

أسم الطالب	
الرقم الجامعي	
رقم الشعبة	
مدرس المقرر	

### التمرين الأول ( 12 درجة )

لتكن الدالة في المتغيرين  $x$  و  $y$  معرفة بالشكل التالي:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. ما هو نطاق الدالة  $f$  ؟
2. برهن أن  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ .
3. استنتج أن الدالة  $f$  متصلة عند كل نقطة من نطاقها.
4. ابحث عن المشتقات الجزئية الأولى للدالة  $f$  عند النقطة  $(0,0)$ .
5. ابحث عن كل من المشتقات الجزئية الأولى  $f_x$  و  $f_y$  عند كل نقطة من نطاقها.
6. ابحث عن المشتقات الجزئية الثانية  $f_{xy}$  و  $f_{yx}$  عند النقطة  $(0,0)$ .
7. استنتج أن أحد الدالتين  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  و  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  غير متصل عند النقطة  $(0,0)$ .

### التمرين الثاني ( 12 درجة )

1. لتكن  $f$  الدالة المعرفة بالشكل التالي:  $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ 
  - أ - جد النقطة الحرجة الوحيدة للدالة  $f$ .
  - ب - حدد القيمة العظمى أو الصغرى المحلية للدالة  $f$ .
  - ت - أثبت أن القيمة القصوى المحلية للدالة  $f$  هي قيمة قصوى مطلقة.
2. لتكن  $R$  هي المنطقة المحدودة بالمستقيمات  $x = -2$  و  $x = 4$  و  $y = -1$  و  $y = 3$ 
  - أ - ارسم المنطقة  $R$ .
  - ب - حدد القيمة العظمى أو الصغرى المحلية للدالة  $f$  إن وجدت داخل المنطقة  $R$ .
  - ت - حدد القيم القصوى المحلية للدالة  $f$  على حدود المنطقة  $R$ .
  - ث - دون جميع النقاط الحرجة و القيم التي حصلت عليها في جدول و استنتج القيم القصوى المطلقة للدالة  $f$  في المنطقة المغلقة  $R$ .

التمرين الثالث ( 12 درجة)

1. احسب التكامل التالي بطريقتين :

$$\iint_R (3x^2 - 4y^3) dA$$

حيث  $R = \{(x, y): 1 \leq x \leq 2 \text{ و } 0 \leq y \leq 2\}$

2. احسب التكامل التالي :

$$\iint_R xy \, dA$$

حيث  $R$  هي المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنيين  $y = x^3$  و  $y = x^2$

التمرين الرابع ( 14 درجة)

1. حدد أي من المتتابعات التالية متقاربة و أيها متباعدة و أوجد نهاية المتقاربة منها مع الإثبات.

$$\left\{ \frac{\sin(n)}{n} \right\} \quad (\text{ث}) \quad \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\} \quad (\text{ت}) \quad \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^n \right\} \quad (\text{ب}) \quad \{(-1)^n\} \quad (\text{أ})$$

2. حدد أي من المتسلسلات التالية متقاربة و أيها متباعدة و أوجد نهاية المتقاربة منها مع الإثبات.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad (\text{ث}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \quad (\text{ب}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \quad (\text{أ}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. إذا كانت  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  متسلسلة و المتتابعة  $\{s_n\}$  حيث أن  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  :

أ - جد الحدود الأربعة الأولى لمتتابعة المجاميع الجزئية.

ب - جد قيمة كل من  $a$  و  $b$  بحيث  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{(n+1)}$ .

ت - أثبت أن المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  متقاربة و جد مجموع المتسلسلة.

الله ولي التوفيق

التمرين الأول ( 8 درجات)

1. حدد أي من المتتابعات التالية متقاربة و أيها متباعدة و أوجد نهاية المتقاربة منها مع الإثبات.

(أ)  $\left\{ \left(-\frac{1}{n}\right)^n \right\}$  (ب)  $\left\{ \left(\frac{7}{6}\right)^n \right\}$  (ت)  $\left\{ \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \right\}$  (ث)  $\left\{ \frac{\cos(n)}{n} \right\}$

2. إذا كانت  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  متسلسلة و المتتابعة  $\{s_n\}$  حيث أن  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ :

أ- جد الحدود الأربعة الأولى لمتتابعة المجاميع الجزئية.

ب- جد قيمة كل من  $a$  و  $b$  بحيث  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{(n+1)}$ .

ت- أثبت أن المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  متقاربة و جد مجموع المتسلسلة.

التمرين الثاني ( 12 درجة)

1. احسب التكامل التالي:

$$\iint_R (3x^2y - 4y^3) dA$$

$$R = \{(x, y): 1 \leq x \leq 2 \text{ و } 0 \leq y \leq 2\}$$

2. احسب التكامل التالي :

$$\iint_R (x + y) dA$$

حيث  $R$  هي المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنيين  $y = x$  و  $y = x^2$

3. لتكن  $f$  الدالة المعرفة بالشكل التالي:  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{3/2}$

أ- باستعمال الإحداثيات القطبية أثبت أن  $f(x, y) = r^3$

ب- ارسم  $R$  المنطقة المحدودة بالمنحنيات  $y = 0$  و  $y = \sqrt{1 - x^2}$  و  $x = -1$  و  $x = 1$

ت- احسب التكامل التالي:  $\iint_R (x^2 + y^2)^{3/2} dA$

السؤال الأول ( 8 درجات )

1- لنفرض أن  $f$  دالة في المتغيرين  $x$  و  $y$  و أن مشتقاتها الجزئية من الرتبة الثانية متصلة. إذا كانت  $w = f(x, y)$  و كانت  $x = u + v$  و  $y = u - v$  فبرهن أن 
$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

2- لتكن  $f$  دالة في المتغيرين  $x$  و  $y$  مجالها  $D$  ومشتقاتها الجزئية الأولى متصلة و لتكن  $f$  متجانسة من الدرجة  $k$  ( لكل نقطة  $(x, y)$  في  $D$  فإن  $(tx, ty)$  في  $D$  و  $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$  لكل عدد حقيقي  $t > 0$  ).

برهن أن  $xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = kf(x, y)$  لكل نقطة  $(x, y)$  في  $D$ .

السؤال الثاني ( 12 درجة )

لتكن  $f$  دالة في المتغيرين  $x$  و  $y$  معرفة بالشكل التالي:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. ما هو مجال (نطاق) الدالة  $f$  ؟
2. برهن أن  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  غير موجودة .
3. برهن أن  $f$  متصلة عند كل نقطة  $(x, y) \neq (0, 0)$  .
4. جد المشتقات الجزئية الأولى للدالة  $f$  عند النقطة  $(0, 0)$  إن وجدت.
5. جد المشتقات الجزئية الأولى  $f_x$  و  $f_y$  عند كل نقطة  $(x, y) \neq (0, 0)$  .
6. جد المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية  $f_{xy}$  و  $f_{yx}$  عند النقطة  $(0, 0)$  إن وجدت.
7. استنتج أن إحدى الدالتين  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  و  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  غير متصلة عند النقطة  $(0, 0)$  .

السؤال الثالث ( 12 درجة )

1. لتكن  $f$  الدالة المعرفة بالشكل التالي:  $f(x, y) = x^3 - 3x + 3xy^2$  .  
أ- جد النقاط الحرجة للدالة  $f$  .

ب- جد القيم العظمى و الصغرى المحلية و السرجية للدالة  $f$  إن وجدت.

ج- أثبت أن القيم القصوى المحلية للدالة  $f$  هي قيم قصوى ليست مطلقة .

2. لتكن  $R$  هي المنطقة المحدودة بالمستقيمات  $x = 0$  و  $y = -1$  و  $x + y = 3$

أ- ارسم المنطقة  $R$  .

ب- حدد القيم القصوى المحلية للدالة  $f$  إن وجدت داخل المنطقة  $R$  .

ج- حدد القيم القصوى المحلية للدالة  $f$  على حدود المنطقة  $R$  .

د- دَوِّن جميع النقاط الحرجة و القيم التي حصلت عليها في جدول و استنتج القيم القصوى المطلقة للدالة  $f$  في المنطقة المغلقة  $R$  .

السؤال الرابع ( 12 درجة)

1. لتكن  $f$  الدالة المعرفة بالشكل التالي:  $f(x, y) = x^3 - 3x + 3xy^2$
- أ- أثبت أن النقاط الحرجة للدالة  $f$  هي  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  و  $(0, -1)$ .
  - ب- جد القيم العظمى و الصغرى المحلية و السرجية للدالة  $f$  إن وجدت.
  - ج- أثبت أن القيم القصوى المحلية للدالة  $f$  هي قيم قصوى ليست مطلقة.

2. لتكن  $R$  هي المنطقة المحدودة بالمستقيمات  $x = -\frac{1}{2}$  و  $y = -2$  و

$$x + y = 3$$

- أ- ارسم المنطقة  $R$ .
- ب- حدد القيم القصوى المحلية للدالة  $f$  إن وجدت داخل المنطقة  $R$ .
- ج- حدد القيم القصوى المحلية للدالة  $f$  على حدود المنطقة  $R$ .
- د- دوّن جميع النقاط الحرجة و القيم التي حصلت عليها في جدول و استنتج القيم القصوى المطلقة للدالة  $f$  في المنطقة المغلقة  $R$ .

السؤال الخامس (8 درجات)

- 1- احسب التكامل التالي بطريقتين :

$$\iint_R (6x^2 y - 4xy) dA$$

$$R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2 \text{ و } 0 \leq y \leq 2\} \text{ حيث}$$

- 2- استعمل الإحداثيات القطبية واحسب التكامل التالي:

$$\iint_R (x^2 + y^2 + 1) dA$$

$$R = \{(x, y): x \geq 0 \text{ و } x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ حيث}$$