي الأشخاص | 1 | 1 | 1 |  |  |
| 15 |  |  |  |  |  |  |
| 16 | **=التكلفة الكلية** | 25 |  |  |  |  |