جامعة الملك سعود	الاختبار النهائي	الفصل الثاني 1433/1432هـ
كلية العلوم- قسم الرياضيات	في المقرر 207 ريض	الزمن: ثلاث ساعات

أسم الطالب	
الرقم الجامعي	
رقم الشعبة	
مدرس المقرر	

التمرين الأول (12 درجة)

لتكن الدالة في المتغيرين x و y معرفة بالشكل التالي:

$$f(x\,,y\,) = \begin{cases} xy\,\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\ \neq\ (0\,,0) \\ 0 & ;\ (x,y) = (0\,,0) \end{cases}$$

1. ما هو نطاق الدالة f ؟
2. برهن أن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
3. استنتج أن الدالة f متصلة عند كل نقطة من نطاقها.
4. ابحث عن المشتقات الجزئية الأولى للدالة f عند النقطة $(0,0)$.
5. ابحث عن كل من المشتقات الجزئية الاولي f_x و f_y عند كل نقطة من نطاقها.
6. ابحث عن المشتقات الجزئية الثانية f_{xy} و f_{yx} عند النقطة $(0,0)$.
7. استنتج أن أحد الدالتين $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ غير متصلة عند النقطة $(0,0)$.

التمرين الثاني (12 درجة)

1. لتكن f الدالة المعرفة بالشكل التالي: $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$

أ - جد النقطة الحرجة الوحيدة للدالة f .

ب - حدد القيمة العظمى أو الصغرى المحلية للدالة f .

ت - أثبت أن القيمة القصوى المحلية للدالة f هي قيمة قصوى مطلقة .

2. لتكن R هي المنطقة المحدودة بالمستقيمات $x = -2$ و $= 4$ و $y = -1$ و $y = 3$

أ - ارسم المنطقة R .

ب - حدد القيمة العظمى أو الصغرى المحلية للدالة f إن وجدت داخل المنطقة R .

ت - حدد القيم القصوى المحلية للدالة f على حدود المنطقة R .

ث - دوّن جميع النقاط الحرجة و القيم التي حصلت عليها في جدول و استنتج القيم القصوى المطلقة للدالة f في المنطقة المغلقة R .

التمرين الثالث (12 درجة)

1. احسب التكامل التالي بطريقتين :

$$\iint_{R} (3x^2 \; - 4y^3)\mathrm{dA}$$

حيث $R = \{(x,y): 1 \le x \; \le 2 \;و\; 0 \le y \; \le 2\}$

2. احسب التكامل التالي :

$$\iint_{R} xy \,\mathrm{dA}$$

حيث R هي المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y = x^3$

التمرين الرابع (14 درجة)

1. حدد أي من المتتابعات التالية متقاربة و أيها متباعدة و أوجد نهاية المتقاربة منها مع الاثبات.

(أ) $\{(-1)^n\}$ (ب) $\left\{\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}$ (ت) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ (ث) $\left\{\frac{\sin(n)}{n}\right\}$

2. حدد أي من المتسلسلات التالية متقاربة و أيها متباعدة و أوجد نهاية المتقاربة منها مع الاثبات.

(أ) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ (ب) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ (ت) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (ث) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$

3. اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ متسلسلة و المتتابعة $\{s_n\}$ حيث أن $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

أ - جد الحدود الأربعة الأولى لمتتابعة المجاميع الجزئية.

ب - جد قيمة كل من a و b بحيث $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{(n+1)}$.

ت - أثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة و جد مجموع المتسلسلة .

الله ولي التوفيق

جامعة الملك سعود	**الاختبار النهائي**	**الفصل الأول 1434/1433هـ**
كلية العلوم- قسم الرياضيات	**في المقرر 207 ريض**	**الزمن: ثلاث ساعات**

التمرين الأول (8 درجات)

1. حدد أي من المتتابعات التالية متقاربة و أيها متباعدة و أوجد نهاية المتقاربة منها مع الاثبات.

(أ) $\left\{\left(-\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ (ب) $\left\{\left(\frac{7}{6}\right)^n\right\}$ (ت) $\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right\}$ (ث) $\left\{\frac{\cos(n)}{n}\right\}$

2. اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ متسلسلة و المتتابعة $\{s_n\}$ حيث أن $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

أ- جد الحدود الأربعة الأولى لمتتابعة المجاميع الجزئية.

ب- جد قيمة كل من a و b بحيث $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{(n+1)}$.

ت- أثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة و جد مجموع المتسلسلة .

التمرين الثاني (12 درجة)

1. احسب التكامل التالي:

$$\iint_R (3x^2 y - 4y^3) dA$$

حيث $R = \{(x, y): 1 \le x \le 2$ و $0 \le y \le 2\}$

2. احسب التكامل التالي :

$$\iint_R (x + y)\, dA$$

حيث R هي المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y = x$

3. لتكن f الدالة المعرفة بالشكل التالي: $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{3/2}$

أ- باستعمال الاحدثيات القطبية أثبت أن $f(x, y) = r^3$

ب- ارسم R المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = 0$ و $y = \sqrt{1 - x^2}$ و $x = -1$ و $x = 1$

ت- احسب التكامل التالي: $\iint_R (x^2 + y^2)^{3/2} dA$

التمرين الثالث (6 درجات)

لتكن الدالة في المتغيرين x و y معرفة بالشكل التالي:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. ما هو نطاق الدالة f ؟
2. برهن أن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.
3. استنتج أن الدالة f متصلة عند كل نقطة من نطاقها.
4. ابحث عن المشتقات الجزئية الأولى للدالة f عند النقطة $(0,0)$.
5. ابحث عن كل من المشتقات الجزئية الاولي f_x و f_y عند كل نقطة من نطاقها.
6. ابحث عن المشتقات الجزئية الثانية f_{xy} و f_{yx} عند النقطة $(0,0)$.

التمرين الرابع (4 درجات)

اذا كانت $u=f(x,y)$ دالة في المتغيرين x و y قابلة للتفاضل عند (x,y) و كانت $(x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta)$.

1. برهن على أن

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} \quad و \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}$$

2. برهن على أن

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

التمرين الخامس (10 درجة)

1. لتكن f الدالة المعرفة بالشكل التالي: $f(x,y)=x^3+2xy+y^2$

أ- أوجد النقاط الحرجة للدالة f .

ب- أوجد القيم العظمى و الصغرى المحلية والسرجية إن وجدت للدالة f .

ت- أثبت أن القيمة القصوى المحلية للدالة f هي ليست قيمة قصوى مطلقة (بالامكان أن نحسب $f(1,1)$ و $f(-1,1)$).

2. لتكن R هي المنطقة المحدودة بالمستقيمات $x=0$ و $x=2$ و $y=0$ و $y=-3$

أ- ارسم المنطقة R .

ب- حدد القيمة العظمى أو الصغرى المحلية للدالة f إن وجدت داخل المنطقة R .

ت- حدد القيم القصوى المحلية للدالة f على حدود المنطقة R .

ث- دوّن جميع النقاط الحرجة و القيم التي حصلت عليها في جدول و استنتج القيم القصوى المطلقة للدالة f في المنطقة المغلقة R .

الله ولي التوفيق

جامعة الملك سعود   الاختبار النهائي   الفصل الثاني 1434/1433هـ

كلية العلوم- قسم الرياضيات   في المقرر 207 ريض   الزمن: ثلاث ساعات

السؤال الأول (8 درجات)

1- لنفرض أن f دالة في المتغيرين x و y و أن مشتقاتها الجزئية من الرتبة الثانية متصلة. اذا كانت $w = f(x,y)$ و كانت $x = u + v$ و $y = u - v$

فبرهن أن $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u\, \partial v}$

2- لتكن f دالة في المتغيرين x و y مجالها D ومشتقاتها الجزئية الأولى متصلة و لتكن f متجانسة من الدرجة k (لكل نقطة (x,y) في D فإن (tx,ty) في D و $f(tx,ty) = t^k f(x,y)$ لكل عدد حقيقي $t > 0$).

برهن أن $xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = kf(x,y)$ لكل نقطة (x,y) في D .

السؤال الثاني (12 درجة)

لتكن f دالة في المتغيرين x و y معرفة بالشكل التالي:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. ما هو مجال (نطاق) الدالة f ؟
2. برهن أن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة .
3. برهن أن f متصلة عند كل نقطة $(x,y) \neq (0,0)$.
4. جد المشتقات الجزئية الأولى للدالة f عند النقطة $(0,0)$ إن وجدت.
5. جد المشتقات الجزئية الاولى f_x و f_y عند كل نقطة $(x,y) \neq (0,0)$.
6. جد المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية f_{xy} و f_{yx} عند النقطة $(0,0)$ إن وجدت.
7. استنتج أن إحدى الدالتين $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ غير متصلة عند النقطة $(0,0)$.

السؤال الثالث (12 درجة)

1. لتكن f الدالة المعرفة بالشكل التالي: $f(x,y) = x^3 - 3x + 3xy^2$
   - أ- جد النقاط الحرجة للدالة f .
   - ب- جد القيم العظمى و الصغرى المحلية و السرجية للدالة f إن وجدت.
   - ج- أثبت أن القيم القصوى المحلية للدالة f هي قيم قصوى ليست مطلقة .

2. لتكن R هي المنطقة المحدودة بالمستقيمات $x = 0$ و $y = -1$ و $x + y = 3$
   - أ- ارسم المنطقة R .
   - ب- حدد القيم القصوى المحلية للدالة f إن وجدت داخل المنطقة R .
   - ج- حدد القيم القصوى المحلية للدالة f على حدود المنطقة R .
   - د- دوّن جميع النقاط الحرجة و القيم التي حصلت عليها في جدول و استنتج القيم القصوى المطلقة للدالة f في المنطقة المغلقة R .

السؤال الرابع (8 درجات)

1. احسب التكامل التالي:

$$\iint_R (x+y)\, dA$$

حيث R هي المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y = x^3$

2. استعمل الإحداثيات القطبية واحسب التكامل التالي:

$$\iint_R (x^2+y^2)\, dA$$

حيث R هي المنطقة المستوية المحدودة: $R = \{(x,y): y \ge 0$ و $x^2 + y^2 \le 1\}$.

الله ولي التوفيق

جامعة الملك سعود	**الاختبار النهائي**	**الفصل الأول 1435/1434هـ**
كلية العلوم- قسم الرياضيات	**في المقرر 207 ريض**	**والزمن ثلاث ساعات**

السؤال الأول (12 درجة)

لتكن الدالة في المتغيرين x و y معرفة بالشكل التالي:

$$f(x\,,y\,) = \begin{cases} xy\,\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} & ; \ (x,y)\neq(0\,,0) \\ 0 & ; \ (x,y)=(0\,,0) \end{cases}$$

1. ما هو نطاق الدالة f ؟
2. برهن أن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.
3. استنتج أن الدالة f متصلة عند كل نقطة من نطاقها.
4. ابحث عن المشتقات الجزئية الأولى للدالة f عند النقطة $(0,0)$.
5. ابحث عن كل من المشتقات الجزئية الاولى f_x و f_y عند كل نقطة من نطاقها.
6. ابحث عن المشتقات الجزئية الثانية f_{xy} و f_{yx} عند النقطة $(0,0)$.
7. استنتج أن إحدى الدالتين $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ غير متصلة عند النقطة $(0,0)$.

السؤال الثاني (4 درجات)

لنفرض أن f دالة في متغيرين x و y و أن مشتقاتها الجزئية من الرتبة الثانية متصلة. إذا كانت $w=f(x,y)$ و كانت $x=3u+2v$ و $y=6u-4v$ فبرهن ان

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=6\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\,24\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

السؤال الثالث (8 درجات)

لتكن f الدالة المعرفة بالشكل الآتي: $f(x,y)=x^4+2\,y^2+2\,x^2y-2\,x^2-2y$

1. أثبت أن النقاط الحرجة للدالة f هي $(-1,0),(1,0),\left(0,\frac{1}{2}\right)$.
2. حدد القيم العظمى أو الصغرى المحلية للدالة f إن وجدت.
3. أثبت أن $h(x,y)=\ f(x,y)-\ f(1,0)=(x^2-1+y)^2+\ y^2$.
4. استنتج أن كل قيمة قصوى محلية للدالة f هي قيمة قصوى مطلقة.
5. هل توجد قيمة عظمى مطلقة للدالة f؟

السؤال الرابع (8 درجات)

1. احسب التكامل التالي بطريقتين :

$$\iint_{R} (3x^2 \ - 4y^3) dA$$

حيث $R = \{(x,y): 1 \le x \ \le 2$ و $0 \le y \ \le 2\}$

2. استعمل الإحداثيات القطبية واحسب التكامل التالي:

$$\iint_{R} (x^2 + y^2) \ dA$$

حيث R هي المنطقة المستوية المحدودة: $R = \{(x,y): y \ge 0$ و $x^2 + y^2 \le 1\}$.

السؤال الخامس (8 درجات)

1. لكل من المتتابعات التالية بين فيما إذا كانت متقاربة أو متباعدة و أوجد نهايتها إن كانت متقاربة (مع التعليل).

(أ) $\{(-1)^n\}$ (ب) $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ (ت) $\{2^n\}$ (ث) $\left\{\frac{\sin(n)}{n}\right\}$

2. لكل من المتسلسلات التالية بين فيما إذا كانت متقاربة أو متباعدة و أوجد نهايتها إن كانت متقاربة (مع التعليل).

(أ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ (ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ (ت) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(ث) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$

جامعة الملك سعود	الاختبار النهائي	الفصل الثاني 1435/1434هـ
كلية العلوم- قسم الرياضيات	في المقرر 207 ريض	الزمن: ثلاث ساعات

السؤال الأول (8 درجات)

لتكن f دالة في المتغيرين x و y معرفة بالشكل التالي:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{x^2+y^4} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. ما هو مجال (نطاق) الدالة f ؟
2. برهن أن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة .
3. برهن أن f متصلة عند كل نقطة $(x,y)\neq(0,0)$.
4. جد المشتقات الجزئية الأولى للدالة f عند النقطة $(0,0)$ إن وجدت.
5. جد المشتقات الجزئية الاولى f_x و f_y عند كل نقطة $(x,y)\neq(0,0)$.

السؤال الثاني (8 درجات)

1- لنفرض أن f دالة في المتغيرين x و y و أن مشتقاتها الجزئية من الرتبة الثانية متصلة. اذا كانت $w=f(x,y)$ و كانت $x=u+v$ و $y=u-v$ فبرهن أن $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

2- لتكن f دالة في المتغيرين x و y مجالها D ومشتقاتها الجزئية الأولى متصلة و لتكن f متجانسة من الدرجة k (لكل نقطة (x,y) في D فإن (tx,ty) في D و $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$ لكل عدد حقيقي $t>0$).

برهن أن $xf_x(,y)+yf_y(x,y)=kf(x,y)$ لكل نقطة (x,y) في D .

السؤال الثالث (4 درجات)

حدد أي من المتتابعات التالية متقاربة و أيها متباعدة و أوجد نهاية المتقاربة منها مع الاثبات.

(أ) $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ (ب) $\left\{\left(\frac{7}{6}\right)^n\right\}$ (ت) $\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right\}$ (ث) $\left\{\frac{\cos(n)}{n}\right\}$

السؤال الرابع (12 درجة)

1. لتكن f الدالة المعرفة بالشكل التالي: $f(x,y) = x^3 - 3x + 3x\,y^2$

أ- أثبت أن النقاط الحرجة للدالة f هي $(0,1), (1,0), (-1,0)$ و $(0,-1)$.

ب- جد القيم العظمى و الصغرى المحلية و السرجية للدالة f إن وجدت.

ج- أثبت أن القيم القصوى المحلية للدالة f هي قيم قصوى ليست مطلقة .

2. لتكن R هي المنطقة المحدودة بالمستقيمات $x = -\frac{1}{2}$ و $y = -2$ و $x + y = 3$

أ- ارسم المنطقة R .

ب- حدد القيم القصوى المحلية للدالة f إن وجدت داخل المنطقة R .

ج- حدد القيم القصوى المحلية للدالة f على حدود المنطقة R .

د- دوّن جميع النقاط الحرجة و القيم التي حصلت عليها في جدول و استنتج القيم القصوى المطلقة للدالة f في المنطقة المغلقة R .

السؤال الخامس (8 درجات)

1- احسب التكامل التالي بطريقتين :

$$\iint_R (6x^2\, y - 4x\, y)\,dA$$

حيث $R = \{(x,y): 0 \le x \le 2 \text{ و } 0 \le y \le 2\}$

2- استعمل الإحداثيات القطبية واحسب التكامل التالي:

$$\iint_R (x^2 + y^2 + 1)\, dA$$

حيث R هي المنطقة المستوية المحدودة: $R = \{(x,y): x \ge 0 \text{ و } x^2 + y^2 \le 1\}$.

جامعة الملك سعود | الاختبار النهائي | الفصل الأول 1436/1435هـ
كلية العلوم- قسم الرياضيات | في المقرر 207 ريض | والزمن ثلاث ساعات

السؤال الأول (8 درجات)

لتكن f دالة في المتغيرين x و y معرفة بالشكل التالي:

$$f(x\,,y\,) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & ;\ (x,y)\ \neq\ (0\,,0) \\ 0 & ;\ (x,y) = (0\,,0) \end{cases}$$

1. ما هو مجال (نطاق) الدالة f ؟
2. برهن أن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة .
3. برهن أن f متصلة عند كل نقطة $(x\,,y)\ \neq\ (0\,,0)$.
4. جد المشتقات الجزئية الأولى للدالة f عند النقطة $(0,0)$ إن وجدت.
5. جد المشتقات الجزئية الاولى f_x و f_y عند كل نقطة $(x\,,y)\ \neq\ (0\,,0)$.

السؤال الثاني (12 درجة)

1. لتكن f الدالة المعرفة بالشكل التالي: $f(x,y) = x^4 - 4x^3 + 8\text{xy} + 2\ \text{y}^2$
   أ- أثبت أن النقاط الحرجة للدالة f هي: $(0,0)$, $(-1,2)$و$(4,-8)$
   ب- جد القيم العظمى و الصغرى المحلية والنقاط السرجية للدالة f إن وجدت.
   ج- أثبت أن القيم القصوى المحلية للدالة f هي قيم قصوى ليست مطلقة .

2. لتكن R هي المنطقة المحدودة بالمستقيمات : $x = -1,\ \ y = -2,\ \ x + y\ = 3$
   ولتكن g الدالة المعرفة بالشكل التالي: $g(x,y) = x^2 + 2\text{xy} + 3\ \text{y}^2$
   أ- ارسم المنطقة R .
   ب- حدد القيم القصوى المحلية للدالة g إن وجدت داخل المنطقة R .
   ج- حدد القيم القصوى المحلية للدالة g على حدود المنطقة R .
   د- دوّن جميع النقاط الحرجة و القيم التي حصلت عليها في جدول و استنتج القيم القصوى المطلقة للدالة g في المنطقة المغلقة R .

السؤال الثالث (4 درجات)

لنفرض أن $w = f(x,y)$ دالة في متغيرين x و y و أن مشتقاتها الجزئية من الرتبة الثانية متصلة على نطاقها.
وإذا كانت $x = u + v$ و $y = u - v$ فبرهن أن:

$$\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial w}{\partial v} = \ (\frac{\partial w}{\partial x})^2 - (\frac{\partial w}{\partial y})^2$$

السؤال الرابع (8 درجات)

1. احسب التكامل التالي:

$$\iint_R (3x^2 - 4y^3)dA$$

حيث $R = \{(x,y): 1 \le x \le 2 \text{ و } 0 \le y \le 2\}$

2. استعمل الإحداثيات القطبية واحسب التكامل التالي:

$$\iint_R \frac{1}{x^2+y^2+1}\, dA$$

حيث R هي المنطقة المستوية المحدودة: $R = \{(x,y): y \ge 0 \text{ و } x^2+y^2 \le 4\}$.

السؤال الخامس (8 درجات)

1. لكل من المتتابعات التالية بين فيما إذا كانت متقاربة أو متباعدة و أوجد نهايتها إن كانت متقاربة (مع التعليل).

(أ) $\{(-1)^n\}$ (ب) $\left\{\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}$ (ت) $\{2^n\}$ (ث) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$

2. لكل من المتسلسلات التالية بين فيما إذا كانت متقاربة أو متباعدة وأوجد نهايتها إن كانت متقاربة (مع التعليل).

(أ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ (ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ (ت) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ (ث) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+3}$

جامعة الملك سعود كلية العلوم- قسم الرياضيات	الاختبار النهائي في المقرر 207 ريض	الفصل الثاني 1436/1435هـ الزمن ثلاث ساعات

السؤال الأول (12 درجة)

لتكن f دالة في المتغيرين x و y معرفة بالشكل التالي:

$$f(x\,,y\,)=\begin{cases}\dfrac{x^2\,y}{x^4+y^2} & ;\ (x,y)\ \neq\ (0\,,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0\,,0)\end{cases}$$

1. ما هو مجال (نطاق) الدالة f ؟
2. برهن أن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة .
3. برهن أن f متصلة عند كل نقطة $(x,y)\ \neq\ (0\,,0)$.
4. جد المشتقات الجزئية الأولى للدالة f عند النقطة $(0,0)$ إن وجدت.
5. جد المشتقات الجزئية الاولى f_x و f_y عند كل نقطة $(x,y)\ \neq\ (0\,,0)$.
6. جد المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية f_{xy} و f_{yx} عند النقطة $(0,0)$ إن وجدت.
7. استنتج أن إحدى الدالتين $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ و $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ غير متصلة عند النقطة $(0,0)$.

السؤال الثاني (12 درجة)

1. لتكن f الدالة المعرفة بالشكل التالي: $f(x,y)=x^2+2xy+\ 3y^2$

أ- جد النقطة الحرجة الوحيدة للدالة f .

ب- حدد القيمة العظمى أو الصغرى المحلية للدالة f .

ت- أثبت أن القيمة القصوى المحلية للدالة f هي قيمة قصوى مطلقة .

2. لتكن R هي المنطقة المحدودة بالمستقيمات $x=-2$ و $x=4$ و $y=-1$ و $y=3$

أ- ارسم المنطقة R .

ب- حدد القيمة العظمى أو الصغرى المحلية للدالة f إن وجدت داخل المنطقة R .

ت- حدد القيم القصوى المحلية للدالة f على حدود المنطقة R .

ث- دوّن جميع النقاط الحرجة و القيم التي حصلت عليها في جدول و استنتج القيم القصوى المطلقة للدالة f في المنطقة المغلقة R .

السؤال الثالث (12 درجات)

1. احسب التكامل التالي بطريقتين :

$$\iint_R (3x^2 - 4y^3)dA$$

حيث $R = \{(x,y): 1 \le x \le 2$ و $0 \le y \le 2\}$

2. احسب التكامل التالي :

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y\cos(x^5)dxdy$$

3. استعمل الإحداثيات القطبية واحسب التكامل التالي:

$$\iint_R \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} dA$$

حيث R هي المنطقة المستوية المحدودة: $R = \{(x,y): x \ge 0$ و $x^2 + y^2 \le 9\}$.

السؤال الرابع (4 درجات)

لكل من المتتابعات التالية بين فيما إذا كانت متقاربة أو متباعدة و أوجد نهايتها إن كانت متقاربة (مع التعليل).

(أ) $\{(-1)^n\}$ (ب) $\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ (ت) $\{3^n\}$ (ث) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$

جامعة الملك سعود	الاختبار النهائي	الفصل الأول 1437/1436هـ
كلية العلوم- قسم الرياضيات	المقرر 207 ريض	الزمن: ثلاث ساعات

السؤال الأول (8 درجات)

لتكن الدالة f في متغيرين x و y معرفة بالشكل الاتي:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4} & ;\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. ما هو نطاق الدالة f ؟
2. هل أن الدالة f متصلة عند النقطة $(0,0)$؟
3. أثبت أن الدالة f متصلة عند كل نقطة $(x,y)\neq(0,0)$.
4. ابحث عن المشتقات الجزئية الأولى f_x و f_y للدالة f عند النقطة $(0,0)$.
5. جد كل من دالتي المشتقات الجزئية الأولى f_x و f_y .
6. ابحث عن كل من المشتقات الجزئية الثانية $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ عند النقطة $(0,0)$ إن وجدت.

السؤال الثاني: (12 درجات)

1. لتكن f الدالة المعرفة بالشكل الاتي: $f(x,y)=x^3+\;y^3+3\,y^2-3x-9y+2$
   - أ- أثبت أن النقاط الحرجة للدالة f هي $(1,1),(1,-3)\,,(-1,1),(-1,-3)$.
   - ب- أوجد القيم القصوى المحلية والنقاط السرجية للدالة f .
   - ج- هل توجد قيمة عظمى مطلقة للدالة f؟ علل إجابتك.
   - د- هل توجد قيمة صغرى مطلقة للدالة f؟ علل إجابتك.
2. لتكن f الدالة المعرفة بالشكل الاتي: $g(x,y)=x^2+\;y^2+4\,x-2y+2$
   ولتكن R هي المنطقة المحدودة بالمستقيمات $x\;=\;0$ و $y=0$ و $x+y=5$
   - أ- ارسم المنطقة R .
   - ب- حدد القيم القصوى المحلية للدالة g إن وجدت داخل المنطقة R .
   - ج- حدد القيم القصوى المحلية للدالة g على حدود المنطقة R .
   - د- دوّن جميع النقاط الحرجة و القيم التي حصلت عليها في جدول و استنتج القيم القصوى المطلقة للدالة g في المنطقة المغلقة R .

السؤال الثالث: (6 درجات)

1. هل توجد f دالة في متغيرين x و y مشتقاتها الجزئية من الرتبة الثانية متصلة عند كل نقطة من نطاقها حيث

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xy \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = xy$$

2. لنفرض أن f دالة في متغيرين x و y و أن مشتقاتها الجزئية من الرتبة الثانية متصلة. إذا كانت $w = f(x,y)$ و كانت $x = u + v$ و $y = u - v$ فبرهن أن

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

السؤال الرابع (10 درجات)

1. احسب التكامل التالي: $\iint_R (6x^2 y - 4)dA$

حيث $R = \{(x,y): 0 \le x \le 2 \text{ و } 0 \le y \le 1\}$

2. احسب التكامل التالي : $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y\cos(x^5)dxdy$

3. استعمل الإحداثيات القطبية واحسب التكامل التالي:

$$\iint_R (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\, dA$$

حيث R هي المنطقة المستوية المحدودة:

$R = \{(x,y): -1 \le x \le 1 \text{ و } 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$.

السؤال الخامس (4 درجات)

لكل من المتتابعات التالية بين فيما إذا كانت متقاربة أو متباعدة و أوجد نهايتها إن كانت متقاربة (مع التعليل).

(أ) $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$ (ب) $\{(-\frac{1}{4})^n\}$ (ج) $\{(\frac{5}{4})^n\}$ (د) $\left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\}$