

الاحتمالات

الاحتمالات

في هذا الفصل سيتم دراسة نوع خاص من التجارب بهدف التنبؤ بنتائجها وحصر كافة الحالات التي يمكن أن تنتج من جراء تطبيق هذه التجربة.

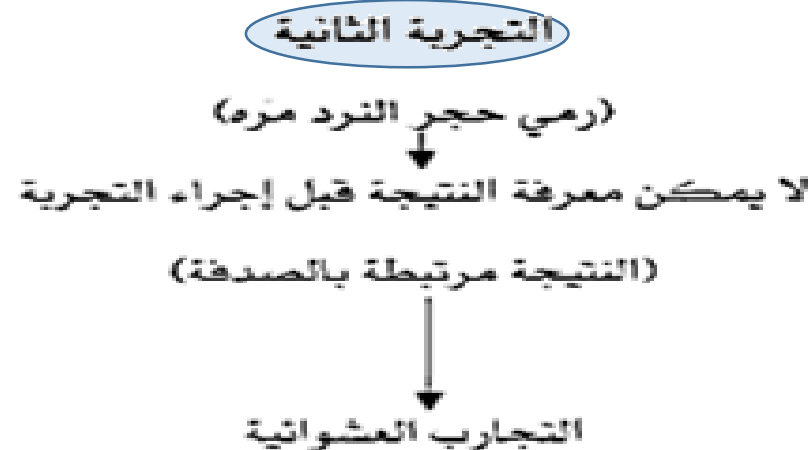
وقبل ذلك يجب أن نتعرف على أنواع التجارب وما هو النوع الذي تهتم بدراسته نظرية الاحتمالات.

نشاط: إليك التجريبتين التاليتين:

التجربة الأولى: تسخين الماء وملاحظة درجة غليانه.

التجربة الثانية: رمي حجر نرد مرة على الأرض وملاحظة الرقم الظاهر على الوجه العلوي.

لاحظ أن هناك فوارق ما بين التجريبتين من حيث النتيجة المتوقعة.



ملاحظة: نظرية الاحتمالات تهتم بدراسة التجارب العشوائية

- لاحظ في التجربة العشوائية سابقة الذكر [رمي حجر النرد مرة واحدة] يمكننا تحديد جميع النواتج الممكنة الحصول عليها حيث أن:
الناتج من رمي حجر النرد مرة هو $\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ وهذا ما يعرف بالفضاء العيني.
الفضاء العيني لتجربة عشوائية = مجموعة جميع النتائج التي بالإمكان أن نحصل عليها لأي تجربة ويرمز لها بالرمز (Ω)
حيث $E(\Omega) =$ عدد عناصر الفضاء العيني لتجربة ما .

إيجاد الفضاء العيني وتحديد عدد عناصره

- في كل من التجارب التالية أوجد الفضاء العيني (Ω) ثم حدد عدد عناصره $E(\Omega)$.

التجربة	الفضاء العيني (Ω)	$E(\Omega)$
رمي حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة الرقم الظاهر على الوجه العلوي	$\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$	$E(\Omega) = 6$
رمي قطعة نقد مرة واحدة وملاحظة الوجه الظاهر	$\Omega = \{ \text{صورة} , \text{كتابة} \}$ $\Omega = \{ \text{ص} , \text{ك} \}$	$E(\Omega) = 2$

ع (Ω) = 36	$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1), (2, 1), \dots, (6, 1) \\ (1, 2), (2, 2), \dots, (6, 2) \\ (1, 3), (2, 3), \dots, (6, 3) \\ (1, 4), (2, 4), \dots, (6, 4) \\ (1, 5), (2, 5), \dots, (6, 5) \\ (1, 6), (2, 6), \dots, (6, 6) \end{array} \right\}$ <p>لاحظ أن التجربة مركبة ومكونة من خطوتين</p> <p>الخطوة الأولى: رمي حجر النرد أول مرة = ع₁ = 6</p> <p>الخطوة الثانية: رمي حجر النرد المرة الثانية = ع₂ = 6</p> <p>لاحظ أن ع (Ω) = ع₁ × ع₂ = 6 × 6 = 36</p>	رمي نرد مرتين متتاليتين (رمي حجر نرد متمايزين) وملاحظة الأرقام على الأوجه العلوية للحجرين.															
ع (Ω) = 4	<table><tr><th colspan="2">الحل بالشجرة البيانية (للتجارب المركبة)</th><th>الحل العادي</th></tr><tr><th>النتائج</th><th>الخطوة الأولى</th><th>الخطوة الثانية</th></tr><tr><td>(ص, ص)</td><td>ص</td><td rowspan="4">$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (ص, ص), (ص, ك), (ك, ص), (ك, ك) \end{array} \right\}$</td></tr><tr><td>(ص, ك)</td><td>ك</td></tr><tr><td>(ك, ص)</td><td>ص</td></tr><tr><td>(ك, ك)</td><td>ك</td></tr></table> <p>ع (Ω) = عدد عناصر الخطوة الأولى × عدد عناصر الخطوة الثانية</p> <p>ع (Ω) = 2 × 2 = 4</p>	الحل بالشجرة البيانية (للتجارب المركبة)		الحل العادي	النتائج	الخطوة الأولى	الخطوة الثانية	(ص, ص)	ص	$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (ص, ص), (ص, ك), (ك, ص), (ك, ك) \end{array} \right\}$	(ص, ك)	ك	(ك, ص)	ص	(ك, ك)	ك	رمي قطعة نقد مرتين متتاليتين (رمي قطعتي نقد متمايزتين) وملاحظة الأوجه الظاهرة.
الحل بالشجرة البيانية (للتجارب المركبة)		الحل العادي															
النتائج	الخطوة الأولى	الخطوة الثانية															
(ص, ص)	ص	$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (ص, ص), (ص, ك), (ك, ص), (ك, ك) \end{array} \right\}$															
(ص, ك)	ك																
(ك, ص)	ص																
(ك, ك)	ك																

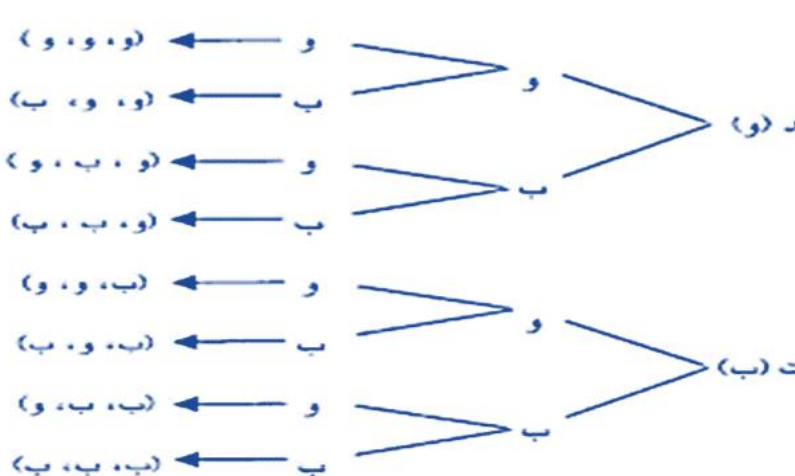
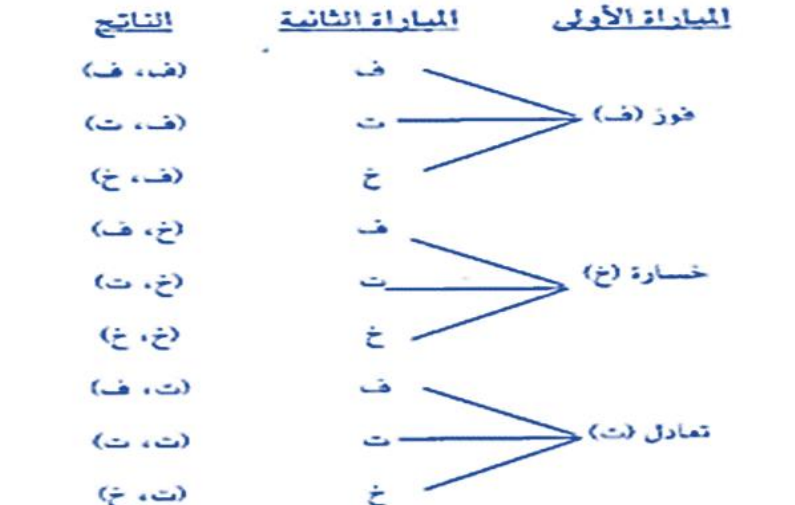
$$ع = (\Omega) = 12$$

بالشجرة البيانية			العامة
الفاصل	رمي النقطة	رمي الحجر	$= \Omega$ $\left\{ \begin{array}{l} (ص1), (ص2) \\ (ص3), (ص4) \\ (ص5), (ص6) \\ (ك1), (ك2) \\ (ك3), (ك4) \\ (ك5), (ك6) \end{array} \right\}$
(ص1)	ص	1	
(ك1)	ك		
(ص2)	ص	2	
(ك2)	ك		
(ص3)	ص	3	
(ك3)	ك		
(ص4)	ص	4	
(ك4)	ك		
(ص5)	ص	5	
(ك5)	ك		
(ص6)	ص	6	
(ك6)	ك		

ع (Ω) = عدد عناصر رمي الحجر * عدد عناصر رمي النقطة

$$12 = 2 \times 6 =$$

تجربة رمي حجر
نرد ثم قطعة نقد
وملاحظة الوجه
والرقمين الظاهريين

<p>ع $(\Omega) = 8$</p>	<p>تجربة اختيار ثلاثة أطفال لدى عائلة و تحديد الجنس</p> <p>الطفل الأول الطفل الثاني الطفل الثالث النتائج</p>  <p>ع $(\Omega) =$ الطفل الأول \times الطفل الثاني \times الطفل الثالث عناصر اختياره عناصر اختياره عناصر اختياره $2 \times 2 \times 2 = 8$</p>	
<p>ع $(\Omega) = 9$</p>	<p>تسجيل نتيجة مبارتين يلعبها فريق كرة قدم</p> <p>المباراة الأولى المباراة الثانية النتائج</p> 	

نتائج هامة تتعلق بعدد عناصر الفضاء العيني

(1) عند إلقاء حجر نرد (ن) من المرات فإن $E(\Omega) = 6$

(2) عند إلقاء قطعة نقد (ن) من المرات = عند إختيار (ن) من الأطفال لدى عائلة فإن $E(\Omega) = 2$

(3) إذا لعب فريق (ن) من المباريات فإن $E(\Omega) = 3$

مفهوم الحادث

الحادث: مجموعة جزئية من عناصر الفضاء العيني ويرمز له بالرمز (ح).

أنواع الحوادث



مثال: في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة اكتب عناصر الحوادث التالية مبيناً نوع كل منها:

- ح1: ظهور العدد (3) ح2: ظهور عدد فردي
ح3: ظهور عدد أكبر من (6) ح4: ظهور العدد (2) على الأقل
ح5: ظهور العدد (4) على الأكثر ح6: ظهور عدد أولي
ح7: ظهور عدد من قواسم (6) ح8: ظهور عدد فردي أو زوجي

الحل: $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ المجموعة الكلية

ح1 = $\{ 3 \}$ حادث بسيط

ح2 = $\{ 1, 3, 5 \}$ ← حادث مركب

ح3 = $\{ \emptyset \}$ ← حادث مستحيل (ملاحظة: لا يجوز القول $\{ \emptyset \}$)

ح4 = $\{ 2, 3, 4, 5, 6 \}$ ← حادث مركب

ح5 = $\{ 1, 2, 3, 4 \}$ ← حادث مركب

ح6 = $\{ 2, 3, 5 \}$ (العدد الأولي: الذي له قاسمان مختلفان فقط) [1 ← ليس أولي].

ح7 = $\{ 1, 2, 3, 6 \}$ ← حادث مركب

ح8 = $\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ ← حادث أكيد

العمليات على المجموعات



مثال: تجربة إلقاء قطعة نقد ثلاث مرات متتالية وملاحظة الأوجه الظاهرة :

ح1 = ظهور صورة واحدة على الأكثر.

ح2 = ظهور كتابة واحدة على الأقل.

ح3 = ظهور نفس الوجه في الرميات الثلاث.

ح4 = ظهور كتابتين.

ح5 = ظهور الصورة في الرمية الأخيرة

بناء على ما سبق أوجد ناتج

$$(1) \text{ ح } 1 \cap \text{ ح } 5 \quad (2) \text{ ح } 3 \cup \text{ ح } 4 \quad (3) \overline{\text{ ح } 3} \quad (4) \text{ ح } 1 - \text{ ح } 4$$

$$(5) \text{ ح } 5 - \text{ ح } 3 \quad (6) \overline{\text{ ح } 4}$$

$$\text{الحل: } \Omega = \left\{ \begin{array}{l} (\text{ص، ص، ص})، (\text{ك، ص، ص})، (\text{ص، ك، ص})، (\text{ك، ك، ص})، \\ (\text{ص، ص، ك})، (\text{ك، ص، ك})، (\text{ص، ك، ك})، (\text{ك، ك، ك}) \end{array} \right\}$$

$$\text{ح } 1 = \{ (\text{ص ك ك})، (\text{ك ص ك})، (\text{ك ك ص})، (\text{ك ك ك}) \}$$

$$\text{ح } 2 = \{ (\text{ص ص ك})، (\text{ص ك ص})، (\text{ك ص ك})، (\text{ك ص ص})، (\text{ك ك ك}) \}$$

$$\text{ح } 3 = \{ (\text{ص ص ص})، (\text{ك ك ك}) \}$$

$$\text{ح } 4 = \{ (\text{ص ك ك})، (\text{ك ص ك})، (\text{ك ك ص}) \}$$

$$\text{ح } 5 = \{ (\text{ص ص ص})، (\text{ص ك ص})، (\text{ك ص ص})، (\text{ك ك ص}) \}$$

$$(1) \text{ ح1} \cap \text{ح5} = \text{العناصر المشتركة بين الحادثين ح1 ، ح5} = \{ (ك ك ص) \}$$

$$(2) \text{ ح3} \cup \text{ح4} = \text{العناصر المشتركة وغير المشتركة بين الحادثين ح3 ، ح4 دون تكرار المشترك} = \{ (ص ص ص) ، (ك ك ك) ، (ص ك ك) ، (ك ص ك) ، (ك ك ص) \}$$

$$(3) \overline{\text{ح2}} = \text{متممة عناصر ح2} = \text{بقية العناصر في } \Omega \text{ والغير موجودة في ح2} = \{ (ص ص ص) \}$$

$$(4) \text{ ح1} - \text{ح4} = \text{العناصر الموجودة في ح1 وغير موجودة في ح4} = \{ (ك ك ك) \}$$

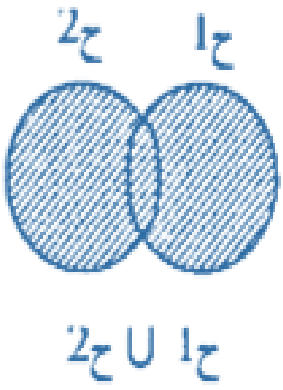
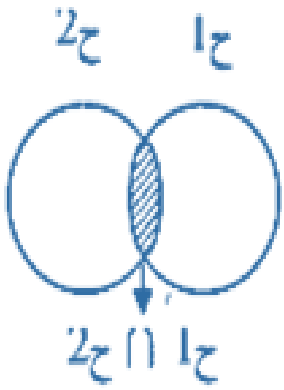
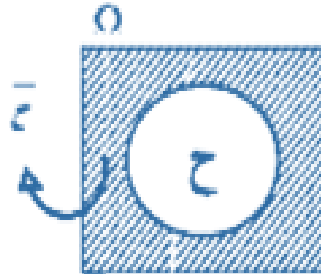
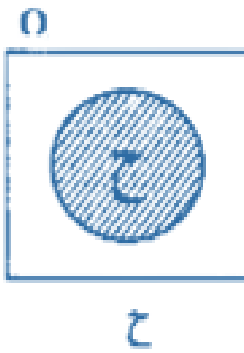
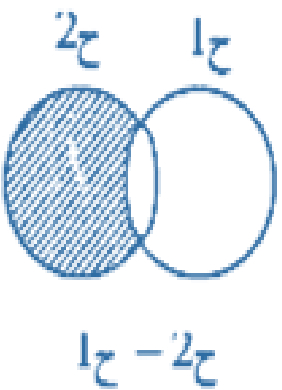
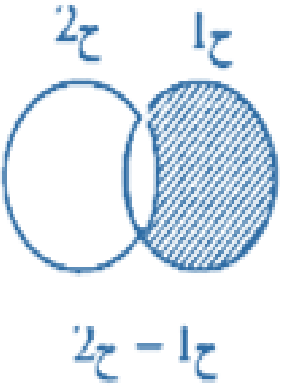
$$(5) \text{ ح5} - \text{ح3} = \text{العناصر الموجودة في ح5 وغير موجودة في ح3} =$$

$$= \{ (ص ك ص) ، (ك ص ص) ، (ك ك ص) \}$$

$$(6) \overline{\text{ح4}} = \text{بقية العناصر في } \Omega \text{ والغير موجودة في ح4} = \left\{ \begin{array}{l} (ص،ص،ص) ، (ك،ص،ص) \\ (ص،ك،ص) ، (ص،ص،ك) \\ (ك،ك،ك) \end{array} \right\}$$

تمثيل الحوادث في اشكال فن

أشكال فن: هي أشكال تعبر عن العملية المطلوب عملها على الحوادث وذلك بمنطقة مظلة.

مثال:

- في تجربة رمي حجر نرد مرتين متتالين وملاحظة الرقمين العلويين الظاهرين.
- أوجد (1) احتمال ظهور عددين متساويين.
 - (2) احتمال ظهور عددين زوجين.
 - (3) احتمال ظهور عددين مجموعهما (4).
 - (4) احتمال ظهور عددين مجموعهما على الأقل (8).
 - (5) احتمال ظهور عددين مجموعهما على الأكثر (5).
 - (6) احتمال ظهور عددين بحيث العدد الثاني يقسم العدد الأول.

الحل: ع (Ω) = 6 × 6 = 36 (لا داعي لكتابة عناصر Ω)

$$(1) \quad \text{احتمال ظهور عددين متساويين} = \frac{|\text{ح}|}{|\Omega|} \quad \text{حيث ح: ظهور عددين متساويين}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{6}{36} = \frac{|\text{ح}|}{|\Omega|} \quad \text{حيث ح} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

$$(2) \quad \text{احتمال ظهور عددين زوجين} = \frac{\text{عدد مرات ظهور عددين زوجين}}{\text{عدد عناصر } (\Omega)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

(3) احتمال ظهور عددين مجموعهما (4) $\frac{1}{12} = \frac{3}{36}$

(4) احتمال ظهور عددين مجموعهما على الأقل (8) $\frac{5}{12} = \frac{15}{36}$

(5) احتمال ظهور عددين مجموعهما على الأكثر (5) = تمرين.

(6) احتمال ظهور عددين بحيث العدد الثاني يقسم للعدد الأول = تمرين.

مثال: تجربة اختبار عائلة مكونة من (3) أطفال جد

- 1) احتمال أن يكون الأطفال الثلاثة ذكور.
- 2) احتمال أن يكون لدى العائلة بنت واحدة على الأقل.
- 3) احتمال أن يكون لدى العائلة ولدين وبنت.

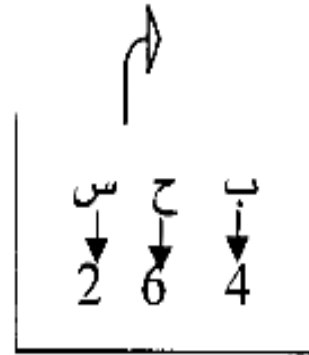
مثال: عند رمي قطعة نقد مرتين على التوالي جد احتمال عدم ظهور الصورة.

$$\text{الحل: } \Omega = \{(ص، ص)، (ك، ص)، (ص، ك)، (ك، ك)\} \leftarrow \epsilon(\Omega) = 4$$

$$\frac{1}{4} = \frac{\text{عدد مرات عدم ظهور الصورة}}{\epsilon(\Omega)} = \text{احتمال عدم ظهور الصورة} = \text{المطلوب}$$

مثال: يحتوي كيس على (4) كرات بيضاء و (6) كرات حمراء وكرتين سوداوين
سحب من الكيس كرة واحدة عشوائياً.

- (1) جد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.
- (2) جد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء.
- (3) جد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة غير بيضاء.



$$\text{الحل: (1) } \frac{1}{2} = \frac{6}{12} = \text{ح}$$

$$\text{(2) } \frac{1}{6} = \frac{2}{12} = \text{ح}$$

$$\text{(3) } \frac{2}{3} = \frac{8}{12} = \frac{2}{12} + \frac{6}{12} = \text{ح} = \text{حمراء} + \text{سوداء}$$

قوانين الاحتمال

أولاً:

القوانين العامة لدائماً صحيحة مهما كان الحادثين ح1 ، ح2.

$$(1) \text{ احتمال أي حادث محصور بين الصفر والواحد } \Leftrightarrow 0 \leq P(H) \leq 1$$

$$(2) \text{ احتمال الفضاء العيني } = 1 \Leftrightarrow P(\Omega) = 1$$

$$(3) \text{ احتمال المجموعة الخالية } = \text{ صفر } \Leftrightarrow P(\emptyset) = 0$$

$$(4) P(H_1 \cup H_2) = P(H_1) + P(H_2) - P(H_1 \cap H_2)$$

$$(5) P(H_2 - H_1) = P(H_2) - P(H_1 \cap H_2)$$

$$(6) P(H_1 - H_2) = P(H_1) - P(H_1 \cap H_2)$$

$$(7) P(H) + P(\bar{H}) = P(\Omega) = 1$$

ثانياً:

القوانين الخاصة لهنالك شروط على الحوادث حتى يتم استخدام هذه القوانين.

أ- إذا كان ح1 ، ح2 حادثين منفصلين ينتج أن الحادثين ليس بينهما عناصر مشتركة.

$$(1) H_1 \cap H_2 = \emptyset \quad (2) P(H_1 \cap H_2) = 0$$

$$(3) P(H_1 \cup H_2) = P(H_1) + P(H_2)$$

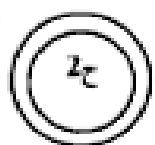

ب- إذا كانت الحوادث ح1 ، ح2 ، ح3 ، ح4 حوادث متباعدة وشاملة ينتج أن:

$$(1) \text{ تقاطع أي حادثين منها هو } \emptyset \quad (2) \text{ اتحادها جميعها يعطي } \Omega$$

$$H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 = \Omega$$

$$(3) P(H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4) = 1$$

ج- إذا كان ح 1 محتواه في ح 2 (ح 1 \supset ح 2) فينتج أن:

1_H  $1_H \supset 2_H$	2_H  $2_H \supset 1_H$
$2_H = 1_H \cap 2_H \quad \diamond$ $(2_H) \cup = (2_H \cap 1_H) \cup$ $1_H = 2_H \cup 1_H \quad \diamond$ $(1_H) \cup = (2_H \cup 1_H) \cup$	$1_H = 2_H \cap 1_H \quad \diamond$ $(1_H) \cup = (2_H \cap 1_H) \cup$ $2_H = 2_H \cup 1_H \quad \diamond$ $(2_H) \cup = (2_H \cup 1_H) \cup$

د- إذا كان ح 1 ، ح 2 حادثين مستقلين (حدوث أحدهما لا يؤثر في نتيجة الآخر)

$$(1) \quad (1_H) \cup (2_H) \cup = (2_H \cap 1_H) \cup$$

$$(2) \quad \text{ينتج أن ح 1 ، ح 2} \leftarrow \text{حادثين مستقلين لـ } (1_H \cap 2_H) = (1_H) \cup \times (2_H) \cup$$

$$1_H , 2_H \leftarrow \text{حادثين مستقلين لـ } (2_H \cap 1_H) = (2_H) \cup \times (1_H) \cup$$

$$1_H , 2_H \leftarrow \text{حادثين مستقلين لـ } (2_H \cap 1_H) = (2_H) \cup \times (1_H) \cup$$

من التجارب المستقلة ما يلي.

- إطلاق نار على هدف من قبل صيادين.

- سحب كرتين على التوالي مع الإرجاع.

تمارين متنوعة وشاملة على قوانين الاحتمالات

مثال (١): إذا كان $P(A) = 0.6$ أوجد $P(\bar{A})$

$$\text{الحل: } P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow 0.6 + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - 0.6 = 0.4$$

مثال (٢): إذا كان $P(A) = \frac{1}{5}$ أوجد $P(\bar{A})$

$$\text{الحل: } P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad \text{لكن } P(A) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5} \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{4}{5}$$

$$P(\bar{A}) = \frac{4}{5}$$

مثال (٣): إذا كان $P(A \cap B) = 0.9$ أوجد $P(A \cup B)$

$$\text{الحل: } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.9 - 0.1 = 0.8$$

مثال (٤): إذا كان $P(A) = 0.4$ و $P(B) = 0.6$ أوجد $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

$$\text{الحل: } P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.6 = 0.4$$

مثال (٥): : ليكن ل (ح) = 3 ل (ح) جد ع (Ω) إذا كان ع (ح) = 75 عنصر .

$$\text{الحل: ل (ح) = ع (ح) ، } \frac{\text{ع (ح)}}{\text{ع (Ω)}} = 75 \text{ ، نحتاج ل (ح)}$$

$$\text{ل (ح) + ل (ح) = 1}$$

$$3 \text{ ل (ح) + ل (ح) = 1} \Leftrightarrow 4 \text{ ل (ح) = 1} \Leftrightarrow \text{ل (ح) = } \frac{1}{4}$$

$$\text{إذن ل (ح) = } \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$75 \times 4 = \text{ع (Ω)} \times 3 \Leftrightarrow \frac{75}{\text{ع (Ω)}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{\text{ع (ح)}}{\text{ع (Ω)}} = \frac{75 \times 4}{3} = \text{ع (Ω)}$$

مثال (٦): : إذا كان ح 1 ، ح 2 حادثين منفصلين وكان ل (ح 1) = 0.2 ، ل (ح 2) = 0.6 .

أحسب : 1) ل (ح 1 ∩ ح 2) ، 2) ل (ح 1 ∪ ح 2)

الحل : 1) ل (ح 1 ∩ ح 2) = صفر لأن ح 1 ، ح 2 منفصلين .

$$2) \text{ ل (ح 1 ∪ ح 2) = ل (ح 1) + ل (ح 2) للحوادث المنفصلة}$$

$$\text{ل (ح 1 ∪ ح 2) = 0.2 + 0.4 = 0.6}$$

- 1- كيس فيه (12) كره منها (4) كرات حمراء والباقي بيضاء سحب من الكيس كرتان دفعة واحدة جد احتمال.
- (1) أن تكون الكرتان حمراوان. (2) أن تكون الكرتان من نفس اللون.

$$\begin{aligned} 2- \quad & P(H_1 \cap H_2) = 0.8 \quad P(H_1) = 0.4 \quad P(\bar{H}_2) = 0.3 \text{ جد} \\ & (1) P(H_1 \cap H_2) \quad (2) P(\overline{H_1 \cap H_2}) \quad (3) P(H_1 - H_2) \end{aligned}$$