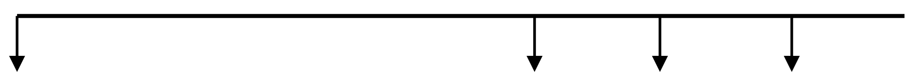
الفصل الخامس

جملة الدفعات والقيمة الحالية للدفعات

الدفعات هي مبالغ متساوية تفصل بينها فترات زمنية متساوية ويوجد نوعين من الدفعات هما:

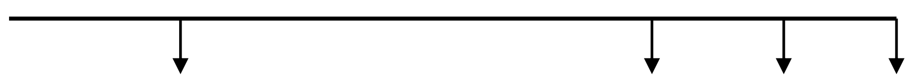
1.الدفعات العادية

وهي تلك الدفعات التي تدفع آخر كل فترة زمنية متساوية ويمكن التعبير عنها بالرسم التالي



2.الدفعات الفورية

وهي تلك الدفعات التي تدفع أول كل فترة زمنية متساوية.



قانون جملة الدفعات:

جملة المدفوعات $(S_n) = nK + \frac{n}{2}\left[K_1 r \frac{t_1}{12} + K_n r \frac{t_n}{12}\right]$

حيث أن:

n: عدد الدفعات = المدة كلها / مدة الدفعة الواحدة.

K_1 : قيمة الدفعة الأولى

K_n : قيمة الدفعة الأخيرة

r : معدل الفائدة

t_1 : مدة استثمار الدفعة الأولى.

t_n : مدة استثمار الدفعة الأخيرة

مثال 1

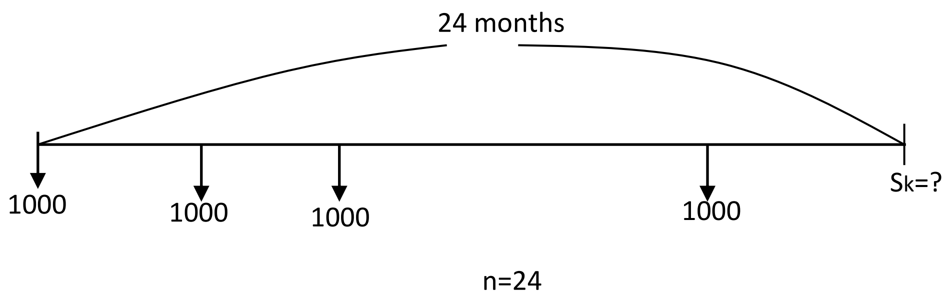
اودع موظف 1000 ريال شهرياً في حساب التوفير لمدة سنتان بمعدل فائدة 12% سنوياً، أحسب جملة المتكون له، إذا كان.

أ) الإيداع أول كل شهر.

ب) الإيداع آخر كل شهر.

الحل

(أ) إذا كان الإيداع أول كل شهر



$$S_k = nK + \frac{n}{2}\left[K_1 r \frac{t_1}{12} + K_n r \frac{t_n}{12}\right]$$

$$= 24 \times 1000 + \frac{24}{2}\left[1000 \times \frac{12}{100} \times \frac{24}{12} + 1000 \times \frac{12}{100} \times \frac{1}{12}\right]$$

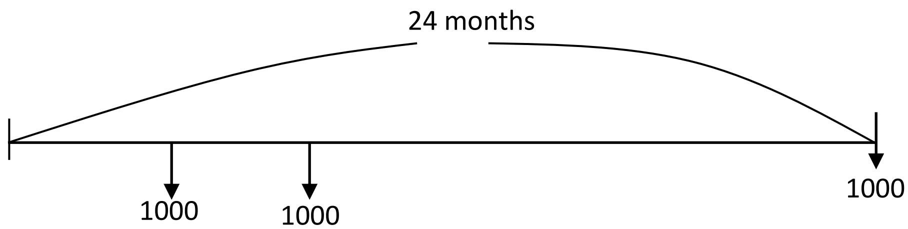
$$= 24000 + 12[240 + 10]$$

$$= 24000 + 12 \times 250$$

$$= 24000 + 3000$$

$$\underline{\mathbf{= 27000}}$$

(ب) إذا كان الإيداع آخر كل شهر



$$S_k = nK + \frac{n}{2}\left[K_1 r \frac{t_1}{12} + K_n r \frac{t_n}{12}\right]$$

$$= 24 \times 1000 + \frac{24}{2}\left[1000 \times \frac{12}{100} \times \frac{23}{12} + 1000 \times \frac{12}{100} \times \frac{0}{12}\right]$$

$$= 24000 + 12[230 + 0]$$

$$= 24000 + 12 \times 230$$

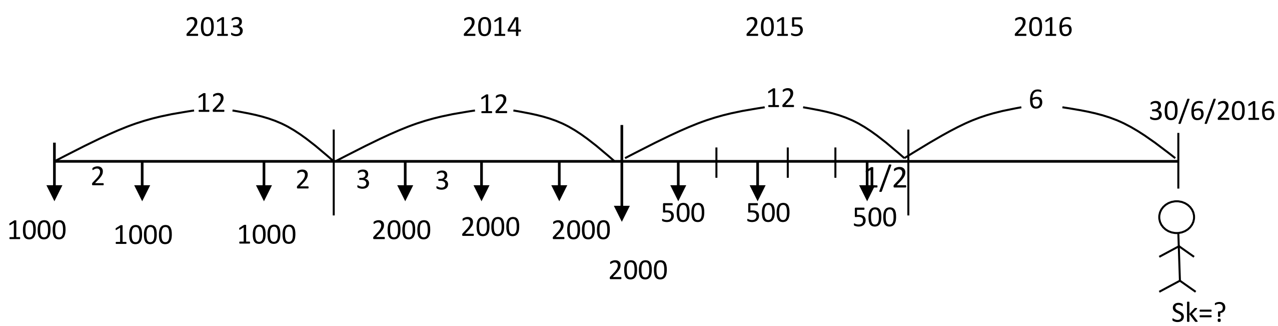
$$= 24000 + 2760$$

$$\underline{\boldsymbol{= 26760}}$$

مثال2

شخص يودع 1000 ريال أول كل شهرين خلال عام 2013 ، وضعف هذا المبلغ أخر كل ثلاثة شهور من عام 2014 ، ثم أخذ يودع نصف المبلغ منتصف كل شهر من كام 2015، فإذا علمت أن معدل الفائدة المستخدم في جميع الأحوال 10% سنوياً، أحسب جملة المتكون له في آخر يونيو 2016.

الحل



عدد الدفعات خلال 2013 = $\frac{12}{2}$ = 6

عدد الدفعات خلال عام 2014 = $\frac{12}{3}$ = 4

عدد الدفعات خلال عام 2015 = ← = 12

$$S_k = nK + \frac{n}{2}\left[K_1 r \frac{t_1}{12} + K_n r \frac{t_n}{12}\right]$$

$$= 6 \times 1000 + \frac{6}{2}\left[1000 \times \frac{10}{100} \times \frac{42}{12} + 1000 \times \frac{10}{100} \times \frac{32}{12}\right] + 4 \times 2000 + \frac{4}{2}\left[2000 \times \frac{10}{100} \times \frac{27}{12} + 2000 \times \frac{10}{100} \times \frac{18}{12}\right] + 12 \times 500 + \frac{12}{2}\left[500 \times \frac{10}{100} \times \frac{17.5}{12} + 500 \times \frac{10}{100} \times \frac{6.5}{12}\right]$$

$$= 6000 + 3[350 + 266.67] + 8000 + 2[450 + 300] + 6000 + 6[72.9 + 2]$$

$$= 6000 + 3 \times 616.67 + 8000 + 2 \times 750 + 6000 + 6 \times 99.9$$

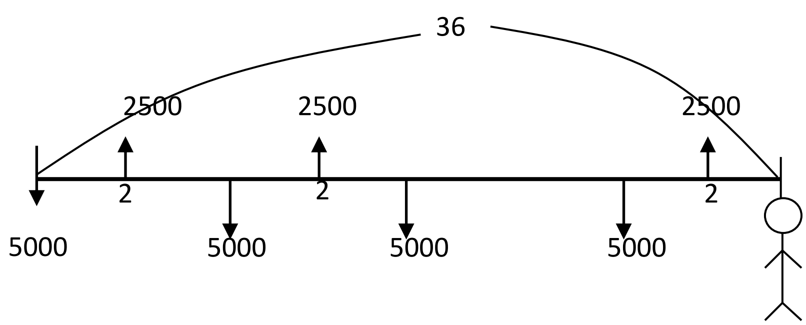
$$= 6000 + 1850 + 8000 + 1500 + 6000 + 599.4$$

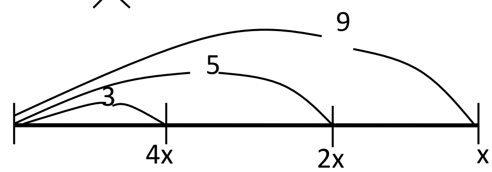
$$\underline{\mathbf{= 23949.4}}$$

مثال 3

تاجر يودع 5000 ريال أول كل شهر من الشهور الفردية، وكان يسحب نصف هذا المبلغ أول كل شهر من الشهور الزوجية وذلك لمدة ثلاثة سنوات، ثم سحب الرصيد المستحق له ودفعه مقدم ثمن شراء شقة تمليك ثمنها النقدي 200000 ريال، واتفق على سداد الباقي بموجب ثلاثة كمبيالات، القيمة الإسمية للكمبيالة الأولى ضعف القيمة الإسمية للكمبيالة الثانية، القيمة الإسمية للكمبيالة الثالثة نصف القيمة الإسمية للكمبيالة الثانية، وتستحق الكمبيالات الثلاثة بعد 3 ،5 ، 9 شهور على الترتيب، فإذا علمت أن معدل الفائدة المستخدم في جميع الأحوال 12% سنوياً، أحسب القيم الإسمية للكمبيالات الجديدة.

الحل





عدد الدفعات الإيداع$= \frac{36}{2} = 18$

عدد الدفعات السحب$= \frac{36}{2} = 18$

الرصيد المستحق نهاية 3 سنوات = جملة الإيداعات – جملة المسحوبات

$$S_k = nK + \frac{n}{2}\left[K_1 r \frac{t_1}{12} + K_n r \frac{t_n}{12}\right]$$

$$= 18 \times 5000 + \frac{18}{2}\left[5000 \times \frac{12}{100} \times \frac{36}{12} + 5000 \times \frac{12}{100} \times \frac{2}{12}\right] - 18 \times 2500 + \frac{18}{2}\left[2500 \times \frac{12}{100} \times \frac{35}{12} + 2500 \times \frac{12}{100} \times \frac{1}{12}\right]$$

$$= 90000 + 9[1800 + 100] - 45000 + 9[875 + 25]$$

$$= 90000 + 9 \times 1900 - 45000 + 9 \times 900$$

$$= 90000 + 17100 - 45000 + 8100$$

$$= 107100 - 53100$$

$$\underline{= \mathbf{54000}}$$

الباقي من ثمن الشقة $= 200000 - 54000 = 146000$

وهذا المبلغ المتبقي يعتبر قيمة حالية تجارية لكمبيالات الثلاثة

$$146000 = 4x\left(1 - \frac{12}{100} \times \frac{3}{12}\right) + 2x\left(1 - \frac{12}{100} \times \frac{5}{12}\right) + x\left(1 - \frac{12}{100} \times \frac{9}{12}\right)$$

$$146000 = 4x(.97) + 2x(.95) + x(.91)$$

$$146000 = 3.88x + 1.9x + .91x$$

$$146000 = 6.69x$$

$$x = \frac{146000}{6.69} = 21823.6$$

$$S_1 = 4x = 4(21823.6) = 87294$$

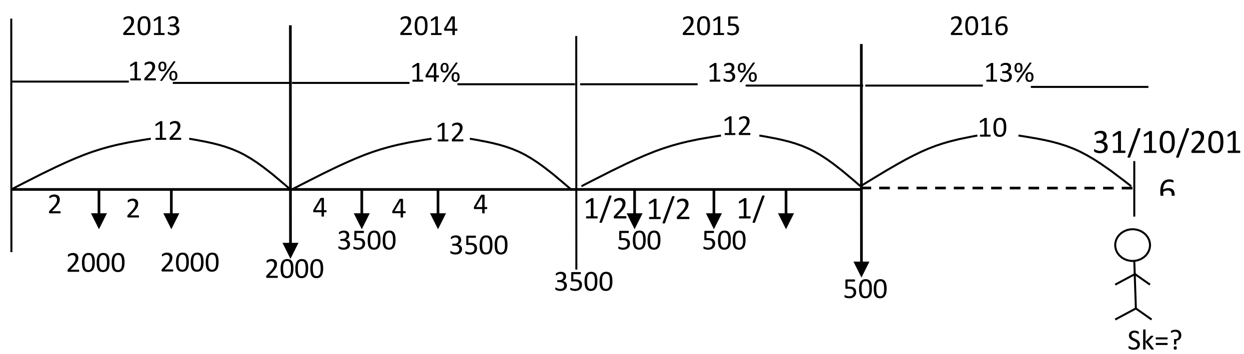
$$S_2 = 2x = 2(21823.6) = 43647$$

$$\underline{\boldsymbol{S_3 = x = 21823.6}}$$

مثال 4

أودع شخص 2000 ريال آخر كل شهرين خلال عام 2013، ثم اودع 3500 ريال أخر كل 4 شهور خلال عام 2014 ، ثم أودع 500 ريال أخر منتصف كل شهر خلال عام 2015، أحسب جملة المستحق له آخر أكتوبر 2016، إذا علمت أن معدل الفائدة خلال عام 2013 كان 12% ارتفع إلى 14% سنوياً، خلال عام 2014 ثم أصبح 13% سنوياً بعد ذلك

الحل



$$عدد\ الدفعات\ خلال\ عام\ 2013 = \frac{12}{2} = 6$$

$$عدد\ الدفعات\ خلال\ عام\ 2014 = \frac{12}{4} = 3$$

$$عدد\ الدفعات\ خلال\ عام 2005 = 2 \times 12 = 24$$

ملحوظة:

يتم إيجاد جملة الدفعات بالنسبة لكل سنة بمفردها نظراً لتغير المعدلات، حيث تم إيجاد الجملة لكل سنة على مراحل، المرحلة الأولى كدفعات ثم جملة المبلغ المتكون لهذه الدفعات خلال الفترة الباقية بالمعدلات الأخرى كما يلي:

<u>جملة دفعات عام 2013 في آخر أكتوبر 2016</u>

$$S_k = nK + \frac{n}{2}\left[K_1 r \frac{t_1}{12} + K_n r \frac{t_n}{12}\right]$$

$$= 6 \times 2000 + \frac{6}{2}\left[2000 \times \frac{12}{100} \times \frac{10}{12} + 2000 \times \frac{12}{100} \times \frac{0}{12}\right]$$

$$+ 12000 \times \frac{14}{100} \times 1 + 12000 \times \frac{13}{100} \times \frac{22}{12}$$

$$= 12000 + 3[200 + 0] + 1680 + 2860$$

$$= 12000 + 600 + 1680 + 2860$$

$$\underline{\mathbf{= 17140}}$$

<u>جملة دفعات عام 2014 في آخر أكتوبر 2016</u>

$$S_k = nK + \frac{n}{2}\left[K_1 r \frac{t_1}{12} + K_n r \frac{t_n}{12}\right]$$

$$= 3 \times 3500 + \frac{3}{2}\left[3500 \times \frac{14}{100} \times \frac{8}{12} + 3500 \times \frac{14}{100} \times \frac{0}{12}\right]$$

$$+ 10500 \times \frac{13}{100} \times \frac{22}{12}$$

$$= 10500 + 1.5[326.67 + 0] + 2502.5$$

$$= 10500 + 1.5(326.67) + 2502.5$$

$$= 10500 + 490 + 2502.5$$

$$\underline{\mathbf{= 13492.5}}$$

<u>جملة دفعات عام 2015 في أخر أكتوبر 2016</u>

$$S_k = nK + \frac{n}{2}\left[K_1 r \frac{t_1}{12} + K_n r \frac{t_n}{12}\right]$$

$$= 24 \times 500 + \frac{24}{2}\left[500 \times \frac{13}{100} \times \frac{21.5}{12} + 500 \times \frac{13}{100} \times \frac{10}{12}\right]$$

$$= 12000 + 12[116.5 + 54.2]$$

$$= 12000 + 12 \times 170.7$$

$$= 12000 + 2048.4 = 14048.4$$

$$= 17140 + 13492.5 + 14048.4$$

$$\underline{\mathbf{= 44680.9}}$$

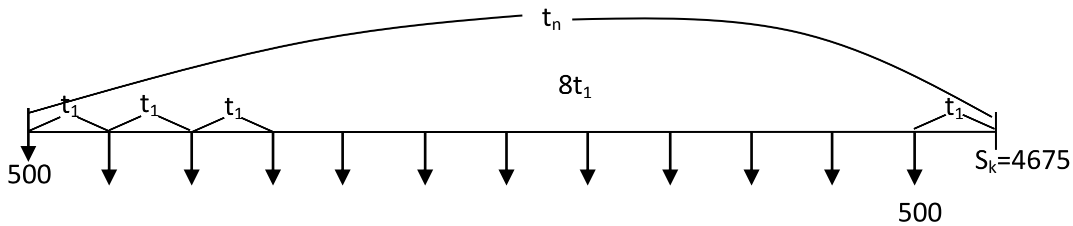
<u>مثال5</u>

أودع شخص ثمانية دفعات قيمة كل منها 500 ريال في أحد البنوك التي تحسب فوائد بسيطة بمعدل 15% سنوياً، وفي نهاية مدة الإيداع وجد أن جملة المتكون له بلغ 4675 ريال احسب مدة الدفعة الواحدة، ومدة الإيداع كلها.

الحل

<u>ملحوظة:</u>

إذا لم يحدد نوع الدفعة عادية أم فورية وكانت دفعات إيداع، نعتبرها فورية.



$$S_k = nK + \frac{n}{2}\left[K_1 r \frac{t_1}{12} + K_n r \frac{t_n}{12}\right]$$

$$4675 = 8 \times 500 + \frac{8}{2}\left[500 \times \frac{15}{100} \times \frac{t_1}{12} + 500 \times \frac{15}{100} \times \frac{8t_1}{12}\right]$$

$$4675 = 4000 + 4[6.25t_1 + 0] + 50t_1]$$

$$4675 = 4000 + 4(56.25t_1)$$

$$4675 = 4000 + 225t_1$$

$$4675 - 4000 = 225t_1$$

$$675 = 225t_1$$

$$t_1 = \frac{675}{225} = \boldsymbol{3\ months}$$

$$t = 8t_1$$
$$= 8 \times 3 = 24 months$$