جامعة الملك سعود | الاختبار النهائي | الفصل الثاني 1437/1436هـ
كلية العلوم- قسم الرياضيات | المقرر 207 ريض | الزمن: ثلاث ساعات

---

**السؤال الأول (8 درجات)**

لتكن الدالة $f$ في متغيرين $x$ و $y$ معرفة بالشكل الآتي:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^4+y^2} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. ما هو نطاق الدالة $f$ ؟ 1
2. هل أن الدالة $f$ متصلة عند النقطة $(0,0)$؟ 1,5
3. أثبت أن الدالة $f$ متصلة عند كل نقطة $(x,y)\neq(0,0)$. 1,5
4. ابحث عن المشتقات الجزئية الأولى $f_x$ و $f_y$ للدالة $f$ عند النقطة $(0,0)$, إن وجدت 1,5
5. جد كل من دالتي المشتقات الجزئية الأولى $f_x$ و $f_y$. 1,5
6. ابحث عن كل من المشتقات الجزئية الثانية $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ عند النقطة $(0,0)$ إن وجدت. 1

**السؤال الثاني: (12 درجة)**

1. لتكن $f$ الدالة المعرفة بالشكل الآتي: $f(x,y)=y^4+2x^2+2xy^2-2y^2-2x$
   - أ- أثبت أن النقاط الحرجة للدالة $f$ هي $(0,-1),(0,1),\left(\frac{1}{2},0\right)$. 2
   - ب- أوجد القيم القصوى المحلية والنقاط السرجية للدالة $f$, إن وجدت. 2
   - ت- أثبت أن $h(x,y)=f(x,y)-f(0,1)=(y^2-1+x)^2+x^2$. 1
   - ث- استنتج أن كل قيمة قصوى محلية للدالة $f$ هي قيمة قصوى مطلقة. 1
2. لتكن $f$ الدالة المعرفة بالشكل الاتي: $g(x,y)=x^2+y^2+4x-2y+2$
   ولتكن $R$ هي المنطقة المحدودة بالمستقيمات $x=0$ و $y=0$ و $x+y=5$
   - أ- ارسم المنطقة $R$. 1
   - ب- حدد القيم القصوى المحلية للدالة $g$ إن وجدت داخل المنطقة $R$. 1
   - ج- حدد القيم القصوى المحلية للدالة $g$ على حدود المنطقة $R$. 2
   - د- دوّن جميع النقاط الحرجة و القيم التي حصلت عليها في جدول و استنتج القيم القصوى المطلقة للدالة $g$ في المنطقة المغلقة $R$. 2

**السؤال الثالث: ( 4 درجات)**

هل توجد $f$ دالة في متغيرين $x$ و $y$ مشتقاتها الجزئية من الرتبة الثانية متصلة عند كل نقطة من نطاقها حيث

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 3y \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y$$

**السؤال الرابع (8 درجات)**

1. احسب التكامل التالي: $\iint_R (6x^2 y - 4)dA$ (4)

حيث $R = \{(x, y): 0 \le x \le 2 \text{ و } 0 \le y \le 2\}$

2. احسب التكامل التالي: (4)

$$\iint_R (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \, dA$$

حيث $R$ هي المنطقة المستوية المحدودة:

$R = \{(x, y): -2 \le x \le 2 \text{ و } 0 \le y \le \sqrt{4 - x^2}\}$.

**السؤال الخامس ( 8 درجات)**

1. حدد أي من المتتابعات التالية متقاربة و أيها متباعدة و أوجد نهاية المتقاربة منها مع الاثبات. (1) × 4

(أ) $\left\{\left(-\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ (ب) $\left\{\left(\frac{7}{6}\right)^n\right\}$ (ت) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ (ث) $\left\{\frac{\cos(n)}{n}\right\}$

2. اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ متسلسلة و المتتابعة $\{s_n\}$ حيث أن $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(1) أ- جد الحدود الأربعة الأولى لمتتابعة المجاميع الجزئية.

(1) ب- جد قيمة كل من a و b بحيث $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{(n+1)}$.

(2) ت- أثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة و جد مجموع المتسلسلة.

(1) ريض 207 النهائي الفصل الثاني 36/37 هـ

س 1

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1) $D_f=\mathbb{R}^2$ نطاق الدالة $f$.

2. $f$ ليست متصلة عند النقطة $(0,0)$ لأن:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}=\pm\infty$$

النهاية غير موجودة عندما $(x,y)$ تقترب من $(0,0)$.

3. الدالة: $(x,y)\mapsto \dfrac{x^3}{x^4+y^2}$ هي دالة كسرية متصلة عند كل نقطة من نطاقها $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ وبالتالي $f$ متصلة عند كل نقطة $(x,y)\neq(0,0)$

4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{x^4}}{x}=+\infty$$

إذا $f_x(0,0)$ غير موجودة

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0$$

إذا $f_y(0,0)=0$

5. $(x,y)\neq(0,0)$

$$f_x(x,y)=\frac{3x^2(x^4+y^2)-x^3(4x^3)}{(x^4+y^2)^2}=\frac{x^2(-x^4+3y^2)}{(x^4+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{-2y(x^3)}{(x^4+y^2)^2}=-\frac{2x^3y}{(x^4+y^2)^2}$$

6.

$$\lim_{y\to 0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y-0}=$$

بما أن $f_x(0,0)$ غير موجودة فإن $f_{xy}(0,0)$ غير موجودة

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0$$

إذا

$f_{yx}(0,0)=0$

④ $f(x,y) = y^4 + 2x^2 + 2xy^2 - 2y^2 - 2x$ ⓵ حل

أ. النقاط الحرجة للدالة f: بما أن f لها مشتقات أولى عند كل نقطة، فإن النقاط الحرجة للدالة f تحقق:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y^2 - 2 = 0 \\ 4y^3 + 4xy - 4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1 - y^2) \\ 4y(y^2 + x - 1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1-y^2) \\ y = 0 \text{ أو } x = 1 - y^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

وبالتالي فإن النقاط الحرجة للدالة f هي: $(0,1), (0,-1), (\frac{1}{2},0)$

ب) لدينا:

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 4 & 4y \\ 4y & 12y^2 + 4x - 4 \end{bmatrix}$$

فإن

$$g(x,y) = \det H_f(x,y) = 16\left[(3y^2 + x - 1) - y^2\right] = 16\left(2y^2 + \cancel{x-1}\right)$$

وبالتالي: عند النقطة $(0,-1), (0,1)$

$$g(0,1) = g(0,-1) = 16 > 0$$

ولدينا $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-1) = 4$

وبالتالي $f(0,1) = f(0,-1) = -1$ هي قيمة صغرى محلية للدالة f عند النقطة $(0,1)$ وعند النقطة $(0,-1)$.

ولدينا $g(\frac{1}{2},0) = -8 < 0$ فإن النقطة $(\frac{1}{2},0)$ هي نقطة سرجية للدالة f.

(ج)

$$h(x,y) = f(x,y) - f(0,1) = y^4 + 2x^2 + 2xy^2 - 2y^2 - 2x - (-1)$$

$$= (y^4 - 2y^2 + 1) + 2x^2 + 2xy^2 - 2x$$

$$= (y^2 - 1)^2 + 2x(y^2 - 1) + x^2 + (x^2)$$

$$= (y^2 - 1 + x)^2 + x^2$$

(ث) بما أن لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) - f(0,1) = \cdots \geq 0$$

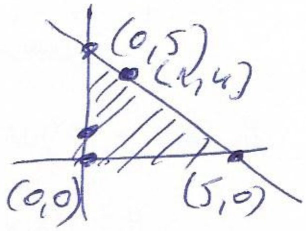
فإن $f(x,y) \geq f(0,1)$ لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

فإن $f(0,1) = f(0,-1) = -1$ هي قيمة صغرى مطلقة للدالة f عند النقطة

③ $g(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2$ (.2) 2س

$R$ : $x + y = 5$ , $y = 0$ , $x = 0$

(أ)




(ب) داخل المنطقة R:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4 = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$(-2,1) \notin R$ إذن

(ج)

$g(0,5) = 17$ , $g(5,0) = 47$ , $g(0,0) = 2$

: $y = 0$

$f(x,0) = x^2 + 4x + 2$

$f_x(x,0) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ; $(-2,0) \notin R$

: $x = 0$

$f(0,y) = y^2 - 2y + 2$

$f_y(0,y) = 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = 1} \Rightarrow (0,1) \in R$

$\boxed{f(0,1) = 1}$

$y = 5 - x \Leftrightarrow x + y = 5$

$f(x, 5-x) = x^2 + (5-x)^2 + 4x - 2(5-x) + 2 = 2x^2 - 4x + 17$

$f_x(x,5-x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ , $y = 4$

$f(1,4) = 15$

ذ

| $(x,y)$ | $(0,0)$ | $(0,5)$ | $(5,0)$ | $(0,1)$ | $(1,4)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x,y)$ | 2 | 17 | 47 | 1 | 15 |

47 القيمة العظمى المطلقة للدالة f بالقيد داخل أو على الحدود المنطقة R

عند النقطة (5,0)

1 القيمة الصغرى المطلقة

(4) س3

نفرض أن $f$ توجد حيث أنها تحقق الشرط أن لها مشتقات
مشتقات جزئية ثانية متصلة و

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+3y$$

فإن

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

ولدينا

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2$$

وهذا تناقض وبالتالي لا توجد دالة $f$ تحقق الشروط المذكورة

س4

1.

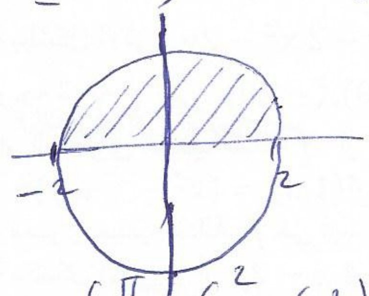
$$\iint_R (6x^2y-4)\,dA = \int_0^2\int_0^2 (6x^2y-4)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 2x^3y-4x\Big]_0^2 dy = \int_0^2 (16y-8)\,dy = 8y^2-8y\Big]_0^2$$

$$= 8(y^2-y)\Big]_0^2 = 8(2) = 16 \Rightarrow \boxed{\iint_R (6x^2y-4)\,dA = 16}$$

2.

$$R = \{(x,y) : -2 \le x \le 2 \,,\; 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}\}$$




$$\iint_R (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dA = \int_0^{\pi}\int_0^2 (r^2)^{\frac{3}{2}}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^2 r^4\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi} \frac{r^5}{5}\Big]_0^2 d\theta = \int_0^{\pi} \frac{32}{5}\,d\theta$$

$$\boxed{\iint_R (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{32}{5}\pi}$$

1

(أ) لكل $n \geq 2$ لدينا: $0 \leq \left|-\frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{2}$

فإن $0 \leq \left(-\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

وبما أن $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأنها متتالية هندسية $-1 < r = \frac{1}{2} < 1$

فإن $\lim \left(\left|-\frac{1}{n}\right|\right)^n = 0$ وبالتالي $\lim \left(-\frac{1}{n}\right)^n = 0$

فإن المتتالية متقاربة وتتقارب إلى 0.

(ب) المتتالية $\left\{\left(\frac{7}{6}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ متباعدة لأنها متتالية هندسية و $r = \frac{7}{6} > 1$

(ج) لدينا $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$$\lim_{x\to\infty} \ln f(x) = \lim_{x\to\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$$

فإن $\lim f(x) = e^1 = e$ وبالتالي المتتالية $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ متقاربة إلى $e^1$

(د) لدينا $\lim \frac{1}{n} = 0$ و $\{\cos n\}$ متتالية محدودة

فإن $\lim \frac{1}{n}\cos n = 0$ وبالتالي $\lim \frac{\cos n}{n} = 0$

2. أ) $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12}$

$= \frac{3}{4}$

$S_4 = S_3 + \frac{1}{4(5)} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

(ب)

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

وبالتالي $\sum a_n = \lim S_n = 1$