

Polar Coordinates  
الإحداثيات القطبية  
Math 111  
Lecture 28

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University  
Department of Mathematics

2017

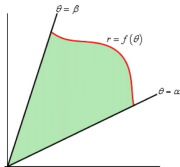
Polar Coordinates:

Polar Coordinates:

الفصل الرابع :

المساحات في الإحداثيات القطبية :

إذا كانت الدالة  $r = f(\theta)$  متصلة و موجبة على الفترة  $[\alpha, \beta]$  ، والتي لا يزيد طولها عن  $2\pi$  . وإذا كانت  $R$  هي المنطقة القطبية المحدودة بالمنحنى  $r = f(\theta)$  والمستقيمين  $\theta = \alpha$  و  $\theta = \beta$  ،

فإن مساحة المنطقة  $R$  تعطى من

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta$$

ويمكن الحصول على المساحة بين الدالتين المتصلتين  $f(\theta)$  و  $g(\theta)$  من

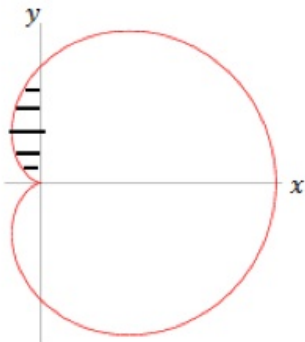
$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [(f(\theta))^2 - (g(\theta))^2] d\theta$$

مثال:

احسب مساحة  $R$  في الربع الثاني داخل المنحنى القلبي  $r = 1 + \cos \theta$ .

مثال:

احسب مساحة  $R$  في الربع الثاني داخل المنحنى القلبي  $r = 1 + \cos \theta$ .



الحل: بما أن مساحة المنطقة المطلوبة في الربع الثاني فيكون إيجادها كمايلي

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{\pi/2}^{\pi} 1 d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} 2 \cos \theta d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 \theta d\theta \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ [\theta]_{\pi/2}^{\pi} - 2[\sin \theta]_{\pi/2}^{\pi} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) d\theta \right] \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

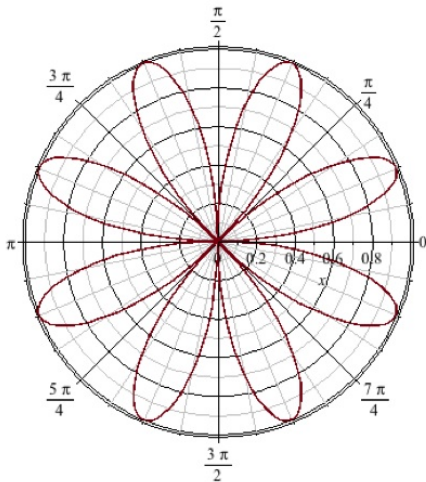
مثال:

احسب مساحة وريقة من منحنى الوردة  $r = \sin 4\theta$  .



مثال:

احسب مساحة وريقة من منحنى الوردة  $r = \sin 4\theta$ .



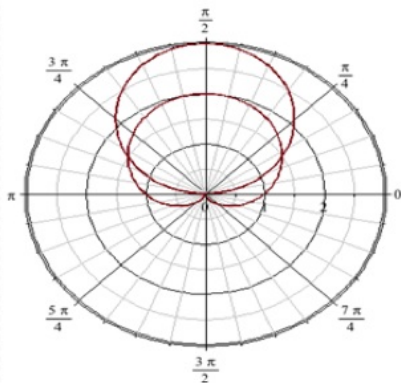
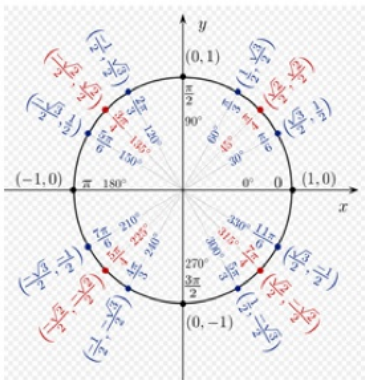
الحل: نريد إيجاد حدود التكامل وذلك بوضع  $r = 0$  وبالتالي فإن  $\sin 4\theta = 0$  أي انه نريد إيجاد قيم الزاوية التي تجعل  $\sin = 0$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (\sin 4\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} (1 - \sin 8\theta) d\theta \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

مثال:

احسب مساحة المنطقة داخل الدائرة  $r = 3 \sin \theta$  و خارج المنحنى القلبي

$$. r = 1 + \sin \theta$$



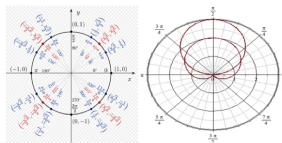
الحل: نريد إيجاد حدود التكامل وذلك بمساواة المعادلتين وبالتالي فإننا  
يجب أن نحل المعادلة التالية

$$3 \sin \theta = 1 + \sin \theta$$

$$2 \sin \theta = 1$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$

اي نريد إيجاد قيم  $\theta$  التي تجعل  $\sin = 1/2$



$$\Rightarrow \theta = \pi/6, \quad \theta = 5\pi/6$$

وبالتالي فإن مساحة المنطقة المطلوبة يمكن إيجادها من

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [(f(\theta))^2 - (g(\theta))^2] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} [(3\sin\theta)^2 - (1 + \sin\theta)^2] d\theta \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

## Exercises

مثال:

احسب مساحة المنطقة داخل  $r = 1 - \sin \theta$  .

احسب مساحة المنطقة داخل  $r = 2 \cos \theta$  و خارج  $r = 1$  .

*Thanks for listening.*