جامعة الملك سعود	**الاختبار النهائي**	**الفصل الأول 1436/1435هـ**
كلية العلوم- قسم الرياضيات	**في المقرر 207 ريض**	**والزمن ثلاث ساعات**

السؤال الأول (8 درجات)

لتكن f دالة في المتغيرين x و y معرفة بالشكل التالي:

$$f(x\,,y\,) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & ;\ (x,y)\ \neq\ (0\,,0) \\ 0 & ;\ (x,y) = (0\,,0) \end{cases}$$

1. ما هو مجال (نطاق) الدالة f ؟
2. برهن أن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة .
3. برهن أن f متصلة عند كل نقطة $(x,y)\ \neq\ (0\,,0)$.
4. جد المشتقات الجزئية الأولى للدالة f عند النقطة $(0,0)$ إن وجدت.
5. جد المشتقات الجزئية الاولى f_x و f_y عند كل نقطة $(x,y)\ \neq\ (0\,,0)$.

السؤال الثاني (12 درجة)

1. لتكن f الدالة المعرفة بالشكل التالي: $f(x,y) = x^4 - 4x^3 + 8\text{xy} + 2\text{ y}^2$

أ- أثبت أن النقاط الحرجة للدالة f هي: $(0,0)$, $(-1,2)$ و$(8-,4)$

ب- جد القيم العظمى و الصغرى المحلية والنقاط السرجية للدالة f إن وجدت.

ج- أثبت أن القيم القصوى المحلية للدالة f هي قيم قصوى ليست مطلقة .

2. لتكن R هي المنطقة المحدودة بالمستقيمات : $x = -1,\ \ y = -2,\ \ x + y\ = 3$

ولتكن g الدالة المعرفة بالشكل التالي: $g(x,y) = x^2 + 2\text{xy} + 3\text{ y}^2$

أ- ارسم المنطقة R .

ب- حدد القيم القصوى المحلية للدالة g إن وجدت داخل المنطقة R .

ج- حدد القيم القصوى المحلية للدالة g على حدود المنطقة R .

د- دوّن جميع النقاط الحرجة و القيم التي حصلت عليها في جدول و استنتج القيم القصوى المطلقة للدالة g في المنطقة المغلقة R .

السؤال الثالث (4 درجات)

لنفرض أن $w = f(x,y)$ دالة في متغيرين x و y و أن مشتقاتها الجزئية من الرتبة الثانية متصلة على نطاقها.

وإذا كانت $x = u + v$ و $y = u - v$ فبرهن أن:

$$\frac{\partial w}{\partial u}.\frac{\partial w}{\partial v} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

السؤال الرابع (8 درجات)

1. احسب التكامل التالي:

$$\iint_R (3x^2 - 4y^3)dA$$

حيث $R = \{(x,y): 1 \le x \le 2$ و $0 \le y \le 2\}$

2. استعمل الإحداثيات القطبية واحسب التكامل التالي:

$$\iint_R \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} dA$$

حيث R هي المنطقة المستوية المحدودة: $\{(x,y): y \ge 0$ و $x^2 + y^2 \le 4\} = R$.

السؤال الخامس (8 درجات)

1. لكل من المتتابعات التالية بين فيما إذا كانت متقاربة أو متباعدة و أوجد نهايتها إن كانت متقاربة (مع التعليل).

(أ) $\{(-1)^n\}$ (ب) $\left\{\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}$ (ت) $\{2^n\}$ (ث) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$

2. لكل من المتسلسلات التالية بين فيما إذا كانت متقاربة أو متباعدة وأوجد نهايتها إن كانت متقاربة (مع التعليل).

(أ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ (ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ (ت) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ (ث) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+3}$

التمرين الثالث (12 درجة)

1. احسب التكامل التالي بطريقتين :

$$\iint_{R} (3x^2 \ - 4y^3)dA$$

حيث $R = \{(x,y): 1 \leq x \ \leq 2$ و $0 \leq y \ \leq 2\}$

2. احسب التكامل التالي :

$$\iint_{R} xy \, dA$$

حيث R هي المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y = x^3$

التمرين الرابع (14 درجة)

1. حدد أي من المتتابعات التالية متقاربة و أيها متباعدة و أوجد نهاية المتقاربة منها مع الاثبات.

(أ) $\{(-1)^n\}$ (ب) $\left\{\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}$ (ت) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ (ث) $\left\{\frac{\sin(n)}{n}\right\}$

2. حدد أي من المتسلسلات التالية متقاربة و أيها متباعدة و أوجد نهاية المتقاربة منها مع الاثبات.

(أ) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ (ب) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ (ت) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (ث) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$

3. اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ متسلسلة و المتتابعة $\{s_n\}$ حيث أن $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \ + a_2 \ + \cdots + a_n$ متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

أ - جد الحدود الأربعة الأولى لمتتابعة المجاميع الجزئية.

ب - جد قيمة كل من a و b بحيث $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{(n+1)}$.

ت - أثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة و جد مجموع المتسلسلة .

الله ولي التوفيق